



А.С. НИНУЛ

А.С. НИНУЛ

# ТЕНЗОРНАЯ ТРИГОНОМЕТРИЯ

# ТЕНЗОРНАЯ ТРИГОНОМЕТРИЯ

генеральное неравенство средних величин  
 глобальный предельный метод вычисления корней  
 алгебраического (векового) уравнения  
 минимальный аннулирующий многочлен матрицы  
 квазиевклидова и псевдоевклидова тензорная  
 тригонометрия в трёх основных формах  
 проективные и моторные тензорные углы и функции  
 сферические и гиперболические тензоры движений  
 тензор ортосферической ротации  
 сферические и гиперболические рефлекторы  
 сферические и гиперболические тензоры деформаций  
 тригонометрический спектр нуль-простой матрицы  
 генеральные косинусное и синусное неравенства  
 частные и генеральные квадратичные нормы матриц  
 тензоры элементарных ротаций и деформаций  
 полярное представление общих тензоров движения  
 тригонометрические проективные модели геометрий  
 гиперболическое уравнение трактрисы, их подобие  
 теорема об ортопредставлении суммы двух движений  
 общие законы суммирования движений и скоростей  
 формулы для попутной ортосферической ротации  
 тригонометрические модели релятивистской  
 кинематики и динамики, в т.ч. в поле тяготения  
 четырёхмерный псевдоаналог теории Френе - Серре

*ТЕОРИЯ И ПРИЛОЖЕНИЯ*

А.С. НИНУЛ  
 ТЕНЗОРНАЯ  
 ТРИГОНОМЕТРИЯ

ISBN 5-03-003717-9



9 795030 037171



Издательство «МИР»

**А.С. Нинул**

**ТЕНЗОРНАЯ  
ТРИГОНОМЕТРИЯ**

***ТЕОРИЯ И ПРИЛОЖЕНИЯ***



Москва «МИР» 2004

УДК 512.64/514.1/530.12  
ББК 22.143  
Н 60

**Нинул А.С.**

Н 60 Тензорная тригонометрия. *Теория и приложения*. – М.: Мир, 2004, 336с., ил.  
ISBN 5-03-003717-9

В монографии изложены основы тензорной тригонометрии, базирующейся на квадратичных метриках в многомерных арифметических пространствах. В теоретическом плане тензорная тригонометрия естественным образом дополняет классические разделы аналитической геометрии и линейной алгебры. В практическом плане она даёт инструментарий для решения самых разнообразных геометрических задач в многомерных аффинных, евклидовых, квази- и псевдоевклидовых пространствах. Движения, определяемые тензорной тригонометрией, задают геометрию в малом для вложенных в них подпространств постоянной кривизны.

Кроме того, тензорная ротационная и деформационная тригонометрия в элементарной форме применена к изучению движений в неевклидовых геометриях – сферической и гиперболической, а также в теории относительности. В результате получены наиболее общие – матричные, векторные и скалярные представления этих движений в весьма наглядной тригонометрической форме. Новые методы тензорной тригонометрии предназначены для применения в ряде областей математики и математической физики.

Для специалистов в областях многомерных геометрий арифметических пространств, аналитической геометрии, линейной алгебры, неевклидовых геометрий и теории относительности; для преподавателей, аспирантов и студентов физико-математических специальностей.

УДК 512.64/514.1/530.12  
ББК 22.143

*Редакция литературы по математическим наукам*

ISBN 5-03-003717-9

© Нинул А.С., 2004

*Настоящее издание посвящается  
100-летию первых публикаций по теории относительности  
и 175-летию первых публикаций по неевклидовой геометрии*

## **К читателям**

Пожалуй, редко какой раздел математической науки так хорошо известен и понятен всем ещё со школьных времён как тригонометрия. Зародившись в глубокой древности, она практически завершила своё развитие и приобрела современную форму в конце XVIII века в трудах великого Леонарда Эйлера. Между тем геометрия от исторически изначальных евклидовых форм за прошедшие два века шагнула далеко вперёд. В том числе были открыты и изучены её разнообразные неевклидовы и многомерные тензорные формы.

В данной книге предпринято построение общих тензорных форм тригонометрии в многомерных арифметических пространствах с квадратичной метрикой – евклидовой, квази- и псевдоевклидовой. В частности, в этих формах классическая скалярная тригонометрия проявляется на собственных плоскостях, квази- или псевдоплоскостях тригонометрического подпространства тензорного угла.

Чтобы прийти к намеченной цели, необходимо было основательно разобраться в ряде смежных вопросов, относящихся к теории точных матриц – составной части линейной алгебры. Затраченные усилия были вознаграждены получением, на наш взгляд, ряда интересных и неожиданных результатов в алгебре и геометрии.

С точки зрения тензорной тригонометрии некоторые довольно сложные и трудно воспринимаемые математические и физические теории видятся совершенно прозрачно и естественным образом. Здесь это показано на примере тригонометрического моделирования движений в неевклидовых геометриях и в теории относительности.

Тензорная тригонометрия находится на стыке проблем, изучаемых многомерной аналитической геометрией и линейной алгеброй. Ввиду того что изложение новой теории потребовало применения дополнительных обозначений и терминологии, автор стремился придать им наиболее удобную и логичную форму.

Автор будет весьма признателен всем тем, кто выскажет свои отзывы, замечания или какие-либо полезные предложения по данной книге на интернет-сайте: «<http://www.ninulas.narod.ru/>».

**A. S. Ninul, Tensor Trigonometry. Theory and applications.**

**Appendix. Trigonometric motion models in non-Eukclidean geometries and in the Theory of Relativity.**

Publishing House «Mir», Moscow 2004.

## **Resume**

The main aim of this monograph is to develop a number of geometric notions of a theory of exact matrices and then to work out the basic statements of a tensor trigonometry for bivalent tensor angles formed by linear subspaces or in accordance with their rotation.

In the first part (Chapters 1–4) a number of problems from a theory of exact matrices is considered. The general inequality for average values is formulated, moreover hierarchical invariants for the spectrally positive matrix are installed. Eigen projectors and quasiinverse matrices are expressed in explicit form – in terms of coefficients of the characteristic polynomial. A minimal annulling polynomial is identified. The parameters of matrices singularity and inequalities, connected with them, are studied. Null-prime and null-normal singular matrices are defined and considered.

In the second part (Chapters 5–12) a tensor trigonometry in affine and metric forms is developed. Binary tensor angles and modulus characteristics for linear objects are determined. The quasi-Euclidean and pseudo-Euclidean tensor trigonometries are constructed in three kinds: projective, reflective and motive (the last term means here rotation or deformation). The complete trigonometric spectrum of a null-prime matrix is installed, which serves as a basis for obtaining general sine and cosine normalizing inequalities. The quadratic norms of matrices are determined.

In Appendix the tensor trigonometry in elementary forms is used for studying motions in non-Euclidean geometries and in the theory of relativity. For summing two- and multistep motions (velocities) in them the polar representation of trigonometric rotations is used. The law of summing motions (velocities) is given in the general matrix form. The hyperbolic formalizations of Einstein dilation of time and Lorentz contraction of extent are realized as effects of rotational and deformational transformations of coordinates. The formulas of computation and trigonometric interpretation of secondary orthospherical rotation are given. Trigonometric models for relativistic kinematics and dynamics of a material point in Minkowskian space-time are proposed. Four absolute vector and scalar differentially-geometric and physical characteristics of a curved world line, completely defining its orientation and configuration in the vicinity of every own world point, are considered, in particular, in a gravitational field.

This edition is devoted to the 100ys anniversary of the first publications on a theory of relativity and to the 175ys anniversary of the first publications on a hyperbolic non-Euclidean geometry and also their eminent creators.

Web-site for the communication: [www.ninulas.narod.ru/english.html](http://www.ninulas.narod.ru/english.html)

*“В симфонию эту я вложил,  
без преувеличения, всю свою душу...”*

П. И. Чайковский

## Предисловие

В теории матриц такие классические понятия, как сингулярная матрица и её ранг, собственные подпространства, аннулирующие многочлены, проекторы и т. д., имеют смысл лишь для точных матриц и при точных вычислениях. Различают точную теорию понятий и аппроксимационную теорию оценок понятий [18]. Каждая из них играет собственную роль. Очевидно, что понятия, связанные с точными числовыми характеристиками, относятся к точной теории. Эта теория используется не только для построения и анализа абстракций, но она важна и для анализа объектов прикладных задач. Ведь числовые характеристики объектов всегда точны, а приближённые лишь их разнообразные оценки.

В основной части монографии в двенадцати главах содержатся как результаты исследований по теории точных матриц (раздел I), так и развитая на этой платформе тензорная тригонометрия (раздел II). Последняя, сама по себе, является составной частью соответствующей геометрии с квадратичным метрическим инвариантом в многомерном арифметическом пространстве.

Исторические корни классической скалярной тригонометрии, как составной части двумерной геометрии, уходят в далёкое прошлое. Некоторые тригонометрические формулировки содержались ещё в “Началах” Евклида. Интересно, что сферическая тригонометрия стала математически развиваться раньше тригонометрии на плоскости. Это было обусловлено потребностью в ней со стороны практической астрономии. Сферические функции встречались уже в IX–X веках у арабских математиков. В европейскую науку тригонометрию ввёл в начале XIV века Р. Уоллингфорд, применив её, в частности, к решению прямоугольного треугольника. Гиперболические функции открыл А. Муавр, а реально их начали применять в геометрических исследованиях И. Ламберт и Ф. Тауринус. Современный завершённый вид скалярная тригонометрия получила в трудах Л. Эйлера, который также осуществил её комплексификацию. С другой стороны, геометрия вообще продолжала развиваться далее и особенно бурно в связи с появившейся идеей многомерного геометрического пространства.

Многомерная геометрия в истории развития математики возникла впервые, по-видимому, в середине XIX века в классическом труде Г. Грассмана “Учение о линейном протяжении” (1844г.) [54]. Им же и независимо от него У. Гамильтоном были заложены основы векторного анализа в многомерных арифметических пространствах. Выдающийся вклад в обоснование алгебраического подхода к геометрии объектов арифметического пространства внесла знаменитая аксиома Кантора–Дедекинда о континууме.

Возникновение примерно в то же время и последующее развитие линейной алгебры в трудах Фробениуса, Крамера, Кронекера, Капелли, Сильвестра, Жордана, Эрмита, Вейля и других математиков приводило со временем к всё большему её наполнению геометрическим содержанием. Она нашла эффективное применение в теории векторных евклидовых, а после известных работ А. Пуанкаре и Г. Минковского и псевдоевклидовых пространств. Этому весьма способствовало алгебраическое определение понятий, связанных с метрическими свойствами арифметических пространств (длин векторов и значений углов между ними). Как известно, базисными для определения мер и норм евклидова пространства явились косинусное неравенство Коши и синусное неравенство Адамара. Впоследствии Э. Мур и Р. Пенроуз предложили общие методы квазиобращения матриц. А. Н. Тихонов дал предельный метод нормального решения систем линейных уравнений. Результаты этих исследований имели также большое геометрическое значение и в какой-то мере явились отправной точкой данной работы.

Главная цель настоящей монографии заключается в разработке и применении тригонометрических понятий многомерной геометрии. В качестве основной теоретической платформы используется и развивается далее теория точных матриц. При этом показаны дополнительные возможности в использовании получаемых результатов.

Прежде всего, найдена структура матричных характеристических коэффициентов 1-го и 2-го рода, широко фигурирующих в теории точных матриц с середины XX века (и возникшие в работах Ж.-М. Сурьё и Д. К. Фаддеева), – в дополнение к известной со времён У. Лаверье структуре скалярных характеристических коэффициентов. Идентифицирован минимальный аннулирующий многочлен матрицы исходя из полученного в работе фундаментального соотношения для её основных параметров сингулярности. Установлен тригонометрический спектр нуль-простой матрицы, на основе которого получены генеральные нормирующие косинусное и синусное неравенства.

Введены общие квадратичные нормы для особых линейных геометрических объектов – линеоров, задаваемых  $n \times m$ -матрицами  $A$ , где  $1 \leq m < n$  (при  $m = 1$  это векторы), а также для тензорных углов

между ними или между их образами в  $n$ -мерном арифметическом пространстве. Генеральная норма имеет порядок  $r$ , равный рангу матрицы. Евклидова норма (или норма Фробениуса) имеет порядок 1. Теоретической базой для этих норм стали, во-первых, иерархическое генеральное неравенство для средних величин и, во-вторых, общие тригонометрические неравенства. Первое из них (иерархическое) даёт с известными тремя частными неравенствами полную иерархию средних геометрических, алгебраических и степенных, в т.ч. в их реверсивных формах. Последующие (тригонометрические) обобщают неравенства Коши (косинусное) и Адамара (синусное) для определения скалярного угла между указанными объектами – линеорами или между их образами – т.е. планарами ранга  $m$  (при  $m = 1$  – между векторами или прямыми). В качестве сопутствующего применения иерархического неравенства средних величин изложен глобальный предельный метод поэтапного вычисления всех корней алгебраического уравнения, в том числе векового уравнения спектрально положительной матрицы, а также дан намного более строгий необходимый признак положительности корней алгебраического уравнения, нежели классический признак Декарта.

Главным же результатом монографии, на наш взгляд, является создание в полномасштабных формах тензорной тригонометрии – в трёх естественным образом дополняющих друг друга формах: проективной, рефлексивной и моторной. Определены и изучены два типа моторных тригонометрических преобразований: ротационные (синусно-косинусные) и деформационные (тангенсно-секансные). В свою очередь, ротационные преобразования через их полярное представление подразделены на сферические, гиперболические и ортосферические. Между всеми сферическими и гиперболическими понятиями установлены дуальные отношения на основе широко используемой в работе сферическо-гиперболической аналогии в абстрактной и конкретной формах (последняя в универсальной базе).

Дано сходное определение квазиевклидовых и псевдоевклидовых пространств, а также их собственных тензорных тригонометрических преобразований – как ротационных, так и орторефлексивных через фундаментальный рефлектор-тензор и квадратичную метрику базового  $n$ -мерного арифметического пространства.

В парах (сферическое, ортосферическое), (гиперболическое, ортосферическое) эти ротационные тригонометрические преобразования образуют две некоммутативные группы. Первая из них есть группа квазиевклидовых ротаций. Вторая из них – группа псевдоевклидовых ротаций, или группа Лоренца. Пересечение этих двух групп есть подгруппа ортосферических ротаций. Гиперболические и сферические ротации, вообще говоря, не образуют собственных подгрупп.



В свою очередь, рефлектор-тензор и квадратичная метрика задают аналогично два собственных множества рефлексивных преобразований с их общим пересечением в виде подмножества ортосферических рефлексий. Но рефлексии не образуют собственных групп.

Тензорная тригонометрия, в принципе, применима к решению разнообразных задач геометрий с квадратичными инвариантами, реализуемых в многомерных арифметических пространствах и во вложенных в них подпространствах постоянной кривизны. В качестве отдельных примеров специфического применения новых методов тензорной тригонометрии в линейной алгебре дано спектральное представление собственных проекторов, тригонометрическая теория простых квадратных корней из единичной матрицы, а также показана тригонометрическая природа коммутативности и антикоммутативности простых матриц. Используемый в ней фундаментальный материал изложен в учебной литературе [1, 2, 4, 10, 12, 20, 21, 23, 28, 29].

Основная часть монографии состоит из двух разделов. В первом из них (главы 1 – 4) рассматривается ряд аспектов теории точных матриц, необходимых для обоснования вновь вводимых геометрических и тригонометрических характеристик матричных объектов в многомерных арифметических пространствах с квадратичной метрикой. Второй раздел (главы 5 – 12) посвящён тензорной тригонометрии.

В качестве весьма важного частного и простейшего случая дано представление тензорных тригонометрических ротаций и деформаций в элементарных формах (то есть с одним собственным углом движения и с реперной осью для его отсчёта). Показано, что при этом открываются новые интересные возможности для изучения движений в неевклидовых геометриях постоянной кривизны и в теории относительности. Эти вопросы освещаются в монографии достаточно подробно в отдельном приложении (главы 1А – 10А).

Отметим также то особое обстоятельство, что монография с данным приложением выходит в свет в преддверии отмечаемых научным миром в 2004 – 2005 г. г. двух знаменательных Юбилеев: 175-летия со времени первой и основополагающей публикации по неевклидовой геометрии – «О началах геометрии» Н. И. Лобачевского, а затем «Аппендикса» Я. Больяи, и 100-летия со времени открытия Г. Лоренцем, А. Пуанкаре и А. Эйнштейном изначальных законов теории относительности.

Именно этим историческим событиям в фундаментальной науке и их великим творцам она посвящается.

В заключение автор считает своим долгом почтить светлую память известного российского математика Михаила Михайловича Постникова, просмотревшего незадолго до своей безвременной кончины рукопись монографии и давшего на неё положительный отзыв.

## Используемые обозначения

### 1. Обозначения матриц (матричный алфавит)

$A$  – прямоугольная матрица или  $n \times r$ -*линеор*,

$\{\text{lig } (t)A\}$  – субматрица строк  $A$  порядка  $t$ ,

$\{\text{col } (t)A\}$  – субматрица столбцов  $A$  порядка  $t$ ,

$A^+$  – квазиобратная (сферически ортогонально) матрица Мура – Пенроуза,

$V$  – квадратная матрица или внешняя мультипликация линеоров  $A_1$  и  $A_2$ ,

$V^-$  – аффинная квазиобратная (гиперболически ортогонально) матрица,

$V_i = (V - \mu_i \cdot I)$  –  $i$ -я собственная матрица для  $V$ , при  $\mu_i = 0$ :  $V_1 = V$ ,

$V_r$  – *нуль-простая* матрица,

$\overleftarrow{V}$  или  $\overleftarrow{V}_r$  – аффинный проектор на  $\langle \text{im } V \rangle$  параллельно  $\langle \text{ker } V \rangle$  или *гиперболически ортогональный проектор* на  $\langle \text{im } V \rangle$ ,

$\overrightarrow{V}$  или  $\overrightarrow{V}_r$  – аффинный проектор на  $\langle \text{ker } V \rangle$  параллельно  $\langle \text{im } V \rangle$  или *гиперболически ортогональный проектор* на  $\langle \text{ker } V \rangle$ ,

$V_m$  и  $V_n$  – *нуль-нормальная* (адекватно и эрмитово) матрица,

$\overleftarrow{V}V'$  или  $\overleftarrow{V}_m$  ( $\overleftarrow{V}_n$ ) – сферически ортогональный проектор на  $\langle \text{im } V \rangle$ ,

$\overrightarrow{V}'V$  или  $\overrightarrow{V}_m$  ( $\overrightarrow{V}_n$ ) – сферически ортогональный проектор на  $\langle \text{ker } V \rangle$ ,

$\{D\text{-minor } (t)V\}$  – диагональный минор  $V$  порядка  $t$ ,

$\{Dh\text{-minor } (t)V\}$  – *гиподиагональный минор*  $V$  порядка  $t$ ,

$C$  – внутренняя мультипликация линеоров  $A_1$  и  $A_2$  или свободный матричный множитель, в том числе клеточный,

$C_\mu$  – матрица клеточной формы,

$D$  – диагональная матрица,

$D_\mu\{P\}$  – диагональная форма простой матрицы  $P$ ,

- $\tilde{E}$  – единичный базис,  $\tilde{E}_1$  – исходный и *универсальный* единичный базис,  
 $F(\dots)$  – матрица-функция,  
 $G(\mathbf{x}), \hat{G}(\mathbf{x})$  – взаимные метрические тензоры риманова пространства,  
 $G^{\oplus}(\mathbf{u})$  – метрический тензор псевдориманова пространства,  
 $H$  – эрмитова (эрмитово симметричная) комплексная матрица,  
 $I$  – единичная матрица и *рефлектор тензор* евклидова пространства,  
 $I^{\oplus}$  – *рефлектор-тензор* квази- и псевдоевклидова пространства,  
 $\{\sqrt{|I|}\}_S = R' \cdot I^{\oplus} \cdot R$  – *рефлектор-тензор* квази- и псевдоевклидова пространства, *косо-ориентированного* (где  $R$  не согласована с  $I^{\oplus}$ ),  
 $I_t$  – *тотально-единичная* матрица, все элементы которой равны 1,  
 $J_{\mu}$  – матрица жордановой формы,  
 $K$  – матричный характеристический коэффициент для матрицы  $B$  порядка  $t$  либо 1-го рода  $K_1(B, t)$ , либо 2-го рода  $K_2(B, t)$ ,  
 $K_B(\varepsilon)$  – матричный характеристический многочлен от параметра  $\varepsilon$  для матрицы  $B$ ,  
 $L$  – треугольная матрица,  $L_{\mu}$  – матрица клеточной треугольной формы,  
 $M$  – адекватно нормальная вещественная или комплексная матрица,  
 $N$  – эрмитово нормальная комплексная матрица,  
 $O$  – нильпотентная матрица,  
 $P$  – простая матрица,  
 $Q$  – редуцированный матричный характеристический коэффициент для матрицы  $B$  порядка  $t$  либо 1-го рода  $Q_1(B, t)$ , либо 2-го рода  $Q_2(B, t)$ ,  
 $Q_B(\varepsilon)$  – редуцированный матричный характеристический многочлен от параметра  $\varepsilon$  для матрицы  $B$ ,  
 $R$  – адекватно ортогональная вещественная или комплексная матрица,  
 $R_q$  – *квазиортогональная* матрица,  
 $R_w$  – ортогональная модальная матрица для возврата из  $W$ -формы,  
 $S$  – симметричная матрица,  
 $S^{\oplus}$  – положительно определённая симметричная матрица,  
 $T$  – матрица ротационного тригонометрического преобразования,  
 $U$  – эрмитово ортогональная (унитарная) комплексная матрица,  
 $V$  – матрица линейного преобразования (активного и пассивного),  
 $W$  – моно-бинарная клеточная  $W$ -форма простой матрицы,  
 $X$  и  $Y$  – матрица-аргумент,  
 $Z$  – нулевая матрица.

## 2. Обозначение тензорных углов и их функций

$\tilde{\Phi} = \tilde{\Phi}'$  и  $\Phi = -\Phi'$  – основной сферический угол, проективный и моторный,

$\text{Rot } \Phi$  ( $\text{rot } \Phi$ ) – матрица ротации на угол  $\Phi$ , в т. ч. элементарной,

$\text{Def } \Phi$  ( $\text{def } \Phi$ ) – матрица деформации на угол  $\Phi$ , в т. ч. элементарной,

$\xi = (\pi/2 - \Phi)$  – дополнительный к  $\Phi$  (до прямого угла  $\pi/2$ ) сферический угол (все три угла отвечают рефлектор-тензору),

$\tilde{\Gamma} = -\tilde{\Gamma}'$  и  $\Gamma = \Gamma'$  – основной гиперболический угол, проективный и моторный,

$\text{Roth } \Gamma$  ( $\text{roth } \Gamma$ ) – матрица ротации на угол  $\Gamma$ , в т. ч. элементарной,

$\text{Defh } \Gamma$  ( $\text{defh } \Gamma$ ) – матрица деформации на угол  $\Gamma$ , в т. ч. элементарной,

$\Lambda$  – противолежащий к  $\Gamma$  угол в псевдоевклидовом треугольнике,

$\Delta$  – гиперболический бесконечный прямой угол,

$\Theta$  – ортосферический угол ортогональной ротации по отношению к  $\Phi$  или  $\Gamma$  (буст),

$\Psi = \tilde{\Phi} + i \cdot \tilde{\Gamma}$  и  $\Psi = \Phi + i \cdot \Gamma$  – комплексные сферические углы, проективный и моторный,

$\tilde{\mathcal{E}} = \tilde{\mathcal{E}}^*$  и  $\mathcal{E} = -\mathcal{E}^*$  – эрмитов проективный сферический угол и косо-эрмитов моторный сферический угол.

## 3. Обозначения пространств

$\langle \mathcal{A}^n \rangle$  – арифметическое (аффинное) пространство размерности  $n$ ,

$\langle \mathcal{E}^n \rangle$  и  $\langle\langle \mathcal{E}^n \rangle\rangle$  – евклидово пространство размерности  $n$  и проективная гиперплоскость размерности  $n$ ,

$\langle \mathcal{E}^{n+q} \rangle$  – комплексное бинарное евклидово пространство индекса  $q$  и размерности  $(n+q)$ , изометричное псевдоевклидову пространству,

$\langle \mathcal{P}_k \rangle$  – подпространства пересечений собственных пространств,

$\langle P^{n+q} \rangle$  – вещественное псевдоевклидово пространство индекса  $q$  и размерности  $(n+q)$ ,

$\langle Q^{n+q} \rangle$  – вещественное квазиевклидово пространство индекса  $q$  и размерности  $(n+q)$ .

#### 4. Прочие обозначения

- $C_n^t$  – биномиальные коэффициенты Ньютона,  
 $\|A\|_F$  – норма Фробениуса матрицы  $A$ ,  
 $\|A\|_t^h$  – определённая геометрическая норма матрицы или линейора  $A$  порядка  $t$  и степени  $h$ ,  
 $\|\{B\}\|_t^h$  – полуопределённая геометрическая норма квадратной матрицы  $B$  порядка  $t$  и степени  $h$ ,  
 $\det B$  – детерминант (определитель) матрицы  $B$ ,  
 $\dim \dots$  – размерность пространства  $\dots$ ,  
 $\mathcal{D}(r)B$  – диагональ квадратной матрицы  $B$ , численно равная сумме детерминантов всех её базисных диагональных миноров,  
 $\langle \text{im } B \rangle$  – образ матрицы  $B$ ,  $\langle \text{im } A \rangle$  – образ матрицы  $A$ ,  
 $\langle \text{ker } B \rangle$  – ядро матрицы  $B$ ,  $\langle \text{ker } A \rangle$  – ядро матрицы  $A$ ,  
 $k(B,t)$  – скалярный характеристический коэффициент для сингулярной матрицы  $B$  порядка  $t$ ;  $q(B,t)$  ( $B,t$ ) – он же в редуцированной форме,  
 $K_B(\varepsilon)$  – скалярный характеристический многочлен от параметра  $\varepsilon$  для матрицы  $B$ ;  $q_B(\varepsilon)$  – он же в редуцированной форме,  
 $l$  (или  $l_E$ ) и  $l_P$  – евклидова и псевдоевклидова длина,  
 $\overline{m}_t$  и  $\overline{M}_\theta$  – средние алгебраические и средние степенные порядка  $t$  и  $\theta$ ,  
 $\mathcal{M}t(r)A$  – минорант матрицы  $A$ , численно равный квадратному корню из суммы квадратов детерминантов всех её базисных миноров,  
 $n$  – размерность аффинного или евклидова пространств,  
 $q(B,t)$  – редуцированный скалярный характеристический коэффициент для сингулярной матрицы  $B$  порядка  $t$ ,  
 $q_B(\varepsilon)$  – редуцированный скалярный характеристический многочлен от параметра  $\varepsilon$  для матрицы  $B$ ,  
 $q$  – количество различных собственных значений матрицы,  
 $r = \text{rang } B$  или  $\text{rang } A$  – ранг матрицы,  
 $r'$  – 1-й рок сингулярной матрицы  $B$ , то есть максимальный порядок ненулевого коэффициента  $k(B,t)$ ,  
 $r''$  – 2-й рок сингулярной матрицы  $B$ , то есть максимальный порядок ненулевых коэффициентов  $K_{1,2}(B,t)$ ,  
 $s_i = (n - r_i)$ ,  $s_i' = (n - r_i')$  и  $s_i^\circ = (r_i'' - r_i' + 1)$  – геометрическая, алгебраическая и аннулирующая кратность собственного значения  $\mu_i$ ,  
 $t$  (или  $\theta$ ) – порядок характеристик (либо размер выборки элементов),  
 $\text{tr } B$  – след  $B$ ,  
 $\overline{v}_t$  и  $\overline{V}_\theta$  – реверсивные средние алгебраические и средние степенные порядка  $t$  и  $\theta$ .

- $\gamma$  – скалярный основной гиперболический угол,  
 $\varepsilon$  – скалярный сферический эрмитов угол,  
 $\theta$  – скалярный угол ортосферической ротации, ортогональной по отношению к  $\varphi$  или  $\gamma$ ,  
 $\lambda$  – противолежащий к  $\gamma$  угол в псевдоевклидовом треугольнике,  
 $\delta$  – гиперболический бесконечный прямой угол,  
 $\mu_i$  –  $i$ -е собственное значение матрицы  $B$ ,  
 $v'$  – размерность пространства пересечения  $\text{im } A_1$  и  $\text{im } A_2$ ,  
 $v''$  – размерность пространства пересечения  $\text{im } A_1$  и  $\text{ker } A'_2$  (или  $\text{im } A_2$  и  $\text{ker } A'_1$ ),  
 $\xi$  – дополнительный к  $\varphi$  (до прямого угла  $\pi/2$ ) сферический угол,  
 $\pi$  – открытый сферический угол,  
 $\sigma_j^2$  –  $j$ -е собственное значение *гомомультимпликации*  $AA'$  или  $A'A$ ,  
 $\varphi$  – скалярный основной сферический угол,  
 $\omega = \text{arsh } 1$  – особый гиперболический угол, отвечающий фокусу гиперболы.  
 $e$  – единичный вектор,  
 $e_\alpha, e_\beta$  и  $e_\sigma$  – единичные векторы 1-го, 2 го движения и их суммы.

## 5. Используемые символы

- $'$  – знак простого транспонирования,  
 $*$  – знак эрмитового транспонирования,  
 $\subset$  – множество... принадлежит множеству...,  
 $\subseteq$  – множество... принадлежит или тождественно множеству...,  
 $\in$  – элемент... принадлежит множеству...,  
 $\notin$  – элемент... не принадлежит множеству...,  
 $\cup$  – знак объединения множеств,  
 $\cap$  – знак пересечения множеств,  
 $\equiv$  – знак тождества множеств,  
 $\oplus$  – знак прямого суммирования,  
 $\ominus$  – знак сферически ортогональной прямой суммы,  
 $\oslash$  – знак гиперболически ортогональной прямой суммы,  
 $\sim$  – обозначение для тензорных углов (сверху) проективного типа,  
 $\leq$  – обозначение для тензорных углов (сверху) моторного типа в случае многоступенчатых ротаций с обратным порядком частных движений.

## Раздел I. Ряд общих вопросов теории точных матриц

Тензорная тригонометрия базируется на монобинарном тригонометрическом спектре всех собственных проекторов так называемой нуль-простой  $n \times n$ -матрицы, у которой образ и ядро образуют в пространстве полную прямую сумму. Полный тригонометрический спектр имеют простые матрицы. Существенную роль в выводе и строгом обосновании тригонометрического спектра для нуль-простой  $n \times n$ -матрицы играют коэффициенты её характеристических многочленов – скалярного и матричного. Соответственно структура и свойства этих скалярных и матричных коэффициентов детально изучаются в главе 1. Здесь формулируется и доказывается в целом генеральное неравенство для всех средних величин, включающее цепь частных неравенств для средних алгебраических – основы вводимых впоследствии иерархических норм. Показаны также его дополнительные возможности в теории решения алгебраических уравнений. Исходя из найденной структуры матричных характеристических коэффициентов высшего порядка  $n \times n$ -матрицы  $B$ , явно идентифицирован её минимальный аннулирующий многочлен. В главе 2 устанавливаются явные формулы для собственных проекторов нуль-простой матрицы, у которой образ и ядро образуют прямую сумму, через её характеристические коэффициенты высшего порядка. Как весьма важный частный случай, дополнительно вводятся и изучаются нуль-нормальные матрицы, у которых образ и ядро образуют прямую ортогональную сумму. В главе 3 определены скалярные характеристики матриц, имеющие косинусную и синусную природу и обобщающие известные алгебраические нормы для косинуса и синуса угла между векторами или прямыми в евклидовом арифметическом пространстве. При этом здесь же вводятся в рассмотрение в качестве более общих линейных геометрических объектов – линейоры  $A$  и планары  $\langle \text{im } A \rangle$ , задаваемые  $n \times m$ -матрицами, где  $1 \leq m \leq n$  (в частности, при  $m = 1$  это векторы и прямые). В главе 4 рассматриваются альтернативные варианты комплексификации пространств и характеристик объектов – адекватный и эрмитов. Дан ряд конкретных примеров обоих подходов.

# Глава 1. Коэффициенты характеристических многочленов

## § 1.1. Совместное определение скалярных и матричных коэффициентов

В теории точных матриц особое место занимает раздел, относящийся к характеристическим многочленам. Он включает алгебраические и геометрические аспекты. Их детальная проработка необходима нам для последующего построения фундамента тензорной тригонометрии.

Как известно, каждая  $n \times n$ -матрица имеет своё *вековое* алгебраическое уравнение. Его задаёт *скалярный характеристический многочлен* от параметра  $\mu$ , то есть многочлен со скалярными коэффициентами. Решения векового уравнения суть собственные значения матрицы  $\mu_i$ . С другой стороны, та же  $n \times n$ -матрица имеет *матричный характеристический многочлен* от параметра  $\mu$ , то есть многочлен с матричными коэффициентами. В данной работе указанные характеристические многочлены квадратной матрицы применяются, как правило, в *знакопостоянной форме* от противоположного скалярного параметра  $\varepsilon = -\mu$ . Введём в рассмотрение сразу же оба типа характеристических многочленов и их коэффициентов, например, по методу Д. К. Фаддеева [45, 14].

Пусть  $B$  есть ненулевая  $n \times n$ -матрица ранга  $r$ ,  $I$  – единичная матрица. Обратимся к следующему преобразованию (резольвенте матрицы  $B$ ):

$$(B + \varepsilon I)^{-1} = \frac{(B + \varepsilon I)^V}{\det(B + \varepsilon I)} = \frac{K_B(\varepsilon)}{k_B(\varepsilon)} \quad (1)$$

По существу, это есть обычная формула обращения квадратной матрицы  $(B + \varepsilon I)$  в виде дроби, в числителе которой находится присоединённая к ней матрица, а в знаменателе её детерминант; где  $\varepsilon$  – *произвольный скалярный параметр*. При указанной операции обращения получаются сразу оба характеристических многочлена от  $\varepsilon$ , а именно *скалярный* порядка  $n$  в знаменателе дроби и *матричный* порядка  $(n - 1)$  в её числителе:



$$k_B(\varepsilon) = \sum_{t=0}^n k(B, t) \cdot \varepsilon^{n-t} = \varepsilon^n + \operatorname{tr} B \cdot \varepsilon^{n-1} + \dots + \det B,$$

$$K_B(\varepsilon) = \sum_{t=0}^{n-1} K_1(B, t) \cdot \varepsilon^{n-t-1}.$$

В данных многочленах присутствуют скалярные  $k(B, t)$  и матричные  $K_1(B, t)$  характеристические коэффициенты для исходной матрицы  $B$ . Причём последние указаны пока 1-го рода, а матричные коэффициенты 2-го рода, т. е.  $K_2(B, t)$ , будут определены позднее. Последовательно увеличивающееся число  $t$  есть порядок этих скалярных и матричных коэффициентов. Противоположный параметр  $\mu = -\varepsilon$  относится здесь к собственным значениям матрицы  $B$ . Аналогичный скалярный многочлен, но нулевой, от  $\mu$  для матрицы  $B$  как её вековое уравнение используется в *знакопеременной форме* (т. е. при конкретном  $\varepsilon = -\mu$ ):

$$k_B(-\mu) = (-\mu)^n + \operatorname{tr} B \cdot (-\mu)^{n-1} + \dots + \det B = 0.$$

Поэтому определённые выше скалярные коэффициенты порядка  $t$  представляют собой суммы Виета от  $\mu_i$ , или также суммы всевозможных диагональных миноров матрицы  $B$  размера  $t \times t$ , но без изменения знака перед ними. Согласно методу Леверье [45], все коэффициенты векового уравнения матрицы вычисляются по рекуррентной формуле Варинга, где осуществляется замена сумм Виета на её характеристические скалярные коэффициенты, а сумм Варинга на её характеристические следы одного и того же порядка  $t$ :

$$k(B, t) = \frac{1}{t} \cdot \sum_{\theta=1}^t (-1)^{\theta-1} \cdot k(B, t-\theta) \cdot \operatorname{tr} B^\theta. \quad (2)$$

Это есть рекуррентная формула Варинга – Леверье *прямого* типа. Аналогичная формула для тех же коэффициентов, но выраженная в явном виде, представляет больше теоретический интерес [27, с. 38]

$$k(B, t) = \frac{1}{t!} \cdot \det \begin{vmatrix} \operatorname{tr} B & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \operatorname{tr} B^2 & \operatorname{tr} B & 2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \operatorname{tr} B^{t-1} & \operatorname{tr} B^{t-2} & \operatorname{tr} B^{t-3} & \dots & t-1 \\ \operatorname{tr} B^t & \operatorname{tr} B^{t-1} & \operatorname{tr} B^{t-2} & \dots & \operatorname{tr} B \end{vmatrix}. \quad (3)$$

Формулы (2) и (3) получаются из системы линейных уравнений Ньютона с  $n$  известными корнями относительно  $n$  неизвестных коэффициентов путём применения той же схемы замены. Последовательность скалярных коэффициентов или сумм Виета, согласно системе линейных уравнений Ньютона, взаимно-однозначно связана с такой же последовательностью характеристических следов или сумм Варинга вплоть до порядка  $t = r' = \min \{ \text{rang } B^h \} \leq r$ , то есть до минимума ранга указанной степенной матрицы. При  $t > r'$  все скалярные характеристические коэффициенты порядка  $t$  обнуляются. Параметр  $r'$  матрицы  $B$  определяется как 1-й рок. (Далее будет видно, что обнулению её матричных характеристических коэффициентов отвечает параметр 2-й рок  $r''$ .) Решение любых задач, связываемых изначально со скалярными коэффициентами, можно также рассматривать, исходя из значений характеристических сумм Варинга, а для матриц – значений характеристических следов.

## § 1.2. Генеральное неравенство средних величин

Во втором разделе основной части монографии особое значение имеют положительно (полу)определённые ранга  $r$  симметричные или эрмитовы матрицы и их все скалярные инварианты. Для таких матриц вековое уравнение в принятой знакопеременной форме имеет необходимо положительные скалярные коэффициенты  $k(B, t)$  вплоть до порядка  $r' = r = \text{rang } B$ . Кроме того, все  $n$  решений (собственных значений) – вещественные неотрицательные числа. Для совокупности  $n$  неотрицательных чисел  $\mu_i$ , причём  $r \leq n$  из них ненулевые, определим специальные характеристики – малые медианы (или средние алгебраические), большие медианы (или средние степенные):

$$\bar{m}_1 = \bar{M}_1 = \sum \frac{\mu_i}{n}, \quad (4)$$

$$\bar{m}_t = \sqrt[t]{s_t(\mu_i) / C_n^t} = \sqrt[t]{k(B, t) / C_n^t}, \quad (5)$$

$$\bar{M}_\theta = \sqrt[\theta]{S_\theta(\mu_i) / n} = \sqrt[\theta]{\text{tr } B^\theta / n}, \quad (6)$$

где черта сверху означает усреднение. Здесь  $s_t(\mu_i)$  – суммы Виета,  $S_\theta(\mu_i)$  – суммы Варинга,  $n$  – размер совокупности чисел или матрицы  $B$ ,  $t$  или  $\theta$  – порядок соответствующих средних величин,  $C_n^t$  – биномиальные коэффициенты Ньютона. Причём среднее арифметическое  $\bar{m}_1 = \bar{M}_1$  является пересечением множеств средних алгебраических и степенных.

Дополнительно: (5) выражает малые медианы через коэффициенты алгебраического уравнения, а (6) - малые медианы через следы матриц в (2).

При  $t > r$  малые медианы вырождаются в нуль, что имеет место при наличии нулевых исходных чисел. Если же таковые отсутствуют, то могут быть полезными *реверсивные* аналоги малых и больших медиан, которые определяются как

$$\bar{v}_1 = \bar{V}_1 = \left( \sum \frac{\mu_i}{n} \right)^{-1}, \quad (7)$$

$$\bar{v}_t = \sqrt[t]{s_t(\mu_i^{-1})/C_n^t} = \sqrt[t]{k(B^{-1}, t)/C_n^t}, \quad (8)$$

$$\bar{v}_\theta = \sqrt[\theta]{S_\theta(\mu_i^{-1})/n} = \sqrt[\theta]{\text{tr } B^{-\theta}/n}. \quad (9)$$

Они производятся как обращённые средние от обратных исходных чисел и также являются средними величинами. Например, если прямая медиана относится к косинусному инварианту, то реверсивная медиана относится к секансному инварианту, но обратна ему, как и должно быть для секанса. (Среднее геометрическое  $\bar{m}_n = \bar{v}_n$  является пересечением множеств средних алгебраических и их реверсивных аналогов.)

*Для совокупности  $n$  вещественных положительных чисел  $\langle \mu_i \rangle$ , из которых хотя бы одно число отличается от другого, имеет место генеральное неравенство средних величин, охватывающее всю область данной совокупности:*

$$\max \langle \mu_i \rangle = \bar{M}_\infty > \dots > \bar{M}_\theta > \dots > \bar{M}_1 = \quad (10)$$

$$= \bar{m}_1 > \dots > \bar{m}_t > \dots > \bar{m}_n = \quad (11)$$

$$= \bar{v}_n > \dots > \bar{v}_t > \dots > \bar{v}_1 = \quad (12)$$

$$= \bar{V}_1 > \dots > \bar{V}_\theta > \dots > \bar{V}_\infty = \min \langle \mu_i \rangle \quad (13)$$

( $t = 1, \dots, n$ ;  $\theta = 1, \dots, \infty$ ).

*Знак же равенства, причём сразу для всех медиан (средних величин), имеет место тогда и только тогда, когда  $\mu_1 = \dots = \mu_n$ . Если бы совокупность содержала  $s = n - r$  нулевых чисел, то цепь неравенств вырождалась справа, начиная с  $\bar{m}_{r+1}$ , а слева все медианы оставались ненулевыми. При этом в случае равенства ненулевых чисел между собой медианы изменялись бы как функции:*

$$\bar{m}_t = \mu \cdot \sqrt[t]{C_r^t/C_n^t}, \quad \bar{M}_\theta = \mu \cdot \sqrt[\theta]{r/n}.$$

Генеральное неравенство содержит как частные случаи неравенство Коши для средних арифметического и геометрического и его реверсивный аналог для средних гармонического и геометрического, неравенство Маклорена для средних алгебраических и его реверсивный аналог и неравенство Гёльдера для средних степенных и его реверсивный аналог [3, 47]. Для спектрально положительной матрицы (для которой  $\mu_1 > 0$ ) определим, в частности, арифметическую, геометрическую и гармоническую медианы:

$$\overline{m}_1 = \text{tr } B / n = \overline{M}_1, \quad (14)$$

$$\overline{m}_n = \sqrt[n]{\det B} = \overline{v}_n, \quad (15)$$

$$\overline{v}_1 = (\text{tr } B^{-1} / n)^{-1} = \overline{V}_1. \quad (16)$$

Если  $B = AA'$ , где  $A$  есть  $n \times m$ -матрица и, в частности,  $A = a$  есть  $n \times 1$ -вектор, то арифметическая медиана выражается через нормы Фробениуса и Евклида как

$$n \cdot \overline{m}_1(B) = \text{tr } B = \begin{cases} \|A\|_F^2, \\ \|a\|_E^2. \end{cases}$$

Для спектрально положительной матрицы ( $\mu_1 > 0$ ) в соответствии с вышеуказанным генеральным неравенством справедливы оценки:

$$\max \langle \mu_1^n \rangle \geq \text{tr } B^n / n \geq (\text{tr } B / n)^n \geq \det B \geq (\text{tr } B^{-1} / n)^{-n} \geq (\text{tr } B^{-n} / n)^{-1} \geq \min \langle \mu_1^n \rangle. \quad (17)$$

Дефекты этих неравенств тем меньше, чем ближе друг к другу все собственные значения матрицы. Равенство имеет место тогда и только тогда, когда матрица прямо пропорциональна единичной матрице. Очевидно, что предельные медианы совпадают с крайними собственными значениями:

$$\max \langle \mu_1 \rangle = \lim_{\theta \rightarrow \infty} \overline{M}_\theta, \quad (18)$$

$$\min \langle \mu_1 \rangle = \lim_{\theta \rightarrow \infty} \overline{V}_\theta. \quad (19)$$

Далее рассмотрим доказательство сформулированного выше генерального неравенства средних величин в целом и его анализ. Воспользуемся дифференциальным методом изучения экстремума. Определим скалярные функции для разности и для отношения соответствующих средних величин из совокупности  $n$  положительных чисел  $x_i$  ( $i = \overline{1, n}$ ), задающих в  $\langle \mathcal{A}^n \rangle$  радиус-вектор  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$  в первом квадранте единичного базиса:

$$r \begin{pmatrix} t \\ t+1 \end{pmatrix} (\mathbf{x}) = \overline{m}_t(\mathbf{x}) - \overline{m}_{t+1}(\mathbf{x}),$$

$$r \begin{pmatrix} 1 \\ n \end{pmatrix} (\mathbf{x}) = \overline{m}_1(\mathbf{x}) - \overline{m}_n(\mathbf{x}),$$

$$f \begin{pmatrix} t \\ t+1 \end{pmatrix} (\mathbf{x}) = \overline{m}_t(\mathbf{x}) / \overline{m}_{t+1}(\mathbf{x}),$$

$$f \begin{pmatrix} 1 \\ n \end{pmatrix} (\mathbf{x}) = \overline{m}_1(\mathbf{x}) / \overline{m}_n(\mathbf{x}),$$

$$R \begin{pmatrix} \theta+1 \\ \theta \end{pmatrix} (\mathbf{x}) = \overline{M}_{\theta+1}(\mathbf{x}) - \overline{M}_\theta(\mathbf{x}),$$

$$R \begin{pmatrix} \theta \\ 1 \end{pmatrix} (\mathbf{x}) = \overline{M}_\theta(\mathbf{x}) - \overline{M}_1(\mathbf{x}),$$

$$F \begin{pmatrix} \theta+1 \\ \theta \end{pmatrix} (\mathbf{x}) = \overline{M}_{\theta+1}(\mathbf{x}) / \overline{M}_\theta(\mathbf{x}),$$

$$F \begin{pmatrix} \theta \\ 1 \end{pmatrix} (\mathbf{x}) = \overline{M}_\theta(\mathbf{x}) / \overline{M}_1(\mathbf{x}).$$

Функции  $r$  и  $R$ , а также  $f$  и  $F$  имеют общее и единственное стационарное значение с аргументом-решением в форме центрального луча  $\langle \mathbf{b} \rangle$  – биссектрисы первого квадранта, соответствующее их нулевому градиенту:

$$r'(\mathbf{b}) = f'(\mathbf{b}) = R'(\mathbf{b}) = F'(\mathbf{b}) = \mathbf{0},$$

где  $\mathbf{b}$  – любая точка этой биссектрисы, то есть это решение

$$x_1 = \dots = x_n = b;$$

$$r(\mathbf{b}) = R(\mathbf{b}) = 0, \quad f(\mathbf{b}) = F(\mathbf{b}) = 1.$$

Функции принимают минимальные значения, так как матрицы Гессе точно на биссектрисе-решении – положительно полуопределённые ранга  $(n-1)$ :

$$\begin{aligned} r'' \begin{pmatrix} 1 \\ n \end{pmatrix} (\mathbf{b}) &= (n-1) \cdot r'' \begin{pmatrix} t \\ t+1 \end{pmatrix} (\mathbf{b}) = b \cdot f'' \begin{pmatrix} 1 \\ n \end{pmatrix} (\mathbf{b}) = b \cdot (n-1) \cdot f'' \begin{pmatrix} t \\ t+1 \end{pmatrix} (\mathbf{b}) = \\ &= R'' \begin{pmatrix} \theta+1 \\ \theta \end{pmatrix} (\mathbf{b}) = 1/(\theta-1) \cdot R'' \begin{pmatrix} \theta \\ 1 \end{pmatrix} (\mathbf{b}) = b \cdot F'' \begin{pmatrix} \theta+1 \\ \theta \end{pmatrix} (\mathbf{b}) = b/(\theta-1) \cdot F'' \begin{pmatrix} \theta \\ 1 \end{pmatrix} (\mathbf{b}) = \frac{n \cdot I - It}{n^2 \cdot b} = G, \end{aligned}$$

где  $I_t$  есть *тотально-единичная* матрица, все элементы которой равны 1. Главные миноры матрицы  $G$  порядка  $g$ :

$$\left(\frac{1}{n \cdot b}\right)^g \cdot \frac{n-g}{n} > 0 \quad \text{при } g < n.$$

Матрица Гессе вырождена вдоль биссектрисы – линейного подпространства размерности 1. Учитывая вышеуказанные стационарные значения функций, получаем:

$$r'', f'' \begin{pmatrix} t \\ t+m \end{pmatrix}(\mathbf{b}) = m \cdot r'', f'' \begin{pmatrix} t \\ t+1 \end{pmatrix}(\mathbf{b});$$

$$R'', F'' \begin{pmatrix} \theta+m \\ \theta \end{pmatrix}(\mathbf{b}) = m \cdot R'', F'' \begin{pmatrix} \theta+1 \\ \theta \end{pmatrix}(\mathbf{b}).$$

Этот анализ показывает, что на биссектрисе-решении  $\langle \mathbf{b} \rangle$ , во-первых, матрицы Гессе отношений соседних средних величин не зависят от порядка; во-вторых, они изменяются аддитивно с ростом интервала между порядками; в-третьих, они совпадают для функций отношений между соседними средними степенными и отношения между средними арифметическим и геометрическим. Для отношений соседних средних алгебраических эта же матрица делится на  $(n-1)$  равных частей. Но самое парадоксальное заключается в том, что матрица Гессе для функции отношения между средним степенным и средним арифметическим на биссектрисе неограниченно возрастает пропорционально порядку  $\theta$ . Хотя при  $\theta \rightarrow \infty$  в силу (18) эта же функция  $F$  стремится к отношению  $x_{\max}/M_1$ , изменяется непрерывно и на биссектрисе равна 1 (минимуму). Кроме того, матрица Гессе для функции отношения соседних средних степенных на биссектрисе даже при  $\theta \rightarrow \infty$  сохраняет постоянное значение. Хотя в силу (18) эта же функция  $F$  стремится к 1 независимо от аргумента, то есть к константе, для которой градиент и матрица Гессе нулевые. Эти, казалось бы, противоречивые факты объясняются влиянием соотношения бесконечно малого (отклонения аргумента от биссектрисы) и бесконечно большого (параметра  $\theta$ ). Вследствие чего в окрестности биссектрисы матрица Гессе терпит разрыв и становится нулевой. В свою очередь, функция  $F \begin{pmatrix} \theta \\ 1 \end{pmatrix}(\mathbf{x})$  при  $\theta \rightarrow \infty$  имеет постоянное значение 1, но с точностью до бесконечно малой зависит от аргумента, принимая абсолютный минимум (1) на биссектрисе, где  $F \begin{pmatrix} \theta+1 \\ \theta \end{pmatrix}(\mathbf{x})$  принимает сразу же это минимальное значение.

Более наглядно указанные закономерности можно продемонстрировать на модельной функции от одного скалярного аргумента, например:

$$F_1 \left[ \begin{matrix} \theta + 1 \\ \theta \end{matrix} \right] (x) = \sqrt{\frac{\theta + 1}{2} \frac{1 + x^{\theta + 1}}{2}} / \sqrt{\frac{\theta}{2} \frac{1 + x^\theta}{2}},$$

$$F_2 \left[ \begin{matrix} \theta \\ 1 \end{matrix} \right] (x) = \sqrt{\frac{\theta}{2} \frac{1 + x^\theta}{2}} / \frac{1 + x}{2} \quad (\text{при } x > 0, \theta \geq 2).$$

Здесь  $x \geq 1$  играет роль аргумента и максимального элемента из выборки  $\langle 1, x \rangle$ . При конечном  $\theta$ :

$$F_1(1) = F_2(1) = 1 = \min, \quad F_2(x) > F_1(x) > 1;$$

$$\frac{d F_1}{d x} (1) = \frac{d F_2}{d x} (1) = 0;$$

$$\frac{d^2 F_1}{d x^2} (1) = \frac{1}{4}, \quad \frac{d^2 F_2}{d x^2} (1) = \frac{\theta - 1}{4}, \quad \frac{d^2 F_2}{d x^2} (x) \geq \frac{d^2 F_1}{d x^2} (x) > 0.$$

При бесконечном  $\theta$ :

$$F_1(x) = 1 + \beta(x), \quad \beta(x) \rightarrow 0, \quad \beta(1) = 0; \quad F_2(1) = 1 = \min,$$

$$F_2 \left[ \begin{matrix} x > 1 \\ x < 1 \end{matrix} \right] = \begin{cases} 2x / (1 + x), \\ 2 / (1 + x); \end{cases}$$

$$\frac{d F_1}{d x} (x) = 0, \quad \frac{d F_2}{d x} (1) = 0, \quad \frac{d F_2}{d x} (1 \pm \alpha) = \pm \frac{1}{2} \quad (\alpha \rightarrow 0);$$

$$\frac{d^2 F_1}{d x^2} (1) = \frac{1}{4}, \quad \frac{d^2 F_1}{d x^2} \left[ \begin{matrix} x > 1 \\ x < 1 \end{matrix} \right] = 0,$$

$$\frac{d^2 F_2}{d x^2} (1) = \frac{\theta - 1}{4} \rightarrow \infty, \quad \frac{d^2 F_2}{d x^2} (1 \pm \alpha) = 0 \quad (\alpha \rightarrow 0).$$

Ввиду разрыва матрицы Гессе в окрестности биссектрисы можно сделать вывод, что трёхвалентная симметричная матрица третьих производных при  $\theta \rightarrow \infty$  должна быть на биссектрисе бесконечной, но в отрицательной области. Отметим также, что для аналогичных функций реверсивных средних величин все вышеизложенные закономерности остаются в силе, но знак перед матрицами Гессе меняется на противоположный, а формальный их вид сохраняется. То же происходит, если в функциях отношений средних величин поменять местами числитель и знаменатель. Таким образом, с учётом предельных формул

(18) и (19), доказательство и анализ генерального неравенства средних величин нами завершён. Далее рассмотрим отдельные возможности его применения в теории и технике решений алгебраических уравнений, в том числе векового уравнения квадратной матрицы.

### § 1.3. Предельный метод решения векового уравнения с вещественными корнями

Малые и большие медианы связаны системой модифицированных уравнений Ньютона и модифицированной рекуррентной формулой Варинга – Леверье, например *прямого* типа – аналог формулы (2), где при  $t > r \rightarrow \overline{m}_t = 0$ :

$$C_{n-1}^{t-1} \cdot (\overline{m}_t)^t = C_n^{t-1} \cdot (\overline{m}_{t-1})^{t-1} \cdot (\overline{M}_1)^1 - C_n^{t-2} \cdot (\overline{m}_{t-2})^{t-2} \cdot (\overline{M}_2)^2 + \dots \\ \dots + (-1)^{t-2} C_n^1 \cdot (\overline{m}_1)^1 \cdot (\overline{M}_{t-1})^{t-1} + (-1)^{t-1} \cdot (\overline{M}_t)^t,$$

где  $C_{n-1}^{t-1} = C_n^{t-1} - C_n^{t-2} + \dots + (-1)^{t-2} \cdot C_n^1 + (-1)^{t-1}$  (при равенстве  $\mu_i$ ).

Предельные формулы (18) и (19) могут использоваться для последовательного вычисления всех корней алгебраического уравнения при условии, что все они – вещественные. Кратность каждого корня может находиться в процессе сокращения. Однако целесообразно предварительно отделить кратные корни, используя 1-ю производную и алгоритм Евклида. С применением метода Штурма и априорных границ вещественных корней ( $\pm\infty$ ) устанавливают их вещественность. Кроме того, вещественные корни уравнения, как известно, удовлетворяют неравенству Маклорена для знакопеременной формы уравнения [27, с. 40]:

$$[-1 - \sqrt[h_1]{-\min k_j}] = \Delta^{(-)} < \mu_1 < \Delta^{(+)} = [1 + \sqrt[h_2]{-\min (-1)^j \cdot k_j}],$$

где  $\Delta^{(-)}$  – граница отрицательных корней,  $\Delta^{(+)}$  – граница положительных корней,  $h_1$  и  $h_2$  – индексы первых отрицательных коэффициентов  $k_j$  и  $(-1)^j \cdot k_j$ .

*Предельный метод* решения алгебраического уравнения сводится к следующему. Пусть уже известно, что корни уравнения – вещественные неотрицательные числа. В частности, это суть собственные значения неотрицательно определённой матрицы типа  $AA'$ . Первый этап – вычисление сумм Виета и характеристических сумм Варинга вплоть до порядка  $r$ . Например, для матриц используется рекуррентная формула Варинга – Леверье *прямого* типа (2), а для самостоятельного уравнения *обратного* типа, которая при  $\theta > r$  имеет вид:



$$S_\theta = s_1 \cdot S_{\theta-1} - s_2 \cdot S_{\theta-2} + \dots + (-1)^{r-2} \cdot s_{r-1} \cdot S_{\theta-r+1} + (-1)^{r-1} \cdot s_r \cdot S_{\theta-r} = \\ = F_\theta(S_1, \dots, S_r) = f_\theta(s_1, \dots, s_r),$$

$$\theta = r + 1, r + 2, \dots$$

Откуда далее последовательно вычисляются средние степенные:

$$\overline{M}_\theta = \sqrt[\theta]{S_\theta / r}.$$

Причём приближение к цели идёт именно снизу, согласно неравенству (10). Очевидно, что скорость процесса тем выше, чем более различны корни уравнения между собой. Подставив в вышеуказанную рекуррентную формулу предельное значение (18) и сократив общий множитель  $x^{\theta-n}$ , получим исходное уравнение как тождество. Именно поэтому на каком-то этапе вычисления обрываются из-за неминуемой ошибки округления. Так находят максимальный корень. Минимальный ненулевой корень, согласно (19), можно вычислять аналогично, используя *инверсионную* форму алгебраического уравнения, то есть поделив исходное уравнение на  $x^n$  и старший коэффициент  $a_n$ .

Если корни уравнения – точные рациональные числа, то в процессе последовательного приближения у результата неизбежно появляются цифровые периоды после некоторой значащей цифры. Исходя из этого вычисляется точное значение корня с проверкой по данному уравнению. *Иррациональные* корни вычисляются с заданной степенью точности. Таким образом, применяя соответствующий алгоритм, последовательно находят все корни этого алгебраического уравнения. Обратим внимание на то, что изложенный метод, близкий по предельной идее к методу Лобачевского–Греффе (1834г), по сути, тоже имеет глобальный характер. Все исходные расчётные характеристики в нём строго предопределены.

Если же уравнение имеет вещественные законоопределённые корни, то вначале сместим аргумент, например, в область положительных корней, но, по возможности, меньше – для большей скорости сходимости. Априори, как известно, вещественные собственные значения имеют вещественные симметричные матрицы  $S = S'$  и мнимые кососимметричные матрицы  $(iK)' = -iK$ , где  $K' = -K$  вещественные. Для вещественной  $B$  это могут быть соответствующие характеристические матрицы:

$$S_B = (B + B')/2, \quad K_B = (B - B')/2 \quad (B = S_B + K_B).$$

В случае  $S_B \cdot K_B = K_B \cdot S_B \leftrightarrow B \in \langle M \rangle$  – нормальная матрица. Тогда они вместе приводятся к диагональной форме. Их собственные

значения суммируются для суммы этих матриц. Следовательно, решая отдельные уравнения для  $S_M$  и  $-iK_M$  (последнее – биквадратное), можно получить также отдельно вещественные и сопряжённые мнимые части комплексных собственных значений матрицы  $M$ . Далее остаётся сделать подбор соответствующих пар путём проверки на вековом уравнении для  $M$ .

Аналогичный подход с использованием эрмитова сопряжения распространяется на комплексные матрицы. Среди них априори вещественные собственные значения имеют эрмитовы матрицы. Для комплексной эрмитово нормальной матрицы используется разложение:

$$H_B = (B + B^*)/2, \quad Q_B = (B - B^*)/2 \quad (B = H_B + Q_B = H_B + i \cdot H_Q),$$

$$H_B \cdot Q_B = Q_B \cdot H_B \leftrightarrow H_B \cdot H_Q = H_Q \cdot H_B \leftrightarrow B \in \langle N \rangle, \quad \text{где } N \cdot N^* = N^* \cdot N, \text{ и т.д.}$$

Таким образом, множество матриц, которые априори подходят для использования предельного метода, включает вещественные нормальные матрицы и комплексные эрмитово нормальные матрицы. Пусть для матрицы или для уравнения с вещественными корнями используется метод смещения. Тогда для знакопеременной формы уравнения нижняя граница отрицательных корней удовлетворяет неравенству:

$$\min \langle \mu_i \rangle > \Delta^{(-)} = -1 - \sqrt{1 - \min k_j}.$$

После подстановки  $x = y + \Delta^{(-)}$  получаем уравнение с положительными коэффициентами и корнями. (Проверяется методом Штурма в интервале  $+\infty \div 0$ .) Для матрицы преобразование смещения трактуется как

$$B \rightarrow \{B - \Delta^{(-)} \cdot I\}.$$

Альтернатива вышеуказанному методу смещения для матриц с вещественными знаконопределёнными собственными значениями: возведение матрицы в квадрат, далее вычисление квадратов собственных значений и затем подбор их знаков по вековому уравнению для исходной матрицы.

*В случае вещественности и положительности всех корней алгебраического уравнения максимальный корень в явной форме теоретически выражается как*

$$\max \langle \mu_i \rangle = \lim_{\theta \rightarrow \infty} \sqrt[\theta]{S_\theta / \Gamma}, \quad (20)$$

$$\text{где } S_{\infty} = \det \begin{vmatrix} 1 \cdot k_1 & -1 & 0 & 0 & \dots \\ -2 \cdot k_2 & k_1 & -1 & 0 & \dots \\ 3 \cdot k_3 & -k_2 & k_1 & -1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (-1)^{r-1} \cdot r \cdot k_r & (-1)^{r-2} \cdot k_{r-1} & (-1)^{r-3} \cdot k_{r-2} & (-1)^{r-4} \cdot k_{r-3} & \dots \\ 0 & (-1)^{r-1} \cdot k_r & (-1)^{r-2} \cdot k_{r-1} & (-1)^{r-3} \cdot k_{r-2} & \dots \\ 0 & 0 & (-1)^{r-1} \cdot k_r & (-1)^{r-2} \cdot k_{r-1} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

Согласно признаку Сильвестра, для положительной определённости вещественной симметричной или комплексной эрмитовой матрицы необходимо и достаточно, например, чтобы все главные миноры были положительными. Поскольку последний из миноров есть детерминант матрицы, то это означает и её несингулярность. С другой стороны, для неотрицательности тех же, но сингулярных матриц необходимо и достаточно, чтобы все коэффициенты векового уравнения вплоть до порядка  $r$  были положительными и при  $t > r$  нулевыми. Это следует из правила знаков Декарта и вещественности корней. Из вышесказанного можно сделать вывод, что элементы нормальных матриц содержат достаточно первоначальной информации, чтобы решить задачу об отыскании их собственных значений, сведя её к алгебраическому уравнению с положительными корнями, (что требуется для предельного метода). Решение аналогичной задачи для матриц более общего вида или для самостоятельного алгебраического уравнения при  $n > 4$  зависит от ответа на вопрос: “*Имеет ли вещественное алгебраическое уравнение комплексные сопряжённые корни или нет?*“. Выше было указано, что точный ответ на него всегда можно получить с помощью метода Штурма. Однако этот метод не даёт необходимых и достаточных условий, которым вообще должны удовлетворять коэффициенты уравнения для вещественности всех его корней или с учётом метода смещения – для положительности всех корней.

Первоочередное необходимое условие положительности и, вместе с тем, вещественности всех корней уравнения, согласно признаку Декарта, заключается в положительности всех его коэффициентов (для знакопеременной формы алгебраического уравнения). Однако

это не гарантирует, что не имеется пар комплексных сопряжённых корней. Например, при выборе ещё большего параметра смещения  $(-\Delta) = 1 + \max |k_j|$  можно гарантировать только то, что вещественные их части будут положительные [27, с. 39].

*Согласно цепи (11) генерального неравенства средних, для алгебраического уравнения с вещественными положительными корнями различные медианы могут совпадать, причём всегда вместе, тогда и только тогда, когда уравнение имеет биномиальную форму*

$$(x - \mu)^n = 0 \leftrightarrow \bar{m}_t = \mu.$$

При отличии хотя бы двух корней друг от друга коэффициенты уравнения уже не соответствуют биномиальному ряду, при этом действует неравенство (11). Например, совпадение каких-либо соседних медиан, обнуление коэффициентов до  $t = r$ , нарушение иерархии медиан – это отклонения, которые свидетельствуют о том, что уравнение с неотрицательными коэффициентами имеет комплексные сопряжённые корни.

*Поэтому более строгое необходимое условие вещественности и положительности всех корней уравнения заключается как в положительности всех его коэффициентов, так и в выполнении цепи (11) генерального неравенства или любого иного отрезка цепи из  $r$  медиан, например, для положительной определённости матрицы –  $r$ -цепи в (10).*

Заметим также, что для любой алгебраической медианы при условии  $1 \leq p < q$  в силу (10)

$$\sqrt[p]{\bar{m}_1(x_1^p, \dots, x_n^p)} < \sqrt[q]{\bar{m}_1(x_1^q, \dots, x_n^q)},$$

где  $(n - 1) \geq i \geq 1$  и хотя бы два элемента различны, а количество ненулевых элементов больше  $i$ .

## § 1.4. Структура и основные свойства скалярных и матричных характеристических коэффициентов

Скалярные характеристические коэффициенты любого порядка  $t$  для матрицы  $B$ , например, согласно (5), однозначно выражаются через её собственные значения  $\mu$ , как суммы Виета. Поэтому, как и  $\mu_i$ , они не зависят от линейного преобразования базиса и матрицы  $B$ . Используя клеточно-треугольную  $L_\mu$  или жорданову  $J_\mu$  каноническую форму для  $B$ , можно каждой  $n \times n$ -матрице поставить в однозначное соответствие пару характеристических матриц – простую и нильпотентную:

$$B = P_B + O_B \quad (B = T_1 \cdot L_\mu \cdot T_1^{-1} = T_2 \cdot J_\mu \cdot T_2^{-1}) \quad (21)$$

Матрицы  $B$  и  $P_B$  имеют одинаковые собственные значения  $\mu_1$  и их алгебраические кратности, одно и то же вековое уравнение. Как известно, у нильпотентной матрицы все скалярные характеристические коэффициенты суть нулевые. Но  $P_B \cdot O_B$  и  $O_B \cdot P_B$  – также нильпотентные. Отсюда для скалярных коэффициентов имеем формулы:

$$k(\{P_B + O_B\}, t) = k(P_B, t) = k(B, t), \quad (22)$$

$$k(\{P_B \cdot O_B\}, t) = k(\{O_B \cdot P_B\}, t) = k(O_B, t) = 0. \quad (23)$$

Степень нильпотентности для  $O_B$  равна  $j$  при максимальной степени  $(j+1)$  множителей  $-B_1 = \mu_1 I - B$  в минимальном аннулирующем многочлене от  $B$ , или при максимальном размере  $(j+1) \times (j+1)$  её жордановой субклетки. *С точки зрения структуры* согласно Леверье скалярные коэффициенты порядка  $t$  есть сумма всех диагональных миноров матрицы этого порядка.

Далее с учётом изначальной формулы резольвенты (1) рассмотрим свойства матричных характеристических коэффициентов  $K_1$  и  $K_2$ , а также установим их структуру и взаимосвязь со скалярными коэффициентами. Из (1) непосредственно вытекают тождественные ей формулы:

$\det(B + \varepsilon I) \cdot I = (B + \varepsilon I) \cdot (B + \varepsilon I)^v$ , или, что то же самое:

$$k_B(\varepsilon) \cdot I = (B + \varepsilon I) \cdot K_B(\varepsilon), \quad (24)$$

$$\sum_{t=0}^n \varepsilon^{(n-t)} [k(B, t) \cdot I - B \cdot K_1(B, t-1) - K_1(B, t)] = Z,$$

где  $Z$  – нулевая матрица.

Во-первых, отсюда следует, что в тождестве (24) возможна замена скалярного параметра  $\varepsilon$  на  $n \times n$ -матричный параметр  $E$ , коммутирующий с  $B$ . При этом тождество сохраняется:  $k_B(E) = (B + E) \cdot K_B(E)$ . При такой замене оба многочлена преобразуются в соответствующие матричные формы. *В частности, при  $E = -B$  из последнего всего ма просто следует теорема Гамильтона – Кэли:  $k_B(-B) = Z$ , причём здесь для знакопеременной формы исходного скалярного многочлена от  $\varepsilon = -\mu$ . Но при  $E = +B$ :  $k_B(B) = 2B \cdot K_B(B)$  и т. д.* Во-вторых, ввиду произвольности параметра  $\varepsilon$  отсюда следует матричная рекуррентная формула Сурьё [61]:

$$K_1(B, t) = -B \cdot K_1(B, t-1) + k(B, t) \cdot I, \quad (25)$$

где исходно  $k(B, 0) = 1$ ,  $K_1(B, 0) = I$  – из (1). Пусть, по определению,  $K_1(B, t)$  и  $K_2(B, t) = B \cdot K_1(B, t-1)$  – характеристические матричные коэффициенты 1-го и 2-го рода. Для последних  $K_2(B, 0) = Z$ ,  $K_2(B, 1) = B$ . Учитывая это, (25) приводится к форме

$$K_1(B, t) + K_2(B, t) = k(B, t) \cdot I. \quad (26)$$

Эта простая формула выражает единую связь между собой всех трёх характеристических коэффициентов для любой квадратной матрицы. В результате последовательного повторения (25) и с учётом начальных условий матричные характеристические коэффициенты выражаются многочленами от  $B$  (здесь в знакопостоянной форме) :

$$\left. \begin{aligned} K_1(B,t) &= \sum_{\theta=0}^t k(B,t-\theta) \cdot (-B)^\theta, \\ K_2(B,t) &= - \sum_{\theta=1}^t k(B,t-\theta) \cdot (-B)^\theta. \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

В силу этого они коммутативны с  $B$  и друг с другом. Из (27) с учётом (2), то есть метода Леверье, следует *скалярная* формула Сурьё [61]:

$$k(B,t) = \frac{1}{n-t} \cdot \text{tr } K_1(B,t) = \frac{1}{t} \cdot \text{tr } K_2(B,t). \quad (28)$$

С целью вычисления  $B^{-1}$  Сурьё в 1947г предложил алгоритм последовательного расчёта *всех* характеристических коэффициентов, начиная с  $t = 1$ , используя (25) и (28), но в его краткой статье, к сожалению, была опубликована сводка результатов. В 1948г Фаддеев [45], используя (2), пришёл независимо к тем же результатам и алгоритму; при этом он связал коэффициенты  $k$  и  $K_1$  с производящей резольвентой (1). В итоге из (27) и теоремы Гамильтона – Кэли следовало  $K_1(B,n) = k_B(-B) = Z$ , а из (26) следовало, что

$$K_2(B,n) = B \cdot K_1(B,n-1) = k(B,n) \cdot I = \det B \cdot I = B \cdot B^V.$$

Если матрица несингулярная, то, умножая обе части на  $B^{-1}$ , имеем:

$$B^{-1} = \frac{K_1(B,n-1)}{k(B,n)}$$

(алгоритмический метод Сурьё – Фаддеева для совместного вычисления коэффициентов  $k$  и  $K_1$  порядков  $t$  и обратной матрицы). Объединяя уже установленные значения матричных коэффициентов, можно записать:

$$\left. \begin{aligned} K_1(B,0) &= I, & K_2(B,0) &= Z, \\ K_1(B,1) &= \text{tr } B \cdot I - B, & K_2(B,1) &= B, \\ \dots & & & \\ K_1(B,n-1) &= B^V, & K_2(B,n-1) &= \text{tr } B^V \cdot I - B^V, \\ K_1(B,n) &= Z, & K_2(B,n) &= \det B \cdot I. \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

Предпоследняя строка верна, но получена пока для несингулярной матрицы. Логично далее определить порядок коэффициентов, при котором происходит обнуление цепи (29) или алгоритма Сурьё – Фаддеева.

Из формул (26) и (28) для сингулярной матрицы  $B$  следует, что матричные коэффициенты 1-го и 2-го рода обнуляются только вместе и окончательно. Это событие должно происходить при некотором порядке  $\gamma'' \geq \gamma' (\gamma \geq \gamma'')$  где  $\gamma'$  – *максимальный* порядок, выше которого обнуляются все скалярные коэффициенты (ранее определённый как 1-й рок матрицы). Соответственно порядок обнуления матричных характеристических коэффициентов, а именно  $\gamma''$ , определяется как 2-й рок сингулярной матрицы. (Для несингулярной матрицы эти понятия значения не имеют.)

Неравенство  $\gamma' \leq \gamma$ , как известно, устанавливается только из структуры скалярных коэффициентов (это есть сумма всех диагональных миноров порядка  $t$ ). Аналогично, положение 2-го рока относительно  $\gamma'$  и  $\gamma$  можно установить только исходя из структуры матричных коэффициентов и которую поэтому нужно найти. После этого можно будет установить взаимоотношение основных трёх параметров сингулярности матрицы, а также показатель степени собственной матрицы  $\{B - \mu I\}$  в минимальном аннулирующем многочлене. Кроме того, искомая структура интересна ещё тем, что через коэффициенты высшего порядка далее весьма просто и явно выражаются проекторы, квазиобратные и модальные матрицы.

Для означенной цели воспользуемся *дифференциальным методом*. Чтобы показать суть метода, вначале установим структуру скалярных коэффициентов матрицы. Хотя вывод их структуры прямым способом хорошо известен и описан, например, в [14, с. 78]. Идея метода состоит в том, чтобы находить коэффициенты частным дифференцированием детерминанта, полагая, что все элементы матрицы формально различны.

Пусть  $b_{i_1 j_1}, \dots, b_{i_m j_m}$  – произвольная совокупность  $m$  образующих элементов  $n \times n$ -матрицы  $B$  ( $1 \leq m \leq n$ ), то есть для которых выполняются требования  $i_p \neq i_q$  и  $j_p \neq j_q$ . Коэффициент при их произведении типа

$$\prod_{k=1}^m b_{i_k j_k}$$

в разложении  $\det B$  определяется *частным дифференцированием* как

$$\frac{\partial^m \det B}{\partial b_{i_1 j_1} \dots \partial b_{i_m j_m}} = (-1)^{\sum_{k=1}^m (i'_k + j'_k)} \cdot \left\{ \frac{\text{lig } i_1, \dots, i_m \notin}{\text{col } j_1, \dots, j_m \notin} \text{minor } (n-m) B \right\}, \quad (30)$$

где  $i'_k$  и  $j'_k$  – новые (кроме 1-го) индексы  $b_{i_k j_k}$  в последовательности  $m$  субматриц, образуемых из  $n \times n$ -матрицы  $B$  при вычёркивании строк  $\text{lig } i_k$  и столбцов  $\text{col } j_k$  вместе с образующим элементом  $b_{i_k j_k}$ . ( $k = 1, \dots, m$ ). В фигурных скобках обозначен минор матрицы  $B$  порядка  $(n-m)$ , т. е. это есть детерминант конечной субматрицы, размера  $(n-m) \times (n-m)$ , образуемой из матрицы  $B$  после вычёркивания всех этих строк и столбцов. Минор порядка  $(n-m)$  в (30) своеобразно обобщает понятие *адьюнкта*.

Далее вычислим полностью обратную матрицу (резольвенту  $B$ ) в (1)

$$(B + \varepsilon I)^{-1} = \frac{(B + \varepsilon I)^V}{\det(B + \varepsilon I)}. \text{ Напомним (см. начало главы), что знаменатель}$$

есть скалярный многочлен  $k_B(\varepsilon)$ , т. е. многочлен степени  $n$  от числового параметра  $\varepsilon$  с искомыми далее скалярными коэффициентами  $k(B, t)$ ; числитель – матричный многочлен  $K_B(\varepsilon)$ , т. е. многочлен степени  $(n - 1)$  от параметра  $\varepsilon$  с искомыми далее матричными коэффициентами  $K_1(B, t)$ .

**Вначале найдём знаменатель и соответственно  $k(B, t)$ .**

В силу (30) коэффициент при  $\prod_{k=1}^{n-t} (b_{i_k i_k} + \varepsilon)$  в  $\det(B + \varepsilon I)$  равен

$$\left\{ \frac{(i_1 i_1), \dots, (i_{n-t} i_{n-t}) \notin}{D\text{-minor}(t)} (B + \varepsilon I) \right\}. \text{ А именно, это есть диагональный минор}$$

матрицы  $(B + \varepsilon I)$  порядка  $t$ , не содержащий в субматрице указанных (по природе образующих) диагональных элементов  $(i_k i_k)$  матрицы  $(B + \varepsilon I)$  после вычёркивания строк и столбцов с индексами  $i_k$ . Количество таких обоюдных произведений и диагональных миноров для данного  $t$  есть  $C_n^t$ . Поскольку только  $(i_k i_k)$  содержат параметр  $\varepsilon$ , то полагая в минорах  $\varepsilon = 0$ , имеем коэффициент  $k(B, t)$  при  $\varepsilon^{n-t}$  в скалярном многочлене  $k_B(\varepsilon)$  как сумму всех  $C_n^t$  диагональных миноров  $B$  порядка  $t$ , причём  $k(B, 0) = 1$ , и  $\text{gdet} = 0, 1, \dots, n-1$ . Структура скалярных коэффициентов подтверждена.

**Далее найдём числитель и соответственно  $K_1(B, t)$  и  $K_2(B, t)$ .**

Числитель  $K_B(\varepsilon)$  есть матрица, у которой диагональные элементы суть скалярные многочлены от  $\varepsilon$  степени  $(n - 1)$ , а недиагональные элементы – скалярные многочлены от  $\varepsilon$  степени  $(n - 2)$ . Эта матрица разлагается в многочлен от  $\varepsilon$  степени  $(n - 1)$  с матричными коэффициентами вида:

$$\sum_{t=0}^n K_1(B, t) \cdot \varepsilon^{n-t-1}, \text{ где } K_1(B, 0) = I. \text{ Элемент (pp) матрицы } (B + \varepsilon I)^V \text{ равен}$$

$$\text{Ad}_{pp}(B + \varepsilon I) = \left\{ \frac{(pp) \notin}{D\text{-minor}(n-1)} (B + \varepsilon I) \right\} = \frac{\partial \det(B + \varepsilon I)}{\partial (b_{pp} + \varepsilon)}, \text{ с учётом (30),}$$

где  $\text{Ad}_{pp}$  – адьюнкта элемента  $(pp) = (b_{pp} + \varepsilon)$  в  $(B + \varepsilon I)$ . В разложении минора в результате частного  $(n - t - 1)$  дифференцирования (как выше) по элементам  $(i_k i_k)$ , полагая в минорах порядка  $t$  формально  $\varepsilon = 0$ , имеем коэффициент при  $\varepsilon^{n-t-1}$ , т. е. диагональный элемент  $(pp)$  для  $K_1(B, t)$ :

$$(pp)\{K_1(B, t)\} = \sum_{C_{n-1}^t} \text{Ad}_{p'p'} \left\{ \frac{(pp) \in}{D\text{-minor}(t+1)} B \right\} = \sum_{C_{n-1}^t} \left\{ \frac{(pp) \notin}{D\text{-minor}(t)} B \right\},$$

где  $p'$  – новые индексы строк и столбцов  $(pp)$  в получаемых диагональных минорах. В свою очередь, элемент  $(pq)$  матрицы  $(B + \varepsilon I)^V$  равен



$$\text{Ad}_{\text{qp}}(B + \varepsilon I) = (-1)^{p+q} \cdot \left\{ \frac{(qp) \notin, (pq) \in}{\text{Dh-minor}(n-1)} (B + \varepsilon I) \right\} = \frac{\partial \det(B + \varepsilon I)}{\partial b_{\text{qp}}},$$

с учётом (30) в частной производной, так как  $(qp)$  отсутствует. Dh-minor обозначает здесь *гиподиагональный минор*. По определению, он получен с дифференцированием по одному недиагональному элементу (как при взятии для него адьюнкты), — тут именно по  $b_{\text{qp}}$ , и из-за этого теряет пару

$(b_{\text{pp}} + \varepsilon)$  и  $(b_{\text{qq}} + \varepsilon)$ . В силу (30) коэффициент при  $\prod_{k=1}^{n-t-1} (b_{i_k i_k} + \varepsilon)$  в разложении гиподиагонального минора (с учётом того, что порядок выполнения частного дифференцирования не имеет значения) равен

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^{n-t-1} \left\{ \frac{(qp) \notin, (pq) \in}{\text{Dh-minor}(n-1)} (B + \varepsilon I) \right\}}{\partial (b_{i_1 i_1} + \varepsilon) \dots \partial (b_{i_{n-t-1} i_{n-t-1}} + \varepsilon)} = \\ & = \frac{\partial \left[ \frac{\partial^{n-t-1} \det(B + \varepsilon I)}{\partial (b_{i_1 i_1} + \varepsilon) \dots \partial (b_{i_{n-t-1} i_{n-t-1}} + \varepsilon)} \right]}{\partial b_{\text{qp}}} = \\ & = \text{Ad}_{\text{q'p'}} \left\{ \frac{(i_1 i_1), \dots, (i_{n-t-1} i_{n-t-1}) \notin}{\text{D-minor}(t+1)} (B + \varepsilon I) \right\}. \end{aligned}$$

Полагая в этих минорах порядка  $t$  формально  $\varepsilon = 0$ , имеем коэффициент при  $\varepsilon^{n-t-1}$ , или элемент  $(pq)$  для  $K_1(B, t)$  как полную сумму слагаемых:

$$\begin{aligned} (pq) \{K_1(B, t)\} &= \sum_{C_{n-2}^{t-1}} \text{Ad}_{\text{q'p'}} \left\{ \frac{(pq) \in}{\text{D-minor}(t+1)} B \right\} = \\ &= \sum_{C_{n-2}^{t-1}} (-1)^{p''+q''+1} \cdot \left\{ \frac{(pq) \in}{\text{Dh-minor}(t)} B \right\}. \end{aligned}$$

Индексы одного и того же элемента  $b_{\text{pq}}$  в диагональном миноре порядка  $(t+1)$  и в гиподиагональном миноре порядка  $t$  связаны соотношением:  $p' + q' = p'' + q'' + 1$ . Матричные коэффициенты 2-го рода выражаются через (26). Структура матричных коэффициентов установлена.

Итак, в сравнении со скалярными коэффициентами матричные коэффициенты в структуре, помимо *диагональных* миноров, дополнительно содержат *гиподиагональные* миноры и тоже не содержат прочих миноров (последние для  $B$  существуют при ранге  $r < n-1$ ). Это обстоятельство определяет местоположение 2-го рока  $r''$  относительно  $r'$  и  $r$ .

А именно 2-й рок не может быть меньше 1-го рока в силу (28). Но он может быть больше его, в том числе на несколько единиц вплоть до величины ранга, для чего достаточно, чтобы имелся один ненулевой гиподиагональный минор порядка  $r'' > r'$ . Из структуры же видно, что 2-й рок не может быть больше ранга. Но он может быть меньше его (при условии  $r' < r$ ), в том числе на несколько единиц вплоть до  $r'$ , для чего достаточно, чтобы имелся ненулевой прочий минор порядка  $r > r''$ .

*Следовательно, из структуры скалярных и матричных характеристических коэффициентов явно следует фундаментальное неравенство, связывающее основные параметры сингулярности матрицы:*

$$0 \leq r' \leq r'' \leq r \leq n. \quad (31)$$

Случай  $r' = 0$  соответствует нильпотентной матрице. В свою очередь, случай  $r'' = 0$  соответствует нулевой матрице. Если же она ненулевая, то  $r'' \geq 1$ , так как  $K_2(B,1) = B$ . Поэтому также  $r = 1 \leftrightarrow r'' = 1$ . Последний особый случай:  $r = n - 1 \leftrightarrow r'' = n - 1$ , так как  $K_1(B, n - 1) = B^n - \text{присоединённая матрица}$ , в которой фигурируют все миноры ранга  $(n - 1)$ . Найденная структура подтверждает (29), а также (28) и через (27) рекуррентную формулу Варинга – Левьерье (2). Заметим, что именно порядок  $r''$  является границей для обрыва алгоритма Сурьё – Фаддеева. Второй рок (наряду с другими параметрами сингулярности) для исходной  $B$  и для любой её собственной  $B_i$  является инвариантом линейного преобразования и неотъемлемой характеристикой сингулярной матрицы.

### § 1.5. Минимальный аннулирующий многочлен от матрицы

Одним из приложений полученных выше результатов является установление точной формулы для минимального аннулирующего многочлена. Пусть  $\mu_1 = 0$  и  $\mu_i$  ( $i = \overline{1, q}$ ) – собственные значения некоторой сингулярной матрицы  $B$ ;  $s_i' = (n - r_i')$  суть их алгебраические кратности (индекс 1 у параметров сингулярной матрицы  $B$  в дальнейшем часто опускается, чтобы отметить факт её сингулярности). Например, это есть любая собственная матрица  $B_i = B - \mu_i \cdot I$ . Согласно (27) и теореме Гамильтона – Кэли с учётом разложения на простые множители, имеем:

$$\begin{aligned} K_1(B, n) &= \sum_{t=0}^n (-B)^{n-t} \cdot k(B, t) = (-B)^{s'} \cdot \sum_{t=0}^{r'} (-B)^{r'-t} \cdot k(B, t) = \\ &= (-B)^{s'} \cdot K_1(B, r') = (-B)^{s'} \cdot \prod_{i=2}^q (\mu_i I - B)^{s_i'} = (-B)^{s'} \cdot \prod_{i=2}^q (-B_i)^{s_i'} = Z, \quad (32) \end{aligned}$$

где скалярные коэффициенты суть суммы Виета от  $\mu$  того же порядка  $t$ . По сути это есть нулевой характеристический многочлен от матрицы  $B$ .

С другой стороны, все характеристические коэффициенты порядка  $r'$  всегда ненулевые. Поэтому далее имеем:

$$\left. \begin{aligned} K_1(B, r') &= \prod_{i=2}^q (\mu_i I - B)^{s_i'} \neq Z, \\ k(B, r') &= \prod_{i=2}^q \mu_i^{s_i'} \neq 0. \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

Из рекуррентной формулы Сурьё (25) в интервале  $r' < t \leq r''$  следует справедливость соотношений:

$$K_1(B, t) = (-B)^{t-r'} \cdot K_1(B, r') = -K_2(B, t) \neq Z \quad (34)$$

(нильпотентные матричные коэффициенты).

Далее при превышении критического порядка на 1 имеем:

$$\begin{aligned} K_1(B, r'' + 1) &= (-B)^{r''-r'+1} \cdot K_1(B, r') = (-B)^{r''-r'+1} \cdot \prod_{i=2}^q (\mu_i I - B)^{s_i'} = \\ &= Z = (-B)^{r''-r'+1} \cdot \prod_{i=2}^q (\mu_i I - B)^{s_i^0} = (-B)^{s^0} \cdot \prod_{i=2}^q (-B_i)^{s_i^0} = \prod_{i=1}^q (-B_i)^{s_i^0}, \end{aligned} \quad (35)$$

где  $s_i^0$  – кратность собственного значения  $\mu_i$  для  $B$  в её минимальном аннулирующем многочлене (35), или аннулирующая кратность этого  $\mu_i$ . Вместе с тем имеем обязательно ненулевой многочлен для  $B$ :

$$(-B)^{r''-r'} \cdot \prod_{i=2}^q (-B_i)^{s_i^0} \neq Z.$$

Следовательно,

$$\left. \begin{aligned} s^0 &= r'' - r' + 1, \\ s_i^0 &= r_i'' - r_i' + 1. \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

Формулы (36) дают точные значения аннулирующих кратностей, или показателей степеней собственных матриц в виде  $-B_i = \mu_i I - B$  в минимальном аннулирующем многочлене от матрицы  $B$ . Эти кратности подчиняются классическому неравенству  $1 \leq s_i^0 \leq s_i'$  [30, с.124], так как  $r_i' \leq r_i''$  и имеет место (32). Подставляя в него значения из (36), получаем слабое неравенство  $r_i'' \leq n - 1$ . Следовательно, указанное классическое неравенство для сингулярной матрицы  $B$  можно усилить сверху, а именно, как:

$$1 \leq s_i^0 \leq r_i - r_i' + 1 \leq s_i'. \quad (37)$$

Теперь видно, что если, наоборот, выразить неизвестный 2-й рок через известную аннулирующую кратность по (36), то тогда не получилось бы ограничения  $r'' \leq r$ . Поэтому 1-й и 2-й рок являются первичными понятиями для сингулярной матрицы, а аннулирующая кратность – вторичное понятие. Равенства сверху в (37) имеют место сначала при  $r_i'' = r_i$  и затем при  $r_i'' = n - 1 = r_i \geq r_i'$ . Далее рассмотрим: при каких условиях имеет место равенство в (37) снизу, или  $r_i' = r_i''$ . Для этого воспользуемся классическим неравенством Сильвестра [27, с.394]

$$\min(r_1, r_2) \geq \text{rang } \{C_2 \cdot C_1\} \geq r_1 + r_2 - n.$$

Для произведения нескольких матриц или для степеней матрицы лучше перейти к сингулярности вместо ранга. Тогда общее неравенство выражается лаконично с характеристиками, независящими от n:

$$\max(\text{sing } C_i) \leq \text{sing } \prod_{i=k}^1 C_i \begin{cases} \leq n, \\ \leq \sum_{i=1}^k \text{sing } C_i; \end{cases} \quad (38)$$

$$\text{sing } C \leq \text{sing } C^h \begin{cases} \leq n, \\ \leq h \cdot \text{sing } C, \end{cases} \quad (39)$$

где  $h$  – целое положительное число.

Благодаря применению сингулярностей вместо рангов непосредственно видно, что в правой нижней части (38) знак равенства имеет место в очевидном и полезном для применения случае:

$$\langle \ker C_i \rangle \subset \langle \text{im } \prod_{j=i-1}^1 C_j \rangle, \quad i = \overline{2, k}, \quad \text{и } \langle \ker C_i \rangle \oplus \langle \text{im } C_i \rangle \equiv \langle \mathcal{A}^n \rangle.$$

В частности, для попарно коммутативных степенных матриц  $C_i = B_i^{h_i}$  это тождественно условию:

$$\langle \ker B_i^{h_i} \rangle \cap \langle \ker B_j^{h_j} \rangle \equiv \langle 0 \rangle.$$

Тогда из (38) имеем:

$$n = \text{sing } \prod_{i=1}^q B_i^{h_i \geq s_i^0} = \sum_{i=1}^q \text{sing } B_i^{h_i \geq s_i^0}.$$

С другой стороны,  $\text{rang } B_i^h \geq r_i'$ , или  $\text{sing } B_i^h \leq s_i'$ , так как алгебраическая кратность и 1-й рок для степеней матрицы не изменяются. С учётом того, что  $\sum_{i=1}^q s_i' = n$ , отсюда следует:

$$\left. \begin{array}{l} \text{sing } B_i^{h_i < s_i^0} < s_i', \\ \text{sing } B_i^{h_i \geq s_i^0} = s_i'. \end{array} \right\} \quad (40)$$

Из  $\text{sing } B_i^{s_i^0} = s_i'$  и (39) следуют неочевидные частные неравенства:

$$\left. \begin{array}{l} s_i^0 \cdot s_i \geq s_i' \quad (s_i^0, s_i \leq s_i'), \\ s^0 \cdot s \geq s' \quad (s^0, s \leq s'). \end{array} \right\} \quad (41)$$

Набор значений сингулярностей или рангов степеней матрицы в (40), как известно [30, с.143], однозначно определяет набор жордановых субклеток в ультраинвариантной клетке размера  $s_i' \times s_i'$ , а критический показатель степени матрицы  $B$  определяет размер максимальной жордановой субклетки  $s_i^0 \times s_i^0$ . Если  $s_i^0 = 1$ , или  $r_i' = r_i''$ , то из (41) вытекает  $s_i = s_i'$ . И наоборот  $s_i = s_i' \rightarrow r_i' = r_i'' = r_i$ . Следовательно,

$$\left. \begin{array}{l} s_i^0 = 1 \leftrightarrow r_i' = r_i'' \leftrightarrow r_i' = r_i, \\ s^0 = 1 \leftrightarrow r' = r'' \leftrightarrow r' = r. \end{array} \right\} \quad (42)$$

Заметим, что известное классическое утверждение, получаемое из жордановой формы [30, с.143]:

$$"(s_i^0 = 1 \xleftrightarrow{i=1, q} s_i = s_i') \leftrightarrow B \in \langle P \rangle - \text{простая матрица}"$$

непосредственно следует из (42), но не детализировано, как здесь, по каждому собственному подпространству. Другой крайний случай, согласно (41), имеет вид:

$$s_i = 1 \leftrightarrow s_i^0 = s_i' \leftrightarrow r_i'' = n - 1 = r_i. \quad (43)$$

### § 1.6. Нуль-простые и нуль-дефектные сингулярные матрицы

Матрица, соответствующая  $r' = r$ , определяется здесь как *нуль-простая* и далее иногда обозначается как  $B_r$ . То есть она обладает свойствами простой матрицы на собственном подпространстве  $\langle \ker B_r \rangle \equiv \langle \ker B_r^h \rangle$ , соответствующем её нулевому собственному значению.

*Некоторая квадратная матрица является нуль-простой тогда и только тогда, когда справедливо любое из утверждений:*

- 1) 1-й рок равен 2-му року,
- 2) 1-й рок равен рангу,
- 3) ранг квадрата матрицы равен рангу матрицы,
- 4) пересечение ядра и образа матрицы есть нулевой элемент,
- 5) ядро и образ матрицы образуют прямую сумму.

Последнее свойство обуславливает существование для нуль-простой матрицы характеристических аффинных проекторов (см. далее в гл. 2).

Матрица, для которой  $r' < r$ , определяется здесь как *нуль-дефектная*. Очевидно,  $\text{rang } B^{s^0} = r_B' = \min \text{rang } B^h$ . Согласно (35), для неё существует нильпотентная матрица, коммутирующая с  $B$  (см. подробнее в § 2.2.):

$$O_1 = \{K_1(B^{s^0}, r_B') / k(B^{s^0}, r_B')\} \cdot B; \quad O_1^{s^0} = Z, \quad [(I \pm O_1)^{s^0} - I]^{s^0} = Z. \quad (44)$$

В свою очередь, нильпотентная матрица из (21) является суммой всех собственных матриц  $O_i$ , где  $i = \overline{1, q}$ . Для этой нильпотентной матрицы  $r' = 0$ ,  $r'' = s^0 - 1$ ;  $s^0$  – степень нильпотентности. Согласно (39), её ранг подчиняется неравенствам:

$$s^0 - 1 = r'' \leq \text{rang } O_1 \leq n \cdot [r'' / (r'' + 1)] = n \cdot [(s^0 - 1) / s^0] \leq n - 1, \quad (45)$$

$$\left. \begin{array}{l} 0 \leq \\ [n - s^0 \cdot (n - r)] \leq \end{array} \right\} \text{rang } O_1 \leq r. \quad (46)$$

Из неравенства (37) следуют более точные оценки параметров сингулярности:

$$(n - 1) - (s_i' - s_i^0) \leq r_i \leq n - 1, \quad (47)$$

$$\left. \begin{array}{l} s_i \leq s_i' - (s_i^0 - 1), \\ s_i^0 \leq s_i' - (s_i - 1). \end{array} \right\} \quad (48)$$

Согласно жордановой форме [28, ч.2], параметр  $(s_i^0 - 1) = r_i'' - r_i'$  выражает максимальное количество единиц на прилегающей диагонали, идущих подряд в пределах  $i$ -й ультраинвариантной клетки. Общее число единиц выражает параметр  $(s_i' - s_i) = r_i - r_i'$ . Это трактует неравенства (47) и (48), а также 1-й и 2-й рок. В свою очередь, неравенство (41) тоже иллюстрируется жордановой формой. А именно удлинним на один нулевой элемент, например снизу, прилегающую диагональ  $i$ -й клетки. Получается квазидиагональ из  $s_i'$  элементов 0 или 1, выходящая за пределы клетки и оканчивающаяся нулём. При заданном  $s_i^0$  максимум общего количества единиц на квазидиагонали обеспечивает её равномерная разбивка на суботрезки длиной  $s_i^0$  с возможным остатком деления  $s_i' / s_i^0$ . Каждый из суботрезков состоит из единиц и

оканчивается нулём, в том числе неполный при остатке есть последний суботрезок. Поэтому  $\min(s_i) = [s'_i/s_i^0]$  – целая часть указанного отношения. Равенство в (41) возможно только при целом отношении. Из неравенств (41) следуют тождественные им неравенства:

$$(n - r_i) \cdot (r_i'' - r_i') \geq r_i - r_i', \quad (49)$$

$$r_i' + [(s'_i - s_i)/s_i] \leq r_i'' \leq (n - 1) - [(s'_i - s_i^0)/s_i^0]. \quad (50)$$

Поэтому (41), (49) и (50) эффективны для оценок  $r_i''$  и  $s_i^0$  только при  $r_i'' < r_i$ . При этом условии  $s_i < s'_i > s_i^0$ ,  $s'_i > 3$ ,  $s_i > 2$ ,  $s_i^0 > 1$ ,  $n > 3$ .

Определим параметр  $(r_i - r_i'')$  как *i*-й дифферент матрицы. Если  $r_i'' < r_i$ , то дефектная матрица – *нуль-дифферентная*. Из (49) следует, что максимальный дифферент как частный, так и общий составляет  $(\sqrt{n} - 1)^2 \leq n - 3$ , что достижимо, когда  $n$  есть квадрат целого числа. Максимум достигается при  $r = n - \sqrt{n}$ ,  $r'' = \sqrt{n} - 1$  и  $r' = 0$  ( $q = 1$ ). Согласно (49),  $B_i$  есть *нуль-индифферентная* матрица в частных случаях:

$$\left. \begin{aligned} r_i = 1 &\leftrightarrow r_i'' = 1, \\ r_i = 2 &\leftrightarrow r_i'' = 2, \\ (n \leq 3 \text{ или } s'_i \leq 3). \end{aligned} \right\} \quad (51)$$

Отсюда следует правило: *дифферент отсутствует, если размерность пространства или ультраинвариантного подпространства не более трёх*. Например, это правило может быть полезно при составлении минимального аннулирующего многочлена исходя из рангов. Согласно жордановой форме, оно означает, что в случае второго соотношения в (51) единицы на прилегающих диагоналях могут стоять только непрерывно.

*Некоторая квадратная матрица является нуль-индифферентной тогда и только тогда, когда ранги её степеней последовательно уменьшаются на 1 (вплоть до степени  $s^0$ ).*

### § 1.7. Характеристические коэффициенты в редуцированной форме

В заключение первого раздела вычислим все характеристические коэффициенты матрицы в редуцированной форме. Под редукцией здесь понимается максимально возможное понижение степеней характеристических многочленов от  $\varepsilon = -\mu$  в числителе и знаменателе дроби (1) за счёт сокращения их общего делителя. Хорошо известен обычный метод вычисления минимального аннулирующего многочлена матрицы

через *наибольший общий делитель* элементов  $(p, q)$  матрицы  $(B + \varepsilon I)^v = (B - \mu I)^v$  [30, с. 123]. Последний сокращается в дроби (1) у числителя и знаменателя, вследствие чего претерпевает редукцию нулевой многочлен Гамильтона – Кэли в минимальный аннулирующий многочлен, *но также и все характеристические коэффициенты, формулы их связи и алгоритм Сурьё – Фаддеева*. Применение редукции к (24) даёт соотношение

$$q_B(\varepsilon) \cdot I = (B + \varepsilon I) \cdot Q_B(\varepsilon). \quad (52)$$

Здесь

$$q_B(\varepsilon) = \sum_{t=0}^{n^0} q(B, t) \cdot \varepsilon^{n^0-t},$$

$$Q_B(\varepsilon) = \sum_{t=0}^{n^0-1} Q_1(B, t) \cdot \varepsilon^{n^0-t-1},$$

где  $n^0$  – порядок минимального многочлена. А именно, как и (24), формула (52) справедлива для матричного параметра  $E$ . В частности, при  $E = -B$  отсюда следует минимальный аннулирующий многочлен (35) как в матричной форме (редуцированная теорема Гамильтона – Кэли), так и в скалярной форме (редуцированное вековое уравнение), а также следует редуцированная теорема Виета для скалярных коэффициентов:

$$q_B(-B) = Q_1(B, n^0) = \sum_{t=0}^{n^0} q(B, t) \cdot (-B)^{n^0-t} = \prod_{i=1}^q (\mu_i I - B)^{s_i^0} = Z, \quad (53)$$

$$q_B(-\mu) = \sum_{t=0}^{n^0} q(B, t) \cdot (-\mu)^{n^0-t} = \prod_{i=1}^q (\mu_i - \mu)^{s_i^0} = 0, \quad (54)$$

$$q(B, t) = \sum_{C_n^t} \prod_{(t)} \mu_i \quad (q \leq n^0 = \sum_{i=1}^q s_i^0 \leq n), \quad (55)$$

*но без конкретизации значения  $s_i^0$  как в (35) и (36), теперь известного!*

Соответственно также редуцируются (25) – (29). В редуцированном алгоритме Сурьё – Фаддеева начальные условия те же, но далее используется редуцированный след и т. д.:

$$Q_1(B, 0) = I, \quad Q_2(B, 0) = Z, \quad Q_2(B, 1) = B; \quad q(B, 1) = \sum_{i=1}^q (s_i^0 \cdot \mu_i).$$

Редуцированный детерминант есть  $q(B, n^0) = \prod_{i=1}^q \mu_i^{s_i^0}$ . Обратная несингулярная матрица есть

$$B^{-1} = Q_1(B, n^0 - 1) / q(B, n^0).$$

Интересно, что как бы эффективное количество собственных значений при этом снижается до  $n^0$ , а размер матрицы остаётся прежним.



Через собственные значения высшие коэффициенты собственных матриц  $B_i$  в редуцированной форме выражаются в виде:

$$\left. \begin{aligned} Q_1(B_i, r_i^0) &= \prod_{j=1}^q (\mu_j \cdot I - B) s_j^0, \\ \mathcal{Q}(B_i, r_i^0) &= \prod_{j=1}^q (\mu_j - \mu_i) s_j^0, \end{aligned} \right\} (j \neq i) \quad (56)$$

где  $r_i^0 = (n^0 - s_i^0)$  – редуцированный 1-й рок. Причём 2-й рок вследствие редукции формально равен  $(n^0 - 1)$ . Частная редукция количества  $\mu_i$  составляет  $s_i' - s_i^0 = (n - 1) - r_i^0$ ; общая редукция количества  $\mu$  есть  $(n - n^0)$ . Суммы главных частных параметров укладываются в неравенство:

$$(n \cdot q - 1) = \sum_{i=1}^q r_i' \leq \sum_{i=1}^q r_i'' \leq \sum_{i=1}^q r_i \leq (n - 1) \cdot q.$$

Для простой матрицы:  $n^0 = q$ ;  $s_i^0 = 1$ ;  $\mathcal{Q}(P^h, 1) = \sum_{i=1}^q \mu_i^h$ ;  $\mathcal{Q}(P^h, q) = \mathcal{Q}^h(P, q) =$   
 $= \left( \prod_{i=1}^q \mu_i \right)^h.$

Для её же собственных матриц имеем:

$$\left. \begin{aligned} Q_1(P_i, q - 1) &= \prod_{j=1}^q (\mu_j \cdot I - P), \\ \mathcal{Q}(P_i, q - 1) &= \prod_{j=1}^q (\mu_j - \mu_i), \end{aligned} \right\} (j \neq i) \quad (57)$$

В свою очередь, для генерального спектрального представления матрицы общего вида полезны ещё 3 типа аннулирующих многочленов (кроме минимального), а именно в порядке повышения их степени:

$$\prod_{j=1}^q (\mu_j I - B)^{\max s_i^0} = Z, \quad (58)$$

$$\prod_{j=1}^q (\mu_j I - B)^{\max (r_i - r_i' + 1)} = Z, \quad (59)$$

$$\prod_{j=1}^q (\mu_j I - B)^{\max s_i'} = Z, \quad (60)$$

Все эти 3 степени любой  $(-B_j)$  суть нуль-простые матрицы, чьи высшие коэффициенты могут вычисляться тоже как для сингулярной матрицы.

Разумеется, вышеуказанное представление основных характеристик точных матриц в редуцированной форме имеет, прежде всего, теоретическое значение. В какой-то мере оно переносит методы теории чисел на теорию точных матриц.

В практическом же плане несравненно более важное значение имеет корректное определение *основных* параметров сингулярности точной  $n \times n$ -матрицы, что непосредственно связано со структурой её характеристических коэффициентов – скалярных и матричных.

Таким образом, в данной начальной главе была полностью идентифицирована структура всех характеристических коэффициентов любой квадратной матрицы, в том числе коэффициентов высшего порядка для сингулярной матрицы  $V$ . (Напомним, что к множеству последних принадлежат все собственные матрицы  $V_i$ .) Это, в частности, позволило установить все взаимоотношения между основными параметрами сингулярности, которые имеют особое значение в развиваемой далее тензорной тригонометрии. В свою очередь, через характеристические коэффициенты высшего порядка непосредственно и в явном виде затем выражаются собственные проекторы сингулярных матриц, а также конструируются модальные матрицы для приведения  $n \times n$ -матриц  $V$  к основной канонической форме.

## Глава 2. Собственные аффинные и ортогональные проекторы

### § 2.1. Аффинные проекторы и квазиобратная матрица во взаимосвязи с коэффициентами высшего порядка

Пусть  $V_p$  есть нуль-простая матрица. Тогда  $k(V_p, r) \neq 0$ , где порядок коэффициента  $r = \text{rang } V_p$ . Формула (26) приводится к виду:

$$\{K_1(V_p, r)/k(V_p, r)\} + \{K_2(V_p, r)/k(V_p, r)\} = \vec{V}_p + \overleftarrow{V}_p = I.$$

Здесь и далее  $\vec{V}_p$  и  $\overleftarrow{V}_p$  обозначают собственные характеристические *аффинные* проекторы в  $\langle \mathcal{A}^n \rangle$  для  $V_p$  и вместе с тем – идемпотентные матрицы. В случае пространства с евклидовой метрикой это также суть собственные характеристические *косогональные* проекторы. В аффинном пространстве  $\vec{V}_p$  проецирует на ядро  $\langle \ker V_p \rangle$  параллельно образу  $\langle \text{im } V_p \rangle$ , а  $\overleftarrow{V}_p$  проецирует на образ  $\langle \text{im } V_p \rangle$  параллельно ядру  $\langle \ker V_p \rangle$ . Действительно,

$$K_2(V_p, r) = V_p \cdot K_1(V_p, r - 1) = K_1(V_p, r - 1) \cdot V_p;$$

$$\vec{V}_p + \overleftarrow{V}_p = I, \quad \vec{V}_p \cdot \overleftarrow{V}_p = \overleftarrow{V}_p \cdot \vec{V}_p = Z;$$

$$\left(\vec{V}_p\right)^2 = \vec{V}_p \cdot (I - \overleftarrow{V}_p) = \vec{V}_p, \quad \left(\overleftarrow{V}_p\right)^2 = \overleftarrow{V}_p \cdot (I - \vec{V}_p) = \overleftarrow{V}_p;$$

$$\langle \ker V_p \rangle \oplus \langle \text{im } V_p \rangle \equiv \langle \mathcal{A}^n \rangle, \quad x = \vec{V}_p x + \overleftarrow{V}_p x = \vec{x} + \overleftarrow{x}.$$

Видно, что произвольный элемент  $x$  в  $\langle \mathcal{A}^n \rangle$  однозначно разлагается на проекции  $\vec{x}$  (на  $\langle \ker V_p \rangle$  параллельно  $\langle \text{im } V_p \rangle$ ) и  $\overleftarrow{x}$  (на  $\langle \text{im } V_p \rangle$  параллельно  $\langle \ker V_p \rangle$ ). Следовательно, явные формулы для них имеют вид:

$$\vec{V}_p = K_1(V_p, r)/k(V_p, r), \tag{61}$$

$$\overleftarrow{V}_p = K_2(V_p, r)/k(V_p, r) = V_p \cdot K_1(V_p, r - 1)/k(V_p, r) = K_1(V_p, r - 1) \cdot V_p / k(V_p, r). \tag{62}$$

Из этих формул и (27) следует, что аффинные собственные проекторы для  $Bp$  – её матричные многочлены, они коммутативны, в т. ч. с  $Bp$ . В тривиальных случаях:  $\vec{a} = 0, \overleftarrow{a} = 1$  ( $a$  – скаляр);  $Z = \vec{I}, I = \overleftarrow{Z}$ . Далее:

$$\left. \begin{aligned} \langle \text{im } K_1(Bp,r) \rangle &\equiv \langle \ker K_2(Bp,r) \rangle \equiv \langle \ker Bp \rangle, \\ \langle \ker K_1(Bp,r) \rangle &\equiv \langle \text{im } K_2(Bp,r) \rangle \equiv \langle \text{im } Bp \rangle; \end{aligned} \right\} \quad (63)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{rang } K_1(Bp,r) &= \text{sing } Bp, \\ \text{rang } K_2(Bp,r) &= \text{rang } Bp; \end{aligned} \right\} \quad (64)$$

$$\overrightarrow{(Bp')} = (\overrightarrow{Bp})', \quad \overleftarrow{(Bp')} = (\overleftarrow{Bp})', \quad \overrightarrow{(\overleftarrow{Bp})} = (\overleftarrow{\overrightarrow{Bp}}) = \overleftarrow{Bp}, \quad \overleftarrow{(\overrightarrow{Bp})} = (\overrightarrow{\overleftarrow{Bp}}) = \overrightarrow{Bp}; \quad (65)$$

$$k(\overrightarrow{B},t) = C_{n-r}^t, \quad k(\overleftarrow{B},t) = C_r^t. \quad (66)$$

Для степеней сингулярных матриц  $B$  и  $Bp$  ( $r = r'$ ) имеем:

$$k(B^h,r') = k^h(B,r'), \quad k(Bp^h,r) = k^h(Bp,r), \quad (67)$$

$$K_{1,2}(Bp^h,r) = K^h_{1,2}(Bp,r) = k^{h-1}(Bp,r) \cdot K_{1,2}(Bp,r). \quad (68)$$

В аффинном пространстве  $\langle \mathcal{A}^n \rangle$  определяется собственная аффинная квазиобратная матрица, коммутирующая с исходной матрицей, как:

$$\begin{aligned} Bp^- &= \overleftarrow{Bp} \cdot [K_1(Bp,r-1)/k(Bp,r)] = [K_1(Bp,r-1)/k(Bp,r)] \cdot \overleftarrow{Bp} = \\ &= Bp \cdot [K_1(Bp,r-1)/k(Bp,r)]^2 = [K_1(Bp,r-1)/k(Bp,r)]^2 \cdot Bp. \end{aligned} \quad (69)$$

Она играет роль обратной матрицы на  $\langle \text{im } Bp \rangle$  и нулевой – на  $\langle \ker Bp \rangle$  и определяется однозначно уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} Bp^- \cdot Bp &= Bp \cdot Bp^- = \overleftarrow{Bp}, \\ Bp^- &= \overleftarrow{Bp} \cdot Bp^- = Bp^- \cdot \overleftarrow{Bp}. \end{aligned} \right\} \quad (70)$$

Для неё же справедливы соотношения:  $\text{rang } Bp^- = \text{rang } Bp$ ;

$$\langle \text{im } Bp^- \rangle \equiv \langle \text{im } Bp \rangle, \quad \langle \ker Bp^- \rangle \equiv \langle \ker Bp \rangle; \quad B^- = B^{-1} \leftrightarrow \det B \neq 0;$$

$$Bp \cdot Bp^- \cdot Bp = Bp, \quad Bp^- \cdot Bp \cdot Bp^- = Bp^-;$$

$$(Bp^-)^- = Bp, \quad (Bp^h)^- = (Bp^-)^h, \quad (Bp')^- = (Bp^-)'$$

Согласно (1), (61), (62) и (69), аффинные проекторы и квазиобратная матрица представляются пределами:

$$\overrightarrow{\text{Вр}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [\varepsilon \cdot (\text{Вр} + \varepsilon \cdot \text{I})^{-1}] = \lim_{N \rightarrow \infty} (N \cdot \text{Вр} + \text{I})^{-1}, \quad (71)$$

$$\overleftarrow{\text{Вр}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [\text{Вр} \cdot (\text{Вр} + \varepsilon \cdot \text{I})^{-1}] = \lim_{N \rightarrow \infty} [N \cdot \text{Вр} (N \cdot \text{Вр} + \text{I})^{-1}], \quad (72)$$

$$\text{Вр}^- = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [\text{Вр} \cdot (\text{Вр} + \varepsilon \cdot \text{I})^{-2}] = \lim_{N \rightarrow \infty} [N^2 \cdot \text{Вр} (N \cdot \text{Вр} + \text{I})^{-2}] \quad (73)$$

$$(\overrightarrow{\text{Вр}} + \overleftarrow{\text{Вр}} = \text{I}, \quad \text{Вр}^- \cdot \text{Вр} = \text{Вр} \cdot \text{Вр}^- = \overleftarrow{\text{Вр}}; \quad N = 1/\varepsilon).$$

Тривиальными частными случаями нуль-простых матриц  $\text{Вр}$  являются собственные простые матрицы  $P_i = P - \mu_i \cdot \text{I}$ ,  $P_i = P$  ( $\mu_i = 0$ ), в том числе собственные нормальные и симметричные матрицы, степенные матрицы вида  $\text{В}^{h \geq s_i^0}$ ,  $\text{В}_i^{h \geq s_i^0}$ .

## § 2.2. Применение результатов в спектральном представлении матрицы и для её приведения к основной канонической форме

Характеристические аффинные проекторы (61) для собственных  $i$ -ых ультраинвариантных подпространств, образующих в  $\langle \mathcal{A}^n \rangle$  прямую сумму [30, с. 156; 10, с. 128-143], можно вычислить исходя из (57) для простой матрицы  $P$  и (33) или (56), (58)–(60) для дефектной матрицы  $\text{В}$ :

$$\overrightarrow{P}_i = K_1(P_i, r_i)/k(P_i, r_i) = Q_1(P_i, q_i - 1)/q(P_i, r_i) = \prod_{j=1}^q (\mu_j \cdot \text{I} - P)/(\mu_j - \mu_i), \quad (74)$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{Вр}}_{(i)} &= K_1(\text{В}_i, r_i^0)/k(\text{В}_i, r_i^0) = Q_1(\text{В}_i, r_i^0)/q(\text{В}_i, r_i^0) = \prod_{j=1}^q (\mu_j \cdot \text{I} - \text{В})^{s_j^0}/(\mu_j - \mu_i)^{s_j^0} = \\ &= \text{В}_i^{s_i^0} = \overrightarrow{\text{В}_i^h}. \end{aligned} \quad (75)$$

где ( $j \neq i$ ),  $h \geq \max \langle s_i^0 \rangle$ ;  $\text{В}_i = \text{В} - \mu_i \cdot \text{I}$ ,  $\text{Вр}_{(i)} = \text{В}_i^{s_i^0}$ . Спектральное представление матрицы  $\text{В}$  с точностью до ультраинвариантных подпространств даёт одновременно её разложение (21) на характеристические простую и нильпотентную матрицы. Это разложение наглядно интерпретируется жордановой формой и выражается формулой:

$$B = B \cdot \sum_{i=1}^q \overrightarrow{Bp_{(i)}} = \sum_{i=1}^q \mu_i \cdot \overrightarrow{Bp_{(i)}} + \sum_{i=1}^q B_i \cdot \overrightarrow{Bp_{(i)}} = \sum_{i=1}^q P_i + \sum_{i=1}^q O_i = P_B + O_B \quad (76)$$

$$(\overrightarrow{P_B} = \overrightarrow{B^h}, h \geq s^0; O_B^k = Z, k \geq \max \langle s_i^0 \rangle, B \cdot \overrightarrow{Bp_{(i)}} = \overrightarrow{Bp_{(i)}} \cdot B.)$$

Для составления модальной матрицы преобразования  $B$  к основной диагонально-клеточной канонической форме могут использоваться пропорциональные собственным проекторам коэффициенты вида ( $j \neq i$ ):

$$K_1(B_i, r_i') = \prod_{j=1}^q (\mu_j I - B)^{s_j'}, \text{ согласно (33),}$$

$$Q_1(B_i, r_i^0) = \prod_{j=1}^q (\mu_j I - B)^{s_j^0}, \text{ согласно (56).}$$

$$\left. \begin{aligned} \langle \text{im } K_1(B_i, r_i') \rangle &\equiv \langle \text{im } Q_1(B_i, r_i^0) \rangle \equiv \langle \ker B_i^{s_i^0} \rangle, \\ \langle \ker K_1(B_i, r_i') \rangle &\equiv \langle \ker Q_1(B_i, r_i^0) \rangle \equiv \langle \text{im } B_i^{s_i^0} \rangle. \end{aligned} \right\} \quad (77)$$

Все данные коэффициенты являются нуль-простыми матрицами. Высшие скалярные коэффициенты последних – ненулевые. Поэтому такие матрицы обязательно имеют базисный диагональный минор, на перекрёстке которого расположены базисная  $s_i' \times n$ -субматрица строк и базисная  $n \times s_i^0$ -субматрица столбцов. Соответственно из субматриц столбцов последовательно ( $i = 1, 2, \dots, q$ ) составляется ковариантная, а из субматриц строк – контравариантная модальная матрица:

$$V_{\text{col}}^{-1} \cdot B \cdot V_{\text{col}} = C_{\mu}, \quad \tilde{E}_1 = V_{\text{col}} \cdot \tilde{E}, \quad (78)$$

$$V_{\text{lig}} \cdot B \cdot V_{\text{lig}}^{-1} = C_{\mu}, \quad \tilde{E}_2 = V_{\text{col}} \cdot \tilde{E}, \quad (79)$$

$$V'_{\text{lig}} \cdot B' \cdot V'_{\text{lig}} = C'_{\mu}, \quad \tilde{E}_1 = V_{\text{col}} \cdot \tilde{E}, \quad (80)$$

$$V^*_{\text{lig}} \cdot B^* \cdot V^*_{\text{lig}} = C^*_{\mu}, \quad \tilde{E}_1 = V_{\text{col}} \cdot \tilde{E}, \quad (81)$$

где  $C_{\mu}$  обозначает каноническую клеточную форму матрицы  $B$  в последовательности собственных значений  $\mu_1, \dots, \mu_q$ ;  $\tilde{E}$  и  $\tilde{E}_k$  – матрицы вектор-столбцов исходного базиса и базиса канонической формы.

Кроме того, каждое ультраинвариантное подпространство содержит, как известно, входящие простые инвариантные подпространства:

$$\left. \begin{aligned} \langle \ker B_i^{s_i^0} \rangle \supset \langle \text{im } O_i^1 \rangle \supset \dots \supset \langle \text{im } O_i^{s_i^0-1} \rangle, \\ \langle \ker B_i^{s_i^0} \rangle \supset \langle \ker O_i^{s_i^0-1} \rangle \supset \dots \supset \langle \ker O_i^1 \rangle; \end{aligned} \right\} \quad (82)$$

$$\left. \begin{aligned} \langle \text{im } O_i^t \rangle \equiv \langle \text{im } K_1(B_i, r_i') \cdot B_i^t \rangle \equiv \langle \text{im } Q_1(B_i, r_i^0) \cdot B_i^t \rangle, \\ \langle \ker O_i^t \rangle \equiv \langle \text{im } B_i^t \rangle \quad (t = 1, \dots, s_i^0 - 1). \end{aligned} \right\} \quad (83)$$

Если из проекции в ультраинвариантной клетке вычесть простую, то есть диагональную часть, то остаётся нильпотентная клетка, которая может далее подвергаться модальному преобразованию вплоть до нильпотентной жордановой формы.

Модальная матрица, составленная в (78) – (81), получена, в принципе,

для простой матрицы  $P_B = \sum_{j=1}^q P_j$ . Поэтому общая форма ковариантной модальной матрицы имеет вид:

$$\langle V_{\text{col}} \rangle \equiv V_{\text{col}} \cdot \langle C_q \rangle \quad (V_{\text{lig}}^{-1} \in \langle V_{\text{col}} \rangle), \quad (84)$$

где  $C_q$  – клеточная произвольная несингулярная матрица, состоящая из несингулярных блоков  $c_1, \dots, c_q$ . Количество нильпотентных жордановых субклеток размера  $t \times t$  в  $i$ -й клетке основной формы, с учётом известной формулы, например, [28, ч.2, с.95], определится как

$$[(\text{rang } O_i^t - \text{rang } O_i^{t+1}) - (\text{rang } O_i^{t+1} - \text{rang } O_i^{t+2})].$$

Для генерального спектрального представления аналитических функций от матрицы  $B$  используют интерполяционные многочлены Лагранжа и Эрмита с применением *компонентных матриц* [30, с. 158]:

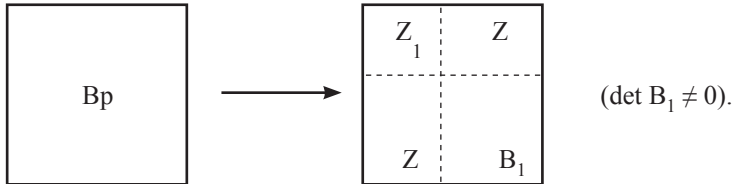
$$B_{(ik)} = [B_i^{k-1} / (k-1)!] \cdot \vec{B}_{p(i)} \quad (\text{im } B_{(ik)} \equiv \langle \text{im } O_i^{k-1} \rangle) \quad (85)$$

$$(k = 1, \dots, s_i^0).$$

Подставим сюда ранее полученное выражение (75) для фигурирующего здесь аффинного проектора в случае исходной дефектной матрицы. Теперь итоговая формула для спектрального представления матричной функции приобретает завершённый вид, зависящий только от исходной квадратной матрицы  $B$ .

**§ 2.3. Приведение нуль-простой матрицы к нуль-клеточной форме**

Нуль-простая матрица  $V_p$  приводится модальным преобразованием к нуль-клеточной форме  $V_c$  – прямой сумме  $r \times r$ - и  $s \times s$ - матриц  $B_1$  и  $Z_1$



(где  $s = n - r$  есть геометрическая и алгебраическая кратность  $\mu = 0$ ).

Коэффициенты  $K_1(V_p, r)$  и  $K_2(V_p, r)$  пропорциональны собственным проекторам (61) и (62), нужным здесь для модального преобразования  $V_p$  в нуль-клеточную форму  $V_c$ . Для их вычисления не требуются собственные значения  $V_p$ , как в полном спектре (76). Причём, как нуль-простые матрицы ранга  $s$  и  $r$ , они обязательно содержат базисные диагональные миноры, которые определяют 2 базисные  $n \times s$ - и  $n \times r$ -субматрицы столбцов. Из них составляется ковариантная модальная  $n \times n$ -матрица преобразования исходного базиса  $\tilde{E}$  в базис  $\tilde{E}_1$  формы  $V_c$

$$V_{col}^{-1} \cdot V_p \cdot V_{col} = V_c \tag{86}$$

$$(\tilde{E}_1 = V_{col} \cdot \tilde{E}, \langle V_{col} \rangle \equiv V_{col} \cdot \langle C_2 \rangle, C_2 - \text{свободная } 2\text{-х клеточная матрица}).$$

Пусть дана пара нуль-простых матриц  $V_p$  одинакового размера, для которых выполняется одновременно два условия:

$$\langle \text{im } V_{p_1} \rangle \equiv \langle \text{im } V_{p_2} \rangle, \quad \langle \text{im } V_{p_1}' \rangle \equiv \langle \text{im } V_{p_2}' \rangle$$

$$\begin{matrix} \rightarrow & \rightarrow & \leftarrow & \leftarrow \\ (V_{p_1} = V_{p_2}, & V_{p_1} = V_{p_2}). \end{matrix}$$

Тогда с учётом (86) для них следуют соотношения:

$$K_{1,2}(V_{p_1} \cdot V_{p_2}, r) = K_{1,2}(V_{p_2} \cdot V_{p_1}, r) = K_{1,2}(V_{p_1}, r) \cdot K_{1,2}(V_{p_2}, r), \tag{87}$$

$$k(V_{p_1} \cdot V_{p_2}, r) = k(V_{p_2} \cdot V_{p_1}, r) = k(V_{p_1}, r) \cdot k(V_{p_2}, r).$$

В частности, последнее из них обобщает классическую формулу для детерминанта произведения матриц:  $\det (B_1 \cdot B_2) = \det (B_2 \cdot B_1) = \det B_1 \cdot \det B_2$ .



### § 2.4. Нуль-нормальные сингулярные матрицы

Рассмотренные выше проекторы  $\vec{V}_r$  и  $\overleftarrow{V}_r$  взаимно-однозначно связаны с парой собственных подпространств  $\langle \text{im } V_r \rangle$  и  $\langle \ker V_r \rangle$  в аффинном пространстве  $\langle \mathcal{A}^n \rangle$  с некоторым единичным базисом  $\check{E}$ . Пусть это есть *вещественное* пространство  $\langle \mathcal{A}^n \rangle$ . Выделим подмножество вещественных нуль-простых матриц  $\langle V_m \rangle$ , для которых имеют место соотношения:

$$\vec{V}_m = V_m' = (V_m)' \leftrightarrow V_m = V_m' = (V_m)'. \quad (88)$$

Геометрически данное условие выражается так

$$\langle \ker V_m \rangle \equiv \langle \ker V_m' \rangle \leftrightarrow \langle \text{im } V_m \rangle \equiv \langle \text{im } V_m' \rangle. \quad (89)$$

При этом  $\langle \text{im } V_m \rangle$  и  $\langle \ker V_m \rangle$  образуют в  $\langle \mathcal{A}^n \rangle$  прямую сумму, так как  $k(V_m, r) \neq 0$ . В евклидовом пространстве  $\langle \mathcal{E}^n \rangle$  проявляется геометрическая исключительность этих матриц, причём при использовании ортонормированного базиса:

$$\langle \ker V_m' \rangle \equiv \langle \text{im } V_m \rangle^\perp \equiv \langle \ker V_m \rangle, \quad (90)$$

$$\langle \text{im } V_m' \rangle \equiv \langle \ker V_m \rangle^\perp \equiv \langle \text{im } V_m \rangle.$$

Т. е. в вещественном  $\langle \mathcal{E}^n \rangle$  с ортонормированным базисом нуль-простая матрица имеет симметричные характеристические проекторы тогда и только тогда, когда её собственные подпространства  $\langle \text{im } V_m \rangle$  и  $\langle \ker V_m \rangle$  образуют прямую ортогональную сумму.

Матрица  $V_m$  обладает свойствами нормальной матрицы на собственном подпространстве, соответствующем нулевому собственному значению. Поэтому она определяется как *нуль-нормальная*, а её проекторы – как ортогональные. В частности, это суть сингулярные нормальные, в том числе симметричные и кососимметричные матрицы, а также несингулярные матрицы. Имеют место соотношения:

$$\vec{V}_m = V_m' = K_1(V_m, r)/k(V_m, r) \leftrightarrow K_1(V_m, r) = K_1'(V_m, r) \quad (91)$$

$$\overleftarrow{V}_m = V_m' = K_2(V_m, r)/k(V_m, r) \leftrightarrow K_2(V_m, r) = K_2'(V_m, r). \quad (92)$$

Проектор  $\vec{V}_m$  проецирует в  $\langle \mathcal{E}^n \rangle$  ортогонально на ядро матрицы  $V_m$ , а проектор  $\overleftarrow{V}_m$  проецирует ортогонально на её образ:  $V_m \perp \overleftarrow{V}_m$ .

Очевидно, что все собственные матрицы  $B_i$  нуль-простые и вещественные, или все они имеют вещественные аффинные проекторы  $\overleftarrow{B}_i$  и  $\overrightarrow{B}_i$  тогда и только тогда, когда  $B$  простая вещественная матрица с вещественной диагональной формой (собственными значениями). Для нормальной вещественной матрицы  $B = M$  существует ортогональная вещественная модальная матрица  $R$  приведения к вещественной диагональной форме тогда и только тогда, когда она симметрична:  $M = S$ . Образ и ядро каждой собственной матрицы  $S_i$  ортогонально дополняют друг друга в  $\langle \mathcal{E}^n \rangle$ , а все ядра образуют прямую ортогональную сумму.

*Следовательно, некоторая вещественная матрица имеет все нуль-нормальные вещественные собственные матрицы тогда и только тогда, когда она симметричная.*

В частном же случае собственные матрицы  $B_i$  и  $B_i'$  ранга  $(n - 1)$  имеют один и тот же  $i$ -й собственный вектор тогда и только тогда, когда  $B_i^v = (B_i^v)'$ . Ортонормирование столбцов по Граму – Шмидту отдельно в 2-х блоках модальной матрицы  $V_{col} = V_{lig}'$  в (86) даёт ортогональную модальную матрицу приведения исходной нуль-нормальной матрицы к канонической нуль-клеточной форме – конгруэнтное преобразование:

$$R_{col}' \cdot B_m \cdot R_{col} = B_c \quad (93)$$

$\langle R_{col} \rangle \equiv R_{col} \cdot \langle R_2 \rangle$ , но  $\langle V_{col} \rangle \equiv R_{col} \cdot \langle C_2 \rangle$  – см. как в (86)).

Если исходный базис был декартов, например  $\{I\}$ , то новый ортонормированный базис будет выражаться в нём вектор-столбцами модальной матрицы  $\{R_{col}\} = \{R_{lig}'\}$ . Ориентация базиса сохраняется или выбирается путём умножения  $R_{col}$  справа на знакопеременную единичную матрицу. В частности, к нуль-нормальным матрицам принадлежат сингулярные  $M$  и  $S$ .

Аналогично (78), для симметричной матрицы  $S$  можно полностью сформировать ортогональную модальную матрицу  $R_{col}$  её приведения к диагональной форме. Если собственные значения матрицы  $S$  различны, то находимые через  $\langle \ker S_i \rangle$  все  $n$  её единичных собственных векторов сразу же дают искомую  $R_{col}$ . Если же некоторые из них вырождены (при  $s_i > 1$ ), то прибегают к ортонормированию по Граму – Шмидту.

Приведём встречаемый во втором разделе основной части монографии характерный пример нуль-нормальных матриц, образуемых из прямоугольной  $n \times m$ -матрицы  $A$ :

$$B_m = A_1 \cdot A_2', \quad B_m' = A_2 \cdot A_1' \quad (94)$$

$\langle \text{im } A_1 \rangle \equiv \langle \text{im } A_2 \rangle$ ,  $\text{rang } A_1 = \text{rang } A_2 = m < n$ ),

$$Bm_2 = A_1' \cdot A_2, \quad Bm_2' = A_2' \cdot A_1 \quad (95)$$

$$\langle \ker A_1 \rangle \equiv \langle \ker A_2 \rangle, \quad \text{rang } A_1 = \text{rang } A_2 = n < m.$$

Укажем некоторые другие свойства изучаемых нуль-нормальных матриц:

$$\left. \begin{aligned} \overrightarrow{(Bm' \cdot Bm)} &= \overrightarrow{(Bm \cdot Bm')} = \overrightarrow{Bm}, \\ \overleftarrow{(Bm' \cdot Bm)} &= \overleftarrow{(Bm \cdot Bm')} = \overleftarrow{Bm}; \\ \langle \ker Bm' \cdot Bm \rangle &\equiv \langle \ker Bm \cdot Bm' \rangle \equiv \langle \ker Bm \rangle, \\ \langle \text{im } Bm' \cdot Bm \rangle &\equiv \langle \text{im } Bm \cdot Bm' \rangle \equiv \langle \text{im } Bm \rangle. \end{aligned} \right\} \quad (96)$$

Нуль-нормальные матрицы  $Bm, Bm'$  удовлетворяют двум условиям формулы (87). Поэтому и для них справедливы формулы расщепления:

$$\left. \begin{aligned} K_{1,2}(Bm \cdot Bm', r) &= K_{1,2}(Bm' \cdot Bm, r) = K_{1,2}^2(Bm, r), \\ k(Bm \cdot Bm', r) &= k(Bm' \cdot Bm, r) = k^2(Bm, r). \end{aligned} \right\} \quad (97)$$

В частности, последняя из них обобщает классическую формулу для детерминанта гомомultiпликации матрицы:

$$\det(B \cdot B') = \det(B' \cdot B) = \det^2 B.$$

## § 2.5. Сферически ортогональные проекторы и квазиобратная матрица

В предыдущем параграфе сферически ортогональные проекторы в  $\langle \mathcal{L}^n \rangle$  появились для специальных нуль-нормальных матриц  $\langle Bm \rangle$ .

Пусть  $A$  – вещественная  $n \times m$ -матрица,  $r = \text{rang } A$ . Тогда  $AA'$  и  $A'A \in \langle Bm \rangle$  и  $\text{rang } AA' = \text{rang } A'A = r$ . Согласно (91) и (92), имеем:

$$\overrightarrow{AA'} = K_1(AA', r) / k(AA', r), \quad \overrightarrow{A'A} = K_1(A'A, r) / k(A'A, r). \quad (98)$$

$$\left. \begin{aligned} \overleftarrow{AA'} &= K_2(AA', r) / k(AA', r) = A \cdot A^+, \\ \overleftarrow{A'A} &= K_2(A'A, r) / k(A'A, r) = A^+ \cdot A, \end{aligned} \right\} \{k(AA', t) = k(A'A, t)\} \quad (99)$$

где  $\overrightarrow{AA'}$  проецирует ортогонально на  $\langle \ker A' \rangle$ ,  $\overrightarrow{aa'} = I - aa' / a'a$ ;

$\overleftarrow{AA'}$  проецирует ортогонально на  $\langle \text{im } A \rangle$ ,  $\overleftarrow{aa'} = a \cdot a' / a'a$ ;

$A^+$  – квазиобратная  $m \times n$ -матрица Мура – Пенроуза [18, 59, 60], для которой  $\text{rang } A^+ = \text{rang } A'$ . Согласно (99), она удовлетворяет условию:

$$\overleftarrow{A}'A \cdot A^+ = A^+ = A^+ \cdot \overleftarrow{AA}' \quad (100)$$

Отсюда следует формула Диселла:

$$A^+ = A' \cdot K_1(AA', r - 1) / k(AA', r) = [K_1(A'A, r - 1) / k(A'A, r)] \cdot A' \quad (101)$$

полученная им ранее через алгоритм Сурьё – Фаддеева [52]. Если матричный коэффициент развернуть в многочлен (27), то непосредственно видна тождественность обеих частей этой формулы (101). В частности,  $\{a\}^+ = a'/a'a$ . Квазиобратная матрица Мура – Пенроуза играет роль обратной матрицы на  $\langle \text{im } A \rangle$  и нулевой на  $\langle \text{ker } A' \rangle$  при умножении слева:

$$A^+ \cdot C = A^+ \cdot (\overleftarrow{AA}' + \overrightarrow{AA}') \cdot C = A^+ \cdot \overleftarrow{AA}' \cdot C \quad (102)$$

При умножения справа она играет роль обратной матрицы на  $\langle \text{im } A' \rangle$  и нулевой на  $\langle \text{ker } A \rangle$ :

$$C \cdot A^+ = [C \cdot (\overleftarrow{A}'A + \overrightarrow{A}'A)] \cdot A^+ = (C \cdot \overleftarrow{A}'A) \cdot A^+ \quad (103)$$

В частности,  $B^+$  (см. § 2.1) коммутрует с  $B$  только на пересечении подпространств:  $\langle \text{im } B \rangle \cap \langle \text{im } B' \rangle$ . Отсюда следует, что

$$B^- = B^+ \leftrightarrow B \in \langle Bm \rangle \leftrightarrow B^+ \cdot B = B \cdot B^+ \quad (104)$$

В любом случае, согласно (102) и (103),  $B^+$  представляется прямой ортогональной суммой обратной и нулевой матриц. Ортогональная квазиобратная матрица имеет исключительное геометрическое значение в евклидовом пространстве с ортонормированным базисом. Среди всех квазиобратных матриц, задаваемых уравнением Пенроуза  $A \cdot X \cdot A = A$ , она, как известно, имеет минимальную норму Фробениуса, то есть матричную норму 1-го порядка (см. § 9.1). При этом, что тождественно, она является его нормальным решением как слева, так и справа [18]. Указанное обстоятельство обусловлено требованием (100). Кроме того, она сама даёт те же нормальные решения с минимумом нормы Фробениуса для правого, левого и смешанного линейного матричного уравнения:

$$A_1 \cdot X = A \rightarrow \dot{X} = A_1^+ \cdot A, \quad (105)$$

$n \times m \quad n \times t \quad m \times t$

$$Y \cdot A_2 = A \rightarrow \dot{Y} = A \cdot A_2^+, \quad (106)$$

$n \times m \quad t \times m \quad t \times n$

$$A_1 \cdot X \cdot A_2 = A \rightarrow \dot{X} = A_1^+ \cdot A \cdot A_2^+. \quad (107)$$

$n_1 \times m_1 \quad n_2 \times m_2 \quad n_1 \times m_2 \quad m_1 \times n_2$

При этом невязка вышеуказанных линейных уравнений также имеет минимальную норму:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\Delta}_1 &= -\overrightarrow{A_1 A_1'} \cdot A, \\ \dot{\Delta}_1 &= Z \leftrightarrow A \in \langle \overleftarrow{A_1 A_1'} \cdot \mathcal{E}^{n \times t} \rangle \equiv \langle \text{KER}_R \overrightarrow{A_1 A_1'} \rangle; \end{aligned} \right\} \quad (108)$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{\Delta}_2 &= -A \cdot \overrightarrow{A_2' A_2}, \\ \dot{\Delta}_2 &= Z \leftrightarrow A \in \langle \mathcal{E}^{t \times m} \cdot \overleftarrow{A_2' A_2} \rangle \equiv \langle \text{KER}_L \overrightarrow{A_2' A_2} \rangle; \end{aligned} \right\} \quad (109)$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{\Delta} &= -\overrightarrow{A_1 A_1'} \cdot A - A \cdot \overrightarrow{A_2' A_2} + \overrightarrow{A_1 A_1'} \cdot A \cdot \overrightarrow{A_2' A_2}, \\ \dot{\Delta} &= Z \leftrightarrow A \in \langle \overleftarrow{A_1 A_1'} \cdot \mathcal{E}^{n_1 \times m_2} \cdot \overleftarrow{A_2' A_2} \rangle \equiv \langle \text{KER}_R \overrightarrow{A_1 A_1'} \cap \text{KER}_L \overrightarrow{A_2' A_2} \rangle. \end{aligned} \right\} \quad (110)$$

Кроме того, матрица  $A^+$  является единственным элементом пересечения множеств правых и левых квазиобратных матриц [18, 55], задаваемых уравнениями типа (99). В общем виде имеем:

$$\langle A_R^- \rangle \equiv A^+ \oplus \langle \overrightarrow{A' A} \cdot \mathcal{E}^{m \times n} \cdot \overleftarrow{A A'} \rangle \quad (111)$$

– они производят ортопроекторы, указанные в (108);

$$\langle A_L^- \rangle \equiv A^+ \oplus \langle \overleftarrow{A' A} \cdot \mathcal{E}^{m \times n} \cdot \overrightarrow{A A'} \rangle; \quad (112)$$

– они производят ортопроекторы, указанные в (109);

$$A^+ = \langle A_R^- \rangle \cap \langle A_L^- \rangle. \quad (113)$$

Согласно (108) – (110), имеем:

$$\begin{aligned} \text{rang } A_1 = n &\rightarrow \dot{\Delta}_1 = Z, \\ \text{rang } A_2 = m &\rightarrow \dot{\Delta}_2 = Z, \\ \left. \begin{aligned} \text{rang } A_1 = n_1 \\ \text{rang } A_2 = m_2 \end{aligned} \right\} &\rightarrow \dot{\Delta} = Z. \end{aligned} \tag{114}$$

В частности, исследуем дополнительно классическое уравнение:

$$\| Ax - a \| = \min, \quad \dot{\mathbf{x}} = A^+ \cdot \mathbf{a} = [\dot{A}(r)/k(AA',r)] \cdot \mathbf{a}, \tag{115}$$

$$\dot{\delta} = -AA' \cdot \mathbf{a} = -K_1(AA',r)/k(A'A,r) \cdot \mathbf{a}; \tag{116}$$

$$\dot{\delta} = \mathbf{0} \leftrightarrow \mathbf{a} \in \langle \ker AA' \rangle \equiv \langle \ker K_1(AA',r) \rangle. \tag{117}$$

Геометрически минимодульная невязка уравнения (115) есть анти-проекция (116). Поэтому для её евклидовой нормы справедливо:

$$\| \dot{\delta} \|^2 = -\dot{\delta} \cdot \mathbf{a}, \tag{118}$$

$$\| \dot{\delta} \| = \sin \varphi \cdot \| \mathbf{a} \|, \tag{119}$$

где  $\varphi$  – скалярный угол между вектором  $\mathbf{a}$  и подпространством  $\langle \text{im } A \rangle$ . Для исходного линейного уравнения в комплексном пространстве  $\langle \mathcal{E}^n \rangle$  в формулах (115)–(119), разумеется, применяют эрмитово сопряжение.

В заключение, исходя из (101), дадим формулу для элементов  $(pq)$   $m \times n$ -матрицы  $\dot{A}(r)$  в (115) в эрмитизированной форме:

$$(pq) = \sum_{C_{m-1}^r} \sum_{C_{n-1}^r} \left\{ \overline{\left[ \frac{(qp) \in}{\text{minor}(r)} A \right]} \right\} \cdot \text{Ad}_{q,p'} \left\{ \frac{(qp) \in}{\text{minor}(r)} A \right\},$$

где  $p = \overline{1, m}$ ,  $q = \overline{1, n}$ ;  $p'$  и  $q'$  – новые индексы элемента  $a_{qp}$  в минорах  $A$ . В итоге формула (115) даёт обобщение формул Крамера. В частности, при  $r = n = m$  она даёт матричное решение невырожденного линейного уравнения, так как  $\dot{A}(n) = \det \bar{A} \cdot A^v$ ,  $k(AA^*, n) = \det A \cdot \det A$ .

## Глава 3. Основные скалярные инварианты сингулярных матриц

### § 3.1. Минорант матрицы и его применение

Если  $A_1$  и  $A_2$  –  $n \times m$ -матрицы, то очевидно  $k(A_1 A_2', t) = k(A_2 A_1', t)$ . Напомним, что скалярные коэффициенты представляют собой сумму диагональных миноров одного и того же порядка  $t$ . Представим каждую матрицу диагонального минора матрицы  $\{A_1 A_2'\}$  через мультипликацию  $t \times m$ -субматриц строк  $A_1$  и  $A_2$ :

$$\{D\text{-minor}(t)A_1 A_2'\} = \{\text{lig}(t)A_1\} \cdot \{\text{lig}(t)A_2'\}.$$

Согласно формуле Бине – Коши [30, с.39], этот минор (детерминант) есть сумма всех парных произведений миноров субматриц порядка  $t$  с одним и тем же набором номеров столбцов. При транспонировании матриц  $A_1$  и  $A_2$  во всех указанных формулировках строки заменяют на столбцы, а столбцы на строки. Именно так здесь устанавливается взаимно-однозначное соответствие между двумя совокупностями  $C_n^t \cdot C_m^t$  произведений миноров  $A_1$  и  $A_2$ , которые в сумме составляют скалярные коэффициенты порядка  $t$  для  $n \times n$ -матриц  $A_1 \cdot A_2'$  и  $m \times m$ -матриц  $A_1' \cdot A_2$ . Следовательно, их коэффициенты равны между собой, что даёт тождественную формулу для всех мультипликаций исходной пары матриц  $A_1$  и  $A_2$ :

$$k(A_1 A_2', t) = k(A_1' A_2, t) = k(A_2 A_1', t) = k(A_2' A_1, t). \quad (120)$$

В частности, если  $A_1 = A_2 = A$ , то

$$k(AA', t) = \sum_{C_m^t} \sum_{C_n^t} \text{minor}^2(t) A = k(A'A, t) \geq 0. \quad (121)$$

Для порядка  $t = r$  определим в вещественном  $\langle \mathcal{E}^n \rangle$  положительную характеристику матрицы и задаваемых ею объектов – *минорант*:

$$\mathcal{M}t(r)A = \sqrt{k(AA', r)} = \sqrt{k(A'A, r)} = \mathcal{M}t(r)A' > 0.$$

Из (121) непосредственно видно, что минорант равен квадратному корню из суммы квадратов всех базисных миноров матрицы  $A$ .

Частные случаи для значений миноранта.

- 1) Пусть  $n > m = r$ . Тогда  $\mathcal{M}t^2(m)A = \det A'A$  и квадрат миноранта равен определителю Грама для совокупности  $m$  вектор-столбцов  $A$ .
- 2) Пусть  $m = 1$ . Тогда минорант есть евклидова норма вектора  $a$ .
- 3) Пусть  $n = m = r$ . Тогда минорант есть модуль детерминанта квадратной матрицы.

Используя (67), нетрудно получить минорант гомомультимпликаций

$$\begin{aligned} \mathcal{M}t(r)\underbrace{\{AA'A \dots\}}_h &= \mathcal{M}t(r)\{A'AA' \dots\} = \sqrt{k[(AA')^h, r]} = \sqrt{k^h(AA', r)} = \\ &= \mathcal{M}t^h(r)A. \end{aligned}$$

Пусть  $\{A|a\}$  – расширенная по столбцам матрица уравнения (115). Используя известное геометрическое свойство определителя Грама – см., например, [14, с. 216], а также (116) и (119), получаем формулу:

$$\mathcal{M}t(r+1)\{A|a\} = \sin \varphi \cdot \|a\| \cdot \mathcal{M}t(r)A = \|\dot{\delta}\| \cdot \mathcal{M}t(r)A. \quad (122)$$

В частности, отсюда имеем *формульное* выражение теоремы Кронекера–Капелли через значение суммы квадратов всех миноров порядка  $(r+1)$ :

$$\mathcal{M}t^2(r+1)\{A|a\} = 0 \leftrightarrow \dot{\delta} = 0 \leftrightarrow \sin \varphi = 0$$

(для комплексного линейного уравнения – в эрмитизированной форме).

Представим формулу (122) тригонометрическим образом:

$$0 \leq \sin \varphi = \mathcal{M}t(r+1)\{A|a\} / \mathcal{M}t(r)A \cdot \mathcal{M}t(1)a \leq 1. \quad (123)$$

В частности, имеем формулу для синуса угла между двумя векторами:

$$\begin{aligned} \sin \varphi_{12} &= \mathcal{M}t(2)\{a_1|a_2\} / \mathcal{M}t(1)a_1 \cdot \mathcal{M}t(1)a_2 = \\ &= \sqrt{\det\{[a_1|a_2]'[a_1|a_2]\}} / \|a_1\| \cdot \|a_2\| \geq 0. \end{aligned} \quad (124)$$

Используя связь миноранта  $n \times m$ -матрицы с определителем Грама для совокупности её вектор-столбцов ( $m \leq n$ ), нетрудно установить его геометрический смысл.

Вначале рассмотрим случай  $m = r$ . (Такие специальные матрицы  $A$  широко используются во втором разделе монографии для представления линейных геометрических объектов – *линеоров*.) Запишем матрицу в виде набора вектор-столбцов. Пусть  $A_j$  есть  $n \times j$ -матрица, образуемая первыми  $j$  вектор-столбцами. Каждая последующая  $A_{j+1}$  рассматривается как расширенная матрица  $\{A_j|a_{j+1}\}$ . К ней применяются формулы (119) и (122), или известная геометрическая связь с корнем из определителя Грама [14, с. 215–219]. В результате последовательного применения данных формул получаем выражение для миноранта  $n \times r$ -матрицы  $A$  в тригонометрическом виде:



$$\mathcal{M}t(\mathbf{r})A = v_r = \|\mathbf{a}_1\| \cdot \sin \varphi_{1,2} \cdot \|\mathbf{a}_2\| \cdot \sin \varphi_{1,2,3} \cdot \dots \cdot \|\mathbf{a}_r\| \leq \|\mathbf{a}_1\| \cdot \|\mathbf{a}_2\| \cdot \dots \cdot \|\mathbf{a}_r\|, \quad (125)$$

где  $v_r$  – обобщённый  $r$ -мерный объём косого параллелепипеда, натянутого на вектор-столбцы матрицы  $A$  ( $0 < \varphi \leq \pi/2$ ). При  $n = m = r$  имеет место синусное неравенство Адамара [27, с.35]. Кроме того, поскольку  $AA'$  и  $A'A$  – простые сингулярные матрицы, на основании (74) имеем:

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{M}t(\mathbf{r})A &= \prod_{j=2}^q \sigma_j^{s_j} > 0, \\ \overrightarrow{AA'} &= \prod_{j=2}^q (\sigma_j^2 \cdot I_{n \times n} - AA') / \sigma_j^2, \end{aligned} \right\} (\sigma_j > 0) \quad (126)$$

где  $\sigma_j^2$  – ненулевые собственные значения гомомультимпликации  $AA'$  или  $A'A$  ( $\sigma_j > 0$  – сингулярные числа матрицы  $A$ ).

В самом общем случае ( $n \geq m \geq r \geq t$ ) коэффициенты выражаются либо геометрически как суммы квадратов частных  $t$ -мерных объёмов, либо алгебраически как суммы Виета для собственных значений:

$$\left. \begin{aligned} k(AA', t) &= k(A'A, t) = \sum_{C_m^t} v_{t(p)}^2 = s_t(\sigma_j^2) = v_t^2 > 0, \\ k(AA', 1) &= k(A'A, 1) = \sum_m l_{(p)}^2 = s_1(\sigma_j^2) = l^2 = \|A\|_F^2 > 0. \end{aligned} \right\} \quad (127)$$

Если используются декартовы координаты, то  $v_{t(p)}$  есть ортопроекция объёма  $v_t$  ранга  $t$ . Отношение  $v_{t(p)} / v_t = \cos \alpha_p$  есть  $p$ -й направляющий косинус. Формула (127) выражает теорему Пифагора для характеристик порядка  $r$  линейных объектов, задаваемых, в частности,  $n \times r$ -матрицей. Все характеристики всегда положительны и инвариантны по отношению к ортогональному преобразованию вектор-столбцов или вектор-строк  $A$  и базиса. Например,

$$\mathcal{M}t(\mathbf{r})A = \mathcal{M}t(\mathbf{r})\{R_1 \cdot A \cdot R_2\} = \mathcal{M}t(\mathbf{r})\sqrt{AA'} = \mathcal{M}t(\mathbf{r})\sqrt{A'A}. \quad (128)$$

Здесь, возможно, сингулярные арифметические корни связаны с матрицей через квазиполярное разложение (называемое ещё как  $QR$ -разложение):

$$A = S_1^{\oplus} \cdot Rq = \sqrt{AA'} \cdot \{(\sqrt{AA'})^+ \cdot A\}, \quad (129)$$

$$A = Rq \cdot S_2^{\oplus} = \{A \cdot (\sqrt{A'A})^+\} \cdot \sqrt{A'A}, \quad (130)$$

где  $S_1^{\oplus} = Rq \cdot S_2^{\oplus} \cdot Rq' \leftrightarrow AA' = Rq \cdot A' \cdot A \cdot Rq'$ ,

$$Rq = A \cdot (\sqrt{A'A})^+ = (\sqrt{AA'})^+ \cdot A \rightarrow A \cdot \sqrt{A'A} = \sqrt{AA'} \cdot A,$$

$$Rq \cdot Rq' = \overleftarrow{AA'}, \quad Rq' \cdot Rq = \overleftarrow{A'A}, \quad Rq' = Rq^+.$$

Нетрудно также видеть, что преобразование  $A \rightarrow Rq$  тождественно по результату процессу ортогонализации Грама – Шмидта для системы  $m$  линейно независимых векторов:

$$A = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m\} \rightarrow \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_m\} = Rq.$$

Это алгебраическое преобразование есть его некий *однозначный* вариант (для заданной их последовательности). Вообще же в евклидовом пространстве процесс ортогонализации Грама – Шмидта приобретает mnemonic более удобную алгебраическую форму и более очевидную геометрическую интерпретацию в сравнении с классической [27, с. 431], если для его реализации применять ортопроекторы:

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{a}_i, \quad \mathbf{v}_i = \mathbf{a}_i - \sum_{k=1}^{i-1} [\mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_k'] \cdot \mathbf{a}_i = \{I - \sum_{k=1}^{i-1} [\mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_k']\} \cdot \mathbf{a}_i = [\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_i'] \cdot \mathbf{a}_i;$$

$$\mathbf{e}_i = \mathbf{v}_i / \|\mathbf{v}_i\|, \quad i = 1, m; \quad \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_i' = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_i' \quad (\text{см. § 2.1, в итоге имеем } Rq \text{ для } A).$$

### § 3.2. Синусные характеристики матриц

Если  $E = \{\mathbf{e}_i\}_{n \times n}$ , где  $\|\mathbf{e}_i\| = 1$ , то в декартовом базисе матрица  $E$  задаёт  $n$ -рёберный (полигранный) тензорный угол в  $\langle \mathcal{E}^n \rangle$ , а  $|\det E|$ , согласно неравенству Адамара (см. выше), определяет его скалярную синусную характеристику. Этому же полигранному углу однозначно соответствует здесь взаимный тензорный угол, задаваемый матрицей  $\hat{E} = \{\hat{\mathbf{e}}_i\}_{n \times n} = \{E_i E_i' \cdot \mathbf{e}_i \cdot \sec \beta_i\}$ , где  $E_i$  получают из исходной  $E$  обнулением  $i$ -го столбца. Причём имеем ряд соотношений (с нахождением  $\cos \beta_i$ ):

$$\cos \beta_i = \mathbf{e}_i' \cdot \hat{\mathbf{e}}_i \rightarrow \cos^2 \beta_i = \mathbf{e}_i' \cdot E_i E_i' \cdot \mathbf{e}_i, \quad \mathbf{e}_i' \cdot \hat{\mathbf{e}}_i = 0 \quad (0 < \cos \beta_i \leq 1).$$

Внутренние мультипликации этих двух матриц связаны формулами:

$$E' \cdot \hat{E} = D_{\cos \beta} = \hat{E}' \cdot E,$$

$$E' E = D_{\cos \beta} \cdot (\hat{E}' \cdot \hat{E})^{-1} \cdot D_{\cos \beta},$$

$$\hat{E}' \hat{E} = D_{\cos \beta} \cdot (E' E)^{-1} \cdot D_{\cos \beta};$$

$$G = \sqrt{D_{\sec \beta}} \cdot E' E \cdot \sqrt{D_{\sec \beta}} = \hat{G}^{-1} = [\sqrt{D_{\sec \beta}} \cdot \hat{E}' \hat{E} \cdot \sqrt{D_{\sec \beta}}]^{-1}. \quad (131)$$

Во взаимных базисах  $\{E \sqrt{D_{\sec \beta}}\}$  и  $\{\hat{E} \sqrt{D_{\sec \beta}}\}$  матрицы  $G$  и  $\hat{G}$  суть соответствующие взаимные метрические тензоры. Синусные характеристики взаимных тензорных углов из значения  $D_{\cos \beta}$  связаны формулой:

$$\det E \cdot \det \hat{E} = \det D_{\cos \beta} = \prod_{i=1}^n \cos \beta_i.$$

В силу неравенства Адамара:  $|\det E|, |\det \hat{E}| \leq 1$ . Однако в данной монографии изучаются только тензорные углы *бинарного типа*, то есть углы, образуемые парами линейных подпространств (при  $\gamma = 1$  – прямых) или парами конечных линейных объектов (при  $\gamma = 1$  – векторов).

*Рассмотрим синусные характеристики именно для бинарных углов.*

Вернёмся к *специальным прямоугольным матрицам*  $A$  ( $n > m = r$ ). Докажем, что для миноранта их внешних мультипликаций имеет место формула расщепления:

$$\mathcal{M}t(r)\{A_1 \cdot A_2'\} = \mathcal{M}t(r)A_1 \cdot \mathcal{M}t(r)A_2 = \sqrt{\det(A_1' A_1)} \cdot \sqrt{\det(A_2' A_2)}. \quad (132)$$

Используя определение миноранта, квазиполярное разложение типа (130) и формулу (128), последовательно получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{M}t^2(r)\{A_1 \cdot A_2'\} &= k[(A_1 A_2' A_2 A_1'), r] = k[(Rq_1 \cdot S_1^{\oplus} \cdot S_2^{\oplus} \cdot S_2^{\oplus} \cdot S_1^{\oplus} \cdot Rq_1'), r] = \\ &= k[(S_1^{\oplus} \cdot S_2^{\oplus} \cdot S_2^{\oplus} \cdot S_1^{\oplus}), r] = \det(A_1' A_1) \cdot \det(A_2' A_2) = \mathcal{M}t^2(r)A_1 \cdot \mathcal{M}t^2(r)A_2. \end{aligned}$$

Далее для внешних мультипликаций матриц  $A$  будут применяться следующие обозначения, в том числе в основной части монографии:

$$B = A_1 \cdot A_2', \quad B' = A_2 \cdot A_1',$$

где для *специальных* прямоугольных матриц имеем:  $\langle \text{im } B \rangle \equiv \langle \text{im } A_1 \rangle$ ,  $\langle \text{ker } B \rangle \equiv \langle \text{ker } A_2' \rangle$ ,  $\langle \text{im } B' \rangle \equiv \langle \text{im } A_2 \rangle$ ,  $\langle \text{ker } B' \rangle \equiv \langle \text{ker } A_1' \rangle$ . С учётом того, что  $m = \text{rang } A$ , имеем:

$$\left. \begin{aligned} \overrightarrow{B} \overrightarrow{B}' &= \overrightarrow{\{A_1 A_2' A_2 A_1'\}} = \overrightarrow{A_1 A_1'}, \\ \overrightarrow{B}' \overrightarrow{B} &= \overrightarrow{\{A_2 A_1' A_1 A_2'\}} = \overrightarrow{A_2 A_2'}, \\ \overleftarrow{B} \overleftarrow{B}' &= \overleftarrow{\{A_1 A_2' A_2 A_1'\}} = \overleftarrow{A_1 A_1'}, \\ \overleftarrow{B}' \overleftarrow{B} &= \overleftarrow{\{A_2 A_1' A_1 A_2'\}} = \overleftarrow{A_2 A_2'}. \end{aligned} \right\} \quad (133)$$

С учётом формул (61), (62) и (132), (133) имеем:

$$\left. \begin{aligned} K_{1,2}[(A_1 A_2' A_2 A_1'), r] &= \det(A_2' A_2) \cdot K_{1,2}(A_1 A_1', r), \\ K_{1,2}[(A_2 A_1' A_1 A_2'), r] &= \det(A_1' A_1) \cdot K_{1,2}(A_2 A_2', r). \end{aligned} \right\} \quad (134)$$

Пусть теперь ранг обеих прямоугольных матриц может отличаться, но  $r_1 + r_2 \leq n$ . Определим их *внешнюю суперпозицию* как  $\{A_1 | A_2\}$ . Обобщая (123), вводим *синусное отношение*:

$$\begin{aligned} |\{A_1 | A_2\}|_{\sin} &= \mathcal{M}t(r_1 + r_2)\{A_1 | A_2\} / \mathcal{M}t(r_1)A_1 \cdot \mathcal{M}t(r_2)A_2 = \\ &= \sqrt{\det \begin{pmatrix} A_1' A_1 & A_1' A_2 \\ A_2' A_1 & A_2' A_2 \end{pmatrix}} / \sqrt{\det(A_1' A_1)} \cdot \sqrt{\det(A_2' A_2)} \geq 0. \end{aligned} \quad (135)$$

Оно обобщает классическое соотношение (124) для синуса угла между векторами  $\mathbf{a}_1$  и  $\mathbf{a}_2$ . Синусное отношение имеет природу полуопределённой нормы. Отметим также, что с использованием миноранта теорема Кронекера – Капелли естественным образом обобщается на матричные линейные уравнения типа (105) – (107) в формульном виде:

$$\mathcal{M}t^2 (r_1 + r_2 + 1) \begin{array}{|c|c|} \hline A_1 & A \\ \hline Z & A_2 \\ \hline \end{array} = 0 \leftrightarrow \dot{\Delta} = Z. \quad (136)$$

### § 3.3. Косинусные характеристики матриц

Далее определим ещё одну высшую скалярную характеристику, но только для квадратной матрицы – *дианаль*:

$$\mathcal{D}l(r) B = k(B, r) = \mathcal{D}l(r) B'.$$

Используя понятия минорант и дианаль, определим другую скалярную тригонометрическую характеристику – *косинусное отношение*:

$$|\{B\}|_{\cos} = |\mathcal{D}l(r) B| / \mathcal{M}t(r) B \geq 0, \quad (137)$$

которое имеет природу косинусной полуопределённой нормы. Нетрудно видеть, что это отношение равно 0 для нуль-дефектной матрицы ( $r' < r$ , или  $s' > s$ ) и 1 для нуль-нормальной матрицы. В свою очередь,

$$\{B\}_{\cos} = \mathcal{D}l(r) B / \mathcal{M}t(r) B = \prod_{i=2}^{q_1} \mu_1^{s'_{1i}} / \prod_{j=2}^{q_2} \sigma_j^{s_{2j}}, \quad (138)$$

причём  $\sigma_j^2$  – собственные значения гомомultiпликаций  $BB'$  или  $B'V$ . Если  $A_1$  и  $A_2$  суть  $n \times m$ -матрицы, то

$$\begin{aligned} \{A_1 \cdot A_2'\}_{\cos} &= \mathcal{D}l(r) (A_1 \cdot A_2') / \mathcal{M}t(r) (A_1 \cdot A_2') = \\ &= \mathcal{D}l(r) (A_2 \cdot A_1') / \mathcal{M}t(r) (A_2 \cdot A_1'). \end{aligned} \quad (139)$$

Если же  $A_1$  и  $A_2$  –  $n \times r$ -матрицы, то, согласно (120) и (132), имеем:

$$\begin{aligned} \{A_1 \cdot A_2'\}_{\cos} &= \mathcal{D}l(r) (A_1 \cdot A_2') / \mathcal{M}t(r) A_1 \cdot \mathcal{M}t(r) A_2 = \\ &= \det (A_1' \cdot A_2) / \sqrt{\det (A_1' A_1)} \cdot \sqrt{\det (A_2' A_2)}. \end{aligned} \quad (140)$$

Имеем:  $\mu_i (A_1 \cdot A_2') = \mu_i (A_1' \cdot A_2)$ ,  $\sigma_j (A_1 \cdot A_2') = \sigma_j (A_1' \cdot A_2)$ , а (140) обобщает формулу для косинуса угла между векторами  $\mathbf{a}_1$  и  $\mathbf{a}_2$ :

$$-1 \leq \cos \varphi_{12} = \text{tr} (\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2') / \mathcal{M}t(1) \mathbf{a}_1 \cdot \mathcal{M}t(1) \mathbf{a}_2 = \mathbf{a}_1' \cdot \mathbf{a}_2 / \|\mathbf{a}_1\| \cdot \|\mathbf{a}_2\| \leq +1. \quad (141)$$

Тригонометрический смысл косинусного и синусного отношений устанавливается во втором разделе монографии на основе *матричного тригонометрического спектра*. Формулы (135) и (140) в обеих частях можно трактовать как идентичные алгебраические выражения синусной и косинусной природы для координат геометрических объектов  $A_1$  и  $A_2$ . Для векторов  $\mathbf{a}_1$  и  $\mathbf{a}_2$  (135) и (140) дают ряд алгебраических неравенств и тождеств. Их классические примеры: неравенства Адамара (синусное – например, в варианте (125) при  $r = 2$ ) и Коши (косинусное), синусно-косинусное тождество Лагранжа, также для пары векторов. Например:

$$[\text{Mt}(2)\{\mathbf{a}_1|\mathbf{a}_2\}/\text{Mt}(1)\mathbf{a}_1 \cdot \text{Mt}(1)\mathbf{a}_2]^2 + [\mathbf{a}'_1 \cdot \mathbf{a}_2/\text{Mt}(1)\mathbf{a}_1 \cdot \text{Mt}(1)\mathbf{a}_2]^2 = 1. \quad (142)$$

Формула (142) является основой для нормирования или измерения угла между векторами в евклидовом пространстве. Все дальнейшие родственные понятия рассматриваются во втором разделе монографии применительно к линейным объектам – более общим, чем векторы.

### § 3.4. Предельные методы вычисления проекторов и квазиобратных матриц

Согласно (1) и (101), справедливы предельные формулы:

$$A^+ = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [A' \cdot (AA' + \varepsilon I)^{-1}] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [(A'A + \varepsilon I)^{-1} \cdot A'] = \quad (143)$$

$$= \lim_{N \rightarrow \infty} [N \cdot A' \cdot (N \cdot AA' + I)^{-1}] = \lim_{N \rightarrow \infty} [(N \cdot A'A + I)^{-1} \cdot N \cdot A']. \quad (144)$$

Здесь используется то обстоятельство, что из  $\overrightarrow{A'A \cdot A'} = Z = \overrightarrow{A' \cdot AA'}$  следует соотношение  $K_1(A'A, r) \cdot A' = Z = A' \cdot K_1(AA', r)$ . Как и общие формулы (71)–(73), частные предельные формулы (143), (144) получены здесь чисто алгебраическим путём, то есть через резольвенту (1).

Впервые же нормальное решение линейного уравнения типа  $A\mathbf{x} = \mathbf{a}$  в форме предела получил Тихонов [44], но функциональным способом. При этом был использован его же метод регуляризации применительно к задаче на условный экстремум частного характера. А именно: найти значение аргумента с минимумом евклидовой нормы на множестве, соответствующем минимуму невязки уравнения:

$$U(\mathbf{x}, \varepsilon) = \varepsilon F_1(\mathbf{x}) + F_2(\mathbf{x}) = \min_{(\varepsilon \rightarrow 0)}, \quad dU/d\mathbf{x} = \mathbf{0}_{(\varepsilon \rightarrow 0)} \quad (145)$$

$$(F_1(\mathbf{x}) = \mathbf{x}' \cdot \mathbf{x}; \quad F_2(\mathbf{x}) = \delta'(\mathbf{x}) \cdot \delta(\mathbf{x}), \quad \delta(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} - \mathbf{a}).$$

Аналогичный результат, но в форме предела (144), мог быть получен математиками ещё раньше методом штрафных функций Куранта [16]:

$$W(\mathbf{x}, N) = F_1(\mathbf{x}) + N F_2(\mathbf{x}) = \min_{(N \rightarrow \infty)}; \quad dW/d\mathbf{x} = \mathbf{0}_{(N \rightarrow \infty)}. \quad (146)$$

Эти два метода решения связаны взаимно-однозначно через умножение или деление на соответствующий скалярный параметр. В свою очередь, метод штрафных функций Куранта решает задачу на условный экстремум  $F_1(\mathbf{x})$  с градиентной  $(1 \times n)$ -функцией ограничений  $\mathbf{h}(\mathbf{x}) = dF_2/d\mathbf{x} = \mathbf{0}$ . Интегрирование позволяет в таком случае перейти от обычной векторной к новой и тождественной ей скалярной форме ограничения:

$$h(\mathbf{x}) = \int_{x_s}^{\mathbf{x}} \mathbf{h}'(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0 = \text{const} . \quad (147)$$

Тогда имеем в (146) функцию Лагранжа  $W(\mathbf{x}, N)$  и единственный в ней скалярный множитель Лагранжа  $N \rightarrow \infty$ , так как при этом из дифференциального уравнения в (146) следует, что

$$dh/d\mathbf{x} \cdot N = \mathbf{h}'(\mathbf{x}) \cdot N = \mathbf{0} \cdot N = -dF_1/d\mathbf{x} \neq \mathbf{0}, \text{ откуда } N \rightarrow \infty .$$

Например, указанные два частных предельных метода применимы к решению задачи на условный экстремум  $F_1(\mathbf{x})$  на области стационарности  $F_2(\mathbf{x})$ . Данные цепочки (145), (146) можно продолжить в форме многочлена от  $\varepsilon$  или от  $N$ . Достаточное условие применимости этих двух предельных методов в дифференциальной форме (с малым или с большим параметром) есть, согласно (147), интегрируемость  $1 \times n$ -вектор-функции ограничений, а, следовательно, симметричность  $n \times n$ -матрицы Якоби:  $d\mathbf{h}/d\mathbf{x} = (d\mathbf{h}/d\mathbf{x})'$ . В случае нормального решения уравнения  $A\mathbf{x} = \mathbf{a}$  указанная матрица Якоби есть матрица  $A$ .

В предельном методе оптимизации дифференциальные уравнения  $\varepsilon \cdot dF_1/d\mathbf{x} + \mathbf{h}'(\mathbf{x}) = \mathbf{0}_{(\varepsilon \rightarrow 0)}$  и  $dF_1/d\mathbf{x} + N \cdot \mathbf{h}'(\mathbf{x}) = \mathbf{0}_{(N \rightarrow \infty)}$  дают полное решение, соответствующее условной стационарности функции  $F_1(\mathbf{x})$  при ограничении  $\mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ , тогда и только тогда, когда матрица Якоби от вектор-функции ограничений  $\mathbf{h}(\mathbf{x})$  является нуль-нормальной, т.е.  $\langle \ker d\mathbf{h}/d\mathbf{x} \rangle \equiv \langle \ker (d\mathbf{h}/d\mathbf{x})' \rangle$  (в точке стационарности для  $1 \times n$ -вектора условного градиента, очевидно, имеем:  $dF_1/d\mathbf{x} \cdot \overrightarrow{d\mathbf{h}/d\mathbf{x}} \in \langle \ker d\mathbf{h}/d\mathbf{x} \rangle$ ); характер условной стационарности  $F_1(\mathbf{x})$  задаёт предельная условная матрица Гессе с точностью до скалярного множителя  $\varepsilon$  или  $N$ .

В частности, этот метод даёт весьма просто явное решение задачи на условный экстремум функции второго порядка  $Q(\mathbf{x})$  при линейном ограничении  $Bm \cdot \mathbf{x} = \mathbf{a}$ . Для квазиобратной матрицы Мура – Пенроуза  $Bm^+$  имеем предельное значение, согласно (73) и (104). Аффинную квазиобратную матрицу находим тем же функциональным способом, используя вспомогательное линейное преобразование базиса, приводящее нуль-простую матрицу Якоби к нуль-нормальной форме с учётом (69) и (104):

$$\begin{aligned} \text{Вр} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{a} &\rightarrow \{T \cdot \text{Вр} \cdot T^{-1}\} \cdot T\mathbf{x} = T\mathbf{a} \sim Bm \cdot T\mathbf{x} = T\mathbf{a} \rightarrow (\dot{T}\mathbf{x}) = Bm^+ \cdot T\mathbf{a} \rightarrow \\ &\rightarrow \dot{\mathbf{x}} = \{T^{-1} \cdot Bm^+ \cdot T\} \cdot \mathbf{a} = \text{Вр}^- \cdot \mathbf{a} . \end{aligned}$$

## Глава 4. Два альтернативных варианта комплексификации

### § 4.1. Сопоставление основных вариантов

В силу природы комплексных чисел реализуются два принципиально различных подхода к математическим операциям с исходно заданными комплексными элементами. Эти операции в целом определяют сущность комплексификации.

*Адекватный подход* заключается в том, что комплексные элементы подвергают тем же операциям, которые применяют для вещественных элементов. Такой вариант комплексификации даёт возможность, как правило, использовать общие результаты, полученные для вещественных понятий. Исключением при этом являются отношения типа неравенств, разумеется, не для заведомо вещественных параметров, а также модульные характеристики. Особый частный случай тут отвечает *псевдоизации*, когда простейшие комплексные элементы вещественные и мнимые.

*Симбиозный подход*, помимо указанных операций, применяет для некоторых простых и сложных комплексных элементов независимое от других операций комплексное сопряжение. В частности, *эрмитов подход* к комплексному векторному и матричному исчислению сопровождает каждую операцию транспонирования сложных элементов (векторов, матриц) дополнительно комплексным сопряжением. Эрмитов вариант комплексификации даёт возможность использовать в самосопряжённой форме понятия вещественного положительного модуля или нормы, а также сохранить в той же форме основные отношения типа неравенств.

Эти альтернативные варианты определяют два пути дальнейшего развития теорий и их приложений в комплексных пространствах. Так, соотношение  $\langle \text{im } B \rangle \equiv \langle \text{im } B' \rangle$  задаёт *адекватно нуль-нормальные*, а соотношение  $\langle \text{im } B \rangle \equiv \langle \text{im } B^* \rangle$  – *эрмитово нуль-нормальные* комплексные матрицы. Адекватно и эрмитово ортогональные проекторы матрицы, а также квазиобратная матрица определяются различно с учётом формул (98)–(101). Адекватные комплексные характеристики существуют не всегда в той форме, в которой существуют эрмитовы. Например,  $\text{Mt}^2(r)A = k(AA', r) = k(A'A, r)$  для комплексной матрицы  $A$ , где  $r = \text{rang } A$ , может иметь любые комплексные значения, в том числе ноль.

Однако у псевдоизированных матричных объектов  $A$ , в том числе векторов, (элементы которых или вещественные, или мнимые) квадрат миноранта может быть – либо положительным, либо отрицательным, либо нулевым. С другой стороны, в эрмитовом варианте:  $k(AA^*, t) = k(A^*A, t) > 0, t \leq r$ . В любом случае все комплексные проекторы (идемпотентные матрицы) суть спектрально неотрицательные матрицы (их  $\mu_i$  – нули и единицы). *Аффинные* проекторы и квазиобратная матрица не зависят от варианта комплексификации. Для *несингулярной*  $B: \langle \text{im } B \rangle \equiv \langle \text{im } B' \rangle \equiv \langle \text{im } B^* \rangle$ . Поэтому комплексная обратная матрица определяется однозначно.

К трём скалярным формам представления комплексного числа «а» (алгебраическая, тригонометрическая и показательная) и к векторной форме добавим вещественную *нормальную*  $2 \times 2$ -матричную форму  $W$ , которая не содержит мнимой единицы. Она также однозначная:

$$\left. \begin{aligned} W(a) \\ \begin{array}{|c|c|} \hline p & -q \\ \hline q & p \\ \hline \end{array} &= \rho \cdot \begin{array}{|c|c|} \hline \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \hline \sin \varphi & \cos \varphi \\ \hline \end{array} = S + K, \\ (a = p + iq) \\ \\ W(\bar{a}) = W'(a) \\ \begin{array}{|c|c|} \hline p & q \\ \hline -q & p \\ \hline \end{array} &= \rho \cdot \begin{array}{|c|c|} \hline \cos \varphi & \sin \varphi \\ \hline -\sin \varphi & \cos \varphi \\ \hline \end{array} = S - K, \\ (\bar{a} = p - iq) \end{aligned} \right\} [W(a)W'(a) = W'(a)W(a)] \quad (148)$$

где  $S = S', K = -K', SK = KS$ . Форма (148) представляет число «а» геометрически в *вещественном* декартовом базисе евклидова пространства  $\langle \mathcal{E}^{2 \times 2} \rangle$ . Вещественные представления типа (148), как и комплексные, коммутативны и удовлетворяют также всем формулам и тождествам для комплексных чисел. Они образуют транспонированные по отношению друг к другу пары-аналоги комплексных сопряжённых пар. Более общий вывод: вещественная *нормальная*  $n \times n$ -матрица  $M$  представляет в  $\langle \mathcal{E}^{n \times n} \rangle$  геометрически в некотором декартовом базисе  $2k \leq [n]$  комплексных чисел и  $(n - 2k)$  вещественных чисел, причём  $M = R \cdot W \cdot R'$ . *Простая вещественная* матрица представляет те же числа в некотором аффинном базисе:  $P = V \cdot W \cdot V^{-1}$ . Матрица  $W$ , как известно [14], есть каноническая вещественная монобинарная *нормальная форма*, включающая в прямой сумме только  $1 \times 1$ - и  $2 \times 2$ -клетки. Она с точностью до перестановок этих клеток является здесь простейшим *вещественным* решением векового уравнения матриц  $M$  и  $P$ , то есть  $c(\mu) = 0$ . Применяя к простой матрице теорему Гамильтона – Кэли, получаем:  $V^{-1} \cdot \{c(P)\} \cdot V = c(W) = Z$ .

Далее на основе  $W$ -формы (148) осуществляем комплексификацию матричной формы числа «а» – либо по адекватному варианту, либо по эрмитову варианту, где нормальная структура  $W$ -формы сохраняется.



В первом, адекватном варианте комплексификации имеем:

$$\left. \begin{aligned} W(z_1) \\ \begin{array}{|c|c|} \hline u & -v \\ \hline v & u \\ \hline \end{array} = \rho \cdot \begin{array}{|c|c|} \hline \cos \psi & -\sin \psi \\ \hline \sin \psi & \cos \psi \\ \hline \end{array} = S + K, \\ (z_1 = u + iv) \\ W(z_2) = W'(z_1) \\ \begin{array}{|c|c|} \hline u & v \\ \hline -v & u \\ \hline \end{array} = \rho \cdot \begin{array}{|c|c|} \hline \cos \psi & \sin \psi \\ \hline -\sin \psi & \cos \psi \\ \hline \end{array} = S - K. \\ (z_2 = u - iv) \end{aligned} \right\} [W(z)W'(z) = W'(z)W(z)] \quad (149)$$

Адекватная нормальная  $W$ -форма (149) реализуется в адекватно декартовом базисе комплексного евклидова пространства  $\langle \mathcal{E}^{2 \times 2} \rangle$ . Комплексная адекватно нормальная матрица  $M = R \cdot W \cdot R'$  может представить удвоенное количество комплексных чисел ( $z_1$  и  $z_2$ ) в тех же базисах. Элементы её  $W$ -формы – комплексные числа. Упрощение адекватно нормальной матрицы путём комплексного адекватно ортогонального модального преобразования  $R$  возможно до её канонической  $W$ -формы.

Во втором, эрмитовом варианте комплексификации имеем:

$$\left. \begin{aligned} W(z) \\ \begin{array}{|c|c|} \hline u & -\bar{v} \\ \hline v & \bar{u} \\ \hline \end{array} = H + Q, \\ (z = u + iv) \\ W^*(z) = W'(\bar{z}) \\ \begin{array}{|c|c|} \hline \bar{u} & \bar{v} \\ \hline -v & u \\ \hline \end{array} = H - Q, \\ (\bar{z} = \bar{u} - i\bar{v}) \end{aligned} \right\} [W(z)W^*(z) = W^*(z)W(z)] \quad (150)$$

$H = H^*$ ,  $Q = -Q^*$ ,  $HQ = QH$ . Эрмитово нормальная  $W$ -форма (150) реализуется в эрмитово декартовом базисе унитарного пространства  $\langle \mathcal{U}^{2 \times 2} \rangle$ . Её два собственных значения суть комплексные сопряжённые числа как в (148). Следовательно, эта комплексная нормальная форма переводится в вещественную  $W$ -форму (148) неким модальным эрмитово ортогональным преобразованием  $U$ . Полное множество  $\langle U \cdot W \cdot U^* \rangle$  есть специфическое множество комплексных нормальных матриц, которые могут быть преобразованы модально в канонические формы типа (150) и (148). Эти нормальные матрицы представляют интерес в эрмитовой тензорной тригонометрии. Их комплексные сопряжённые собственные значения суть  $d_t = \rho_t \cdot \exp(\pm i\beta_t)$ ;  $\rho_t = -\infty \div +\infty$ , а угол  $\beta_t = -\pi/2 \div +\pi/2$ . В том числе для эрмитово ортогональных матриц имеем  $d_t = \exp(\pm i\beta_t)$ . Также эти сопряженные пары элементов отвечают тригонометрической  $2 \times 2$ -клетке некоторой эрмитовой ротации для геометрического преобразования линейных элементов в базовом унитарном пространстве. Вообще же, комплексная нормальная матрица преобразуется в  $D$ -форму с элементами  $d_t = \rho_t \cdot \exp(i\beta_t)$ . (Подробнее об этом – см. в гл. 10.)

## § 4.2. Примеры адекватной комплексификации

Характерными примерами адекватной комплексификации являются формулы решений алгебраических уравнений с комплексными коэффициентами; комплексные аналитические функции и разные тождества, комплексные дифференциалы, интегралы; тригонометрические формулы для комплексных углов. В комплексном пространстве, метризуемом по адекватному варианту, неизбежно получаются комплексные меры для протяжённости и угла. Хотя в псевдоевклидовом пространстве, в силу его бинарной структуры, реализуются вещественные и мнимые меры. Укажем в нём адекватные *псевдоаналоги*: псевдоевклидова геометрия, включая тригонометрию; псевдосферическая геометрия на  $2x$  сферах – мнимого и вещественного радиуса. (Подробнее об этом – см. в гл. 12.)

Рассмотрим, как примеры, использование адекватной комплексификации в теории аналитических функций комплексного аргумента. Пусть  $\mathbf{z} = \mathbf{x} + i\mathbf{y}$ , где  $\mathbf{z}$ ,  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{y}$  –  $n \times 1$ -вектор-аргументы:  $\mathbf{z}$  в комплексном, а  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{y}$  в вещественном  $n$ -мерных евклидовых пространствах;  $F(\mathbf{z}) = F_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + iF_2(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  – скалярная комплексная аналитическая функция от  $\mathbf{z}$ . Дифференцирование и интегрирование в евклидовом пространстве по  $n \times 1$ -вектор-аргументу осуществляется в декартовых координатах. Адекватные аналоги исходно имеют место для полных производных, дифференциалов и интегралов. Отсюда далее легко выводятся частные характеристики и устанавливается их взаимосвязь:

$$dF = \mathbf{h}(\mathbf{z})d\mathbf{z} \leftrightarrow dF = dF_1 + idF_2 = (\mathbf{h}_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + i\mathbf{h}_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}))(d\mathbf{x} + id\mathbf{y}) =$$

$$= [\mathbf{h}_1(\mathbf{x}, \mathbf{y})d\mathbf{x} - \mathbf{h}_2(\mathbf{x}, \mathbf{y})d\mathbf{y}] + i[\mathbf{h}_1(\mathbf{x}, \mathbf{y})d\mathbf{y} + \mathbf{h}_2(\mathbf{x}, \mathbf{y})d\mathbf{x}],$$

где  $1 \times n$ -вектор-производные (частные градиенты) составляют пары:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{h}_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \frac{\partial F_1}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial F_2}{\partial \mathbf{y}}, \\ \mathbf{h}_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= -\frac{\partial F_1}{\partial \mathbf{y}} = \frac{\partial F_2}{\partial \mathbf{x}} \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

– уравнения Д'Аламбера–Эйлера в векторной форме (для скалярной функции  $F_1(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  и  $F_2(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ ). Повторим ту же схему для  $1 \times n$ -вектор-функции  $\mathbf{h}(\mathbf{z}) = \mathbf{h}_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + i\mathbf{h}_2(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ , т. е. полной 1-й производной от  $F$ :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{h}_1}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial \mathbf{h}_2}{\partial \mathbf{y}} = \frac{\partial^2 F_1}{\partial \mathbf{x}^2} = -\frac{\partial^2 F_1}{\partial \mathbf{y}^2} = \frac{\partial^2 F_2}{\partial \mathbf{x} \partial \mathbf{y}} = \frac{\partial^2 F_2}{\partial \mathbf{y} \partial \mathbf{x}} = \left[ \frac{\partial \mathbf{h}_1}{\partial \mathbf{x}} \right]' \\ \frac{\partial \mathbf{h}_1}{\partial \mathbf{y}} = -\frac{\partial \mathbf{h}_2}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial^2 F_2}{\partial \mathbf{y}^2} = -\frac{\partial^2 F_2}{\partial \mathbf{x}^2} = \frac{\partial^2 F_1}{\partial \mathbf{y} \partial \mathbf{x}} = \frac{\partial^2 F_1}{\partial \mathbf{x} \partial \mathbf{y}} = \left[ \frac{\partial \mathbf{h}_1}{\partial \mathbf{y}} \right]' \end{aligned} \right\} \quad (b)$$

Первые два члена в цепочках этих равенств составляют уравнения Д'Аламбера–Эйлера в матричной форме (для дифференцируемой по комплексному аргументу  $\mathbf{z}$  вектор-функции  $\mathbf{h}$ ). Наряду с симметричностью тут частных матриц Якоби (ввиду симметричности матриц Гессе), они же формулируют необходимые и достаточные условия полноты дифференциалов для  $F$  (2-го) и для  $h$  (1-го). Отсюда для данных аналитических функций  $F_1$  и  $F_2$  (от двух вещественных аргументов) одновременно вытекают 2-мерные уравнения Лапласа в *матричной* форме.

В псевдоевклидовом пространстве (здесь в бинарной комплексной форме), в силу особенности его бинарной структуры, вышеуказанные характеристики и соотношения в некоторой степени видоизменяются:

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ i\mathbf{y} \end{bmatrix}; \quad dF = \mathbf{h}(\mathbf{z}) d\mathbf{z} \leftrightarrow dF = dF_1 + idF_2 =$$

$$= \left( \begin{bmatrix} \mathbf{h}_1 & \mathbf{t}_1 \end{bmatrix} + i \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{h}_2 & \mathbf{t}_2 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} d\mathbf{x} \\ i d\mathbf{y} \end{bmatrix} = [\mathbf{h}_1(\mathbf{x}, \mathbf{y})d\mathbf{x} - \mathbf{t}_2(\mathbf{x}, \mathbf{y})d\mathbf{y}] +$$

$$+ i \cdot [\mathbf{t}_1(\mathbf{x}, \mathbf{y})d\mathbf{y} + \mathbf{h}_2(\mathbf{x}, \mathbf{y})d\mathbf{x}],$$

где  $\mathbf{h}_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\partial F_1}{\partial \mathbf{x}}$ ,  $\mathbf{h}_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\partial F_2}{\partial \mathbf{x}}$ ,  $\mathbf{t}_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\partial F_2}{\partial \mathbf{y}}$ ,  $\mathbf{t}_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\frac{\partial F_1}{\partial \mathbf{y}}$ ; (а')

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{h}_1}{\partial \mathbf{x}} &= \frac{\partial^2 F_1}{\partial \mathbf{x}^2} = \left( \frac{\partial \mathbf{h}_1}{\partial \mathbf{x}} \right)', & \frac{\partial \mathbf{t}_1}{\partial \mathbf{y}} &= \frac{\partial^2 F_2}{\partial \mathbf{y}^2} = \left( \frac{\partial \mathbf{t}_1}{\partial \mathbf{y}} \right)', \\ \frac{\partial \mathbf{h}_2}{\partial \mathbf{x}} &= \frac{\partial^2 F_2}{\partial \mathbf{x}^2} = \left( \frac{\partial \mathbf{h}_2}{\partial \mathbf{x}} \right)', & \frac{\partial \mathbf{t}_2}{\partial \mathbf{y}} &= -\frac{\partial^2 F_1}{\partial \mathbf{y}^2} = \left( \frac{\partial \mathbf{t}_2}{\partial \mathbf{y}} \right)', \\ \frac{\partial \mathbf{h}_1}{\partial \mathbf{y}} &= \frac{\partial^2 F_1}{\partial \mathbf{x} \partial \mathbf{y}} = \left( \frac{\partial^2 F_1}{\partial \mathbf{y} \partial \mathbf{x}} \right)' = -\left( \frac{\partial \mathbf{t}_2}{\partial \mathbf{x}} \right)', \\ \frac{\partial \mathbf{t}_1}{\partial \mathbf{x}} &= \frac{\partial^2 F_2}{\partial \mathbf{y} \partial \mathbf{x}} = \left( \frac{\partial^2 F_2}{\partial \mathbf{x} \partial \mathbf{y}} \right)' = \left( \frac{\partial \mathbf{h}_2}{\partial \mathbf{y}} \right)' \end{aligned} \right\} \quad (б')$$

Отметим, что здесь теперь нет требования к гармоничности функций  $F_1(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  и  $F_2(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  по Лапласу (от 2-х переменных).

Ранее использованные понятия также имеют адекватные аналоги, в том числе неравенства для заведомо вещественных параметров. (Среди последних – ранг, 1-й и 2-й рок). Параллельность линейных объектов, как известно, – аффинное понятие. Именно поэтому она не зависит от выбора варианта комплексификации. Но оптимальные процедуры проверки параллельности объектов для вещественного и комплексного пространства различаются.

Пусть, например, две  $n \times m$ -матрицы  $A_1$  и  $A_2$  задают линейные подпространства (или линейные объекты – *линеоры*) в аффинном пространстве  $\langle \mathcal{A}^n \rangle$ . Чтобы использовать в процедуре проверки их параллельности собственные характеристические симметричные проекторы, нужно перейти к тождественным по образу  $n \times n$ -матрицам  $\langle \text{im } AC \rangle \equiv \langle \text{im } A \rangle$ , где  $C$  –  $m \times n$ -матрица с требованиями:

$$1) \langle \text{im } C \rangle \cap \langle \ker A \rangle = \mathbf{0} \leftrightarrow \text{rang } AC = \text{rang } A; \quad 2) k(AC, r) \neq 0.$$

В частности, для вещественного пространства выбирают  $C = A'$ , а для комплексного пространства лучше выбрать  $C = A^*$ . Вообще же имеют место критериальные отношения параллельности:

$$\begin{aligned} 1) \langle \text{im } A_2 \rangle \subseteq \langle \text{im } A_1 \rangle &\leftrightarrow \overleftarrow{A_1} \overrightarrow{C_1} \cdot A_2 = A_2 \leftrightarrow \overleftarrow{A_1} \overrightarrow{C_1} \cdot A_2 = Z; \\ \langle \text{im } A_1 \rangle \subseteq \langle \text{im } A_2 \rangle &\leftrightarrow \overleftarrow{A_2} \overrightarrow{C_2} \cdot A_1 = A_1 \leftrightarrow \overleftarrow{A_2} \overrightarrow{C_2} \cdot A_1 = Z. \\ 2) \langle \text{im } A_2 \rangle \equiv \langle \text{im } A_1 \rangle &\leftrightarrow \overleftarrow{A_1} \overrightarrow{C_1} \cdot A_2 = Z = \overleftarrow{A_2} \overrightarrow{C_2} \cdot A_1. \end{aligned}$$

С другой стороны, ортогональность – понятие, связанное с выбором метрики. Для комплексного евклидова пространства ортогональность линейных объектов определяется в адекватном варианте:

$$\langle \text{im } A_1 \rangle \perp \langle \text{im } A_2 \rangle \leftrightarrow A_1' \cdot A_2 = Z = A_2' \cdot A_1;$$

для комплексного унитарного пространства – в эрмитовом варианте:

$$\langle \text{im } A_1 \rangle \perp \langle \text{im } A_2 \rangle \leftrightarrow A_1^* \cdot A_2 = Z = A_2^* \cdot A_1.$$

### § 4.3. Примеры эрмитовой комплексификации

Укажем примеры эрмитовой комплексификации. Это принцип максимума модуля, справедливый в том числе для вектор-функций; результаты, изложенные ранее с использованием операции транспонирования, включая неравенства (123), (124) и (141); неравенство Адамара и отвечающее ему неравенство (125) для миноранта – все в самосопряжённой форме. В тригонометрии на плоскости в унитарном пространстве особо важное значение имеют самосопряжённые аналоги неравенств Адамара и Коши, на основе которых определяются скалярные эрмитово сферические тригонометрические функции бинарных углов между векторами. Более конкретно: продуцируются косинусное и синусное нормирующие неравенства для угла между двумя векторами на плоскости в унитарном пространстве.

Кроме того, в унитарном пространстве широко используются как эрмитовы аналоги вещественные положительно определённые меры: нормы протяжённости, площади, объёма (в 3-х измерениях) и угла.

Теорема Кронекера – Капелли в ранее полученных её формульных вариантах (122), (136) определяется минорантным признаком и поэтому они справедливы только в эрмитовом варианте комплексификации.

Более общий по сравнению с эрмитовым симбиозный подход, определённый в начале главы, в применении к теории аналитических функций и к основным операциям анализа (ортогональное дифференцирование и интегрирование) в комплексном пространстве приводит к симбиозным аналогам. Это вызывает особые правила своеобразного *сопряжённого дифференцирования и интегрирования*; особые условия дифференцируемости и аналитичности функций от сопряжённых аргументов  $\mathbf{x}$  и  $\bar{\mathbf{x}}$  и особые условия интегрируемости дифференциальных выражений (полноты дифференциала); симбиозные аналоги методов решения задач на безусловный и условный экстремум вещественной скалярной функции. Последняя необходимо симметрична по отношению к сопряжённым аргументам. По сути этот подход есть дальнейшее развитие известной идеи формальных производных (см. например, [12, с. 48-49]) для анализа неголоморфных, в том числе особо важных *вещественных* функций комплексных переменных.

Для иллюстрации таковых функций в данной монографии можно указать конкретные примеры: квадрат эрмитова модуля невязки (116) комплексного линейного уравнения – модульная функция  $\| \mathbf{Ax} - \mathbf{a} \|^2$ ; а также вещественные, в том числе положительные, коэффициенты алгебраического уравнения степени  $n$ , причём имеющие комплексные сопряжённые корни, – немодульные функции от аргументов-корней  $\mu_i$ .

Например, используя эрмитов вариант модуля невязки комплексного линейного уравнения и предельный метод решения задачи на условный экстремум (§§ 2.5 и 3.4), приходим к функциональному способу вывода обеих предельных формул (143) и (144) для комплексной квазиобратной матрицы Мура – Пенроуза.

Далее переходим к изложению основной части данной монографии, а именно, тензорной тригонометрии.

## Раздел II. Фундаментальное содержание тензорной тригонометрии

Сначала в главе 5 дана проективная версия евклидовой тензорной тригонометрии, развиваемая с применением собственных проекторов. Определяются проективные сферические функции и рефлекторы для тензорного угла между линеорами  $A_1$  и  $A_2$  или их образами – планарами ранга  $r_1$  и  $r_2$ . В иной проективной интерпретации тот же тензорный угол задаётся между образами и ядрами нуль-простых  $n \times n$ -матриц  $B$  и  $B'$  – планарами ранга  $r$ . Далее рассматривается каноническая структура тензорных тригонометрических функций и собственных рефлекторов. Определяется, с установлением его существенной роли в тензорной тригонометрии, понятие срединного рефлектора угла. Самостоятельным образом последний вводится как рефлектор-тензор квазиевклидова пространства, определяющий именно его тензорную тригонометрию, как базирующуюся на квадратичных метриках. В частности, с евклидовой метрикой он даёт бинарную структуру квазиевклидовой тригонометрии. На основе этого понятия далее осуществляется развитие ротационной (синусно-косинусной) и деформационной (тангенсно-секансной) формы квазиевклидовой тензорной тригонометрии, то есть её моторной версии. В главе 6 развивается псевдоевклидова тензорная тригонометрия с тем же рефлектор-тензором и с применением сферическо-гиперболических аналогий – абстрактной и конкретной. Дано полное решение псевдоевклидова прямоугольного треугольника на плоскости и в пространстве. Далее, в главе 7 на данной основе рассмотрена тригонометрическая природа коммутативности и антикоммутативности простых матриц. В главах 8 и 9 введены алгебраическим способом геометрические и тригонометрические квадратичные нормы ряда матричных объектов, обоснованные через тригонометрические спектры матриц и генеральные неравенства. В заключительных главах 10, 11 и 12 рассматривается тензорная тригонометрия в различных комплексных пространствах. Особое внимание уделено изучению движений в псевдоевклидовых пространствах, в том числе отдельно в пространстве Минковского.

## Глава 5. Тензорная евклидова и квазиевклидова тригонометрия

### § 5.1. Объекты тензорной тригонометрии и их пространственные взаимоотношения

Согласно аксиоме о континууме Кантора – Дедекинда [27, с. 99], аффинные геометрическое и арифметическое пространства одной и той же размерности находятся в отношении изоморфизма, что распространяется и на их метрические формы. Это является основанием для геометрической трактовки результатов, получаемых алгебраическим путём. Исходные элементы  $n$ -мерного аффинного пространства, по известному определению Вейля, есть точки и свободные векторы [11, с. 26–33; 1, с. 358]. Их координаты задаются в каком-либо базисе в виде наборов  $n$  чисел. Точки и векторы образуют геометрические объекты. Последние подразделяются на централизованные и нецентрализованные. Централизованные объекты имеют точку приложения в центре координат. Сопоставим в алгебраической и геометрической форме простейшие линейные объекты аффинного пространства:

вектор $\mathbf{a}$	–	отрезок прямой,
образ $\langle \text{im } \mathbf{a} \rangle$	–	прямая,
ядро $\langle \text{ker } \mathbf{a}' \rangle$	–	гиперплоскость,
$n \times r$ -линеор $A$ ( $\text{rang } A = r$ )	–	$r$ -симплекс,
образ $\langle \text{im } A \rangle$	–	планар ранга $r$ ,
ядро $\langle \text{ker } A' \rangle$	–	планар ранга $(n - r)$ .

Указанные объекты развиваемой тензорной тригонометрии имеют валентность 1. Валентность функций объектов может отличаться. Например, для внутренней и внешней мультипликации пары векторов соответствующие валентности равны 0 и 2:

$$\mathbf{a}'_1 \cdot \mathbf{a}_2 = c = \mathbf{a}'_2 \cdot \mathbf{a}_1; \quad \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}'_2 = B = \{\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}'_1\}' . \quad (151), (152)$$

Аффинные отношения планаров, включая параллельность, выражаются в виде:

$$\langle \text{im } A_1 \rangle \equiv \langle \text{im } A_2 \rangle \leftrightarrow \overleftarrow{A_1 A_1'} = \overleftarrow{A_2 A_2'} \leftrightarrow \overrightarrow{A_1 A_1'} = \overrightarrow{A_2 A_2'} \leftrightarrow \langle \ker A_1' \rangle \equiv \langle \ker A_2' \rangle \quad (153)$$

$$\begin{aligned} \langle \text{im } A_2 \rangle \subseteq \langle \text{im } A_1 \rangle &\leftrightarrow \overleftarrow{A_1 A_1'} \cdot \overleftarrow{A_2 A_2'} = \overleftarrow{A_1 A_1'} = \overleftarrow{A_2 A_2'} \cdot \overleftarrow{A_1 A_1'} \leftrightarrow \\ &\leftrightarrow \overleftarrow{A_1 A_1'} \cdot A_2 = A_2 \leftrightarrow \overrightarrow{A_1 A_1'} \cdot A_2 = Z = A_2' \cdot \overrightarrow{A_1 A_1'} \leftrightarrow \langle \ker A_1' \rangle \subseteq \langle \ker A_2' \rangle, \end{aligned} \quad (154)$$

$$\langle \text{im } A_2 \rangle \subseteq \langle \ker A_1' \rangle \leftrightarrow A_1' \cdot A_2 = Z = A_2' \cdot A_1 \leftrightarrow \quad (155)$$

$$\leftrightarrow \langle \text{im } A_1 \rangle \subseteq \langle \ker A_2' \rangle \rightarrow \langle \text{im } A_1 \rangle \cap \langle \text{im } A_2 \rangle = \mathbf{0},$$

( $r_1 + r_2 \leq n$ ), так как  $\langle \text{im } A \rangle \oplus \langle \ker A' \rangle \equiv \langle \mathcal{A}^n \rangle$ ;

$$\begin{aligned} \langle \ker A_1' \rangle \subseteq \langle \text{im } A_2 \rangle &\leftrightarrow \overleftarrow{A_2 A_2'} \cdot \overrightarrow{A_1 A_1'} = \overrightarrow{A_1 A_1'} \leftrightarrow \\ &\leftrightarrow \overrightarrow{A_2 A_2'} \cdot A_1 A_1' = Z = A_1 A_1' \cdot A_2 A_2' \leftrightarrow \langle \ker A_2' \rangle \subseteq \langle \text{im } A_1 \rangle \rightarrow \end{aligned} \quad (156)$$

$$\rightarrow \langle \ker A_1' \rangle \cap \langle \ker A_2' \rangle = \mathbf{0}, \quad (r_1 + r_2 \geq n).$$

С другой стороны, в евклидовом пространстве  $\langle \mathcal{E}^n \rangle$  отношения (155) и (156) в декартовом базисе  $\hat{E}$  определяют взаимную ортогональность соответствующих планаров (отдельно образов и ядер  $A_1, A_2$ ). Если линейные под-пространства задаются нуль-простыми матрицами (см. § 1.6), то можно также использовать характеристические аффинные проекторы. Например,

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle \text{im } Bp_1 \rangle \equiv \langle \text{im } Bp_2 \rangle \\ \langle \ker Bp_1 \rangle \equiv \langle \ker Bp_2 \rangle \end{array} \right\} \leftrightarrow \overleftrightarrow{Bp_1} = \overleftrightarrow{Bp_2}, \quad (157)$$

$$\langle \text{im } Bp_2 \rangle \subseteq \langle \text{im } Bp_1 \rangle \leftrightarrow \overleftarrow{Bp_1} \cdot Bp_2 = Bp_2 \leftrightarrow \quad (158)$$

$$\leftrightarrow \overrightarrow{Bp_1} \cdot Bp_2 = Z = Bp_2' \cdot \overrightarrow{Bp_1'} \leftrightarrow \langle \ker Bp_1' \rangle \subseteq \langle \ker Bp_2' \rangle.$$

(В формулах с обнулением вместо проекторов могут использоваться матричные характеристические коэффициенты.) Дальнейшее естественное развитие отношений типа (155), (156) состоит в нижеследующих формулировках (159) и (160). В первом случае имеем:

$$\begin{aligned} \langle \text{im } A_1 \rangle \cap \langle \text{im } A_2 \rangle = \mathbf{0} &\leftrightarrow \text{rang} (\overleftarrow{A_2 A_2'} - \overleftarrow{A_1 A_1'}) = r_1 + r_2 = \\ &= \text{rang} (\overrightarrow{A_1 A_1'} - \overrightarrow{A_2 A_2'}) \leq n, \end{aligned} \quad (159)$$

так как ядро матрицы  $(A_2 A_2' - A_1 A_1')$  есть ортогональное дополнение к прямой сумме образов  $\langle \text{im } A_1 \oplus \text{im } A_2 \rangle$  размерности  $s_1 = n - (r_1 + r_2)$ .



Во втором случае – в иной трактовке этой матрицы (а именно через дополнительные ортопроекторы) ядро  $(\overleftarrow{A_1 A_1'} - \overleftarrow{A_2 A_2'})$  есть пересечение ядер  $A_1'$  и  $A_2'$  размерности  $s_1 = (n - r_1) + (n - r_2) - n$ :

$$\begin{aligned} \langle \ker A_1' \rangle \cap \langle \ker A_2' \rangle = \mathbf{0} &\leftrightarrow \text{rang} (\overleftarrow{A_2 A_2'} - \overleftarrow{A_1 A_1'}) = \\ &= 2n - (r_1 + r_2) = \text{rang} (\overrightarrow{A_1 A_1'} - \overrightarrow{A_2 A_2'}) \leq n, \end{aligned} \quad (160)$$

так как ядро той же матрицы имеет размерность  $s_2 = (r_1 + r_2) - n$ . Соотношения (159) и (160) совместны тогда и только тогда, когда

$$\langle \text{im } A_1 \rangle \oplus \langle \text{im } A_2 \rangle \equiv \langle \mathcal{A}^n \rangle \equiv \langle \ker A_1' \rangle \oplus \langle \ker A_2' \rangle.$$

При этом вышеуказанная матрица в круглых скобках – несингулярная.

Аналогичным образом имеем:

$$\langle \text{im } A_1 \rangle \cap \langle \text{im } A_2 \rangle \neq \mathbf{0} \leftrightarrow \text{rang} (\overleftarrow{A_2 A_2'} - \overleftarrow{A_1 A_1'}) < r_1 + r_2, \quad (161)$$

$$\langle \ker A_1' \rangle \cap \langle \ker A_2' \rangle \neq \mathbf{0} \leftrightarrow \text{rang} (\overrightarrow{A_2 A_2'} - \overrightarrow{A_1 A_1'}) < 2n - (r_1 + r_2). \quad (162)$$

## § 5.2. Проективные тензорные синус, косинус и сферически ортогональные рефлекторы

Матричная характеристика

$$\sin \tilde{\Phi}_{12} = (\overleftarrow{A_2 A_2'} - \overleftarrow{A_1 A_1'}) = (\overrightarrow{A_1 A_1'} - \overrightarrow{A_2 A_2'}) = \sin' \tilde{\Phi}_{12} = -\sin \tilde{\Phi}_{21} \quad (163)$$

определяется как *проективный* тензорный синус угла  $\tilde{\Phi}_{12}$  между планарами  $\langle \text{im } A_1 \rangle$  и  $\langle \text{im } A_2 \rangle$  или линеорами  $A_1$  и  $A_2$ . Проективный характер угла и соответственно функции отмечается специальным знаком *тильды* сверху:

$$\tilde{\Phi}_{12} = (\tilde{\Phi}_{12})' = -\tilde{\Phi}_{21}. \quad (164)$$

Согласно (163), угол между  $\langle \text{im } A_1 \rangle$  и  $\langle \text{im } A_2 \rangle$  аддитивно противоположен углу между  $\langle \ker A_1' \rangle$  и  $\langle \ker A_2' \rangle$ . Вместе они образуют единую *бинарную* структуру угла  $\tilde{\Phi}_{12}$ . Например, тензорный синус для пары векторов или прямых выражается как

$$\sin \tilde{\Phi}_{12} = (\overleftarrow{\mathbf{a}_2 \mathbf{a}_2'} - \overleftarrow{\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_1'}) = \frac{\mathbf{a}_2 \mathbf{a}_2'}{\mathbf{a}_2' \mathbf{a}_2} - \frac{\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_1'}{\mathbf{a}_1' \mathbf{a}_1}. \quad (165)$$

В частности, на *евклидовой* плоскости он имеет структуру:

$$\sin \tilde{\Phi}_{12} = \sin \varphi_{12} \cdot \sqrt{I_{2 \times 2}}, \quad \sqrt{I_{2 \times 2}} = \mathbf{R} \cdot \begin{array}{|c|c|} \hline 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 \\ \hline \end{array} \cdot \mathbf{R}',$$

где  $\Phi_{12}$  отсчитывается против часовой стрелки (для правой системы декартовых координат),  $|\Phi_{12}| \leq \pi/2$ ;  $\mathbf{R}$  – ортогональная модальная матрица.

Условие  $\sin \tilde{\Phi}_{12} = \tilde{\Phi}_{12} = \tilde{Z}$  тождественно отношению параллельности (153), в том числе для нецентрализованных планаров:

$$\langle a_1 + \text{im } A_1 \rangle, \langle a_2 + \text{im } A_2 \rangle.$$

Отношения типа (154) также имеют тождественные тригонометрические аналоги:

$$\langle \text{im } A_1 \rangle \subseteq \langle \text{im } A_2 \rangle \leftrightarrow \sin^2 \tilde{\Phi}_{12} = + \sin \tilde{\Phi}_{12}, \quad (166)$$

$$\langle \text{im } A_2 \rangle \subseteq \langle \text{im } A_1 \rangle \leftrightarrow \sin^2 \tilde{\Phi}_{12} = - \sin \tilde{\Phi}_{12}. \quad (167)$$

Действительно,

$$\sin^2 \tilde{\Phi}_{12} = \overleftarrow{A_1 A_1'} \cdot \overrightarrow{A_2 A_2'} + \overleftarrow{A_2 A_2'} \cdot \overrightarrow{A_1 A_1'} = \overrightarrow{A_1 A_1'} \cdot \overleftarrow{A_2 A_2'} + \overrightarrow{A_2 A_2'} \cdot \overleftarrow{A_1 A_1'}. \quad (168)$$

$$\begin{aligned} \text{Далее, например, } [\langle \text{im } A_2 \rangle \subseteq \langle \text{im } A_1 \rangle] &\leftrightarrow [\overleftarrow{A_1 A_1'} \cdot \overrightarrow{A_2} = \overrightarrow{A_2}] \leftrightarrow [\overleftarrow{A_1 A_1'} \cdot \overleftarrow{A_2 A_2'} = \\ &= \overleftarrow{A_2 A_2'} = \overleftarrow{A_2 A_2'} \cdot \overleftarrow{A_1 A_1'} = \overleftarrow{A_2 A_2'} \cdot \overleftarrow{A_1 A_1'} \cdot \overleftarrow{A_2 A_2'}] \leftrightarrow [\sin^2 \tilde{\Phi}_{12} = - \sin \tilde{\Phi}_{12}]. \end{aligned}$$

В частном случае (166) тензорный синус есть симметричный проектор (собственные значения 0 и +1); в случае (167) он же – *антипроектор* (собственные значения 0 и -1).

В свою очередь, эквиванговые планары могут также задаваться сингулярной *квадратной* матрицей. При этом тензорный угол между  $\langle \text{im } B \rangle$  и  $\langle \text{im } B' \rangle$  аддитивно противоположен углу между  $\langle \ker B \rangle$  и  $\langle \ker B' \rangle$ . Вместе они образуют единую бинарную структуру проективного тензорного угла  $\tilde{\Phi}_B$ . Аналогично (163) и (164) имеем:

$$\sin \tilde{\Phi}_B = (\overleftarrow{B'B} - \overleftarrow{BB'}) = (\overrightarrow{BB'} - \overrightarrow{B'B}) = \sin' \tilde{\Phi}_B = - \sin \tilde{\Phi}_{B'}, \quad (169)$$

$$\tilde{\Phi}_B = (\tilde{\Phi}_B)' = - \tilde{\Phi}_{B'}; \quad (170)$$

$$\sin \tilde{\Phi}_B = \tilde{Z} \leftrightarrow \tilde{\Phi}_B = \tilde{\Phi}_{B'} = \tilde{Z} \leftrightarrow B \in \langle Bm \rangle.$$

Это условие *тригонометрически* определяет нуль-нормальные матрицы, которые были введены в § 2.4.

Аналогично, тригонометрические отношения между образом и ядром матрицы характеризует проективный тензорный косинус того же угла:

$$\begin{aligned} \cos \tilde{\Phi}_{12} &= (\overleftarrow{A_2 A_2'} - \overrightarrow{A_1 A_1'}) = (\overleftarrow{A_1 A_1'} - \overrightarrow{A_2 A_2'}) = (\overleftarrow{A_1 A_1'} + \overleftarrow{A_2 A_2'} - I) = \\ &= (I - \overrightarrow{A_1 A_1'} - \overrightarrow{A_2 A_2'}) = \cos' \tilde{\Phi}_{12} = \cos \tilde{\Phi}_{21} = \cos (- \tilde{\Phi}_{12}), \end{aligned} \quad (171)$$

$$\begin{aligned} \cos \tilde{\Phi}_B &= (\overleftarrow{BB'} - \overrightarrow{B'B}) = (\overleftarrow{B'B} - \overrightarrow{BB'}) = (\overleftarrow{BB'} + \overleftarrow{B'B} - I) = \\ &= (I - \overrightarrow{BB'} - \overrightarrow{B'B}) = \cos' \tilde{\Phi}_B = \cos \tilde{\Phi}_{B'} = \cos(-\tilde{\Phi}_B). \end{aligned} \quad (172)$$

В частности, для пары векторов и прямых на евклидовой плоскости имеем:

$$\cos \tilde{\Phi}_{12} = \cos \varphi_{12} \sqrt{I_{2 \times 2}}, \quad \sqrt{I_{2 \times 2}} = R \cdot \begin{array}{|c|c|} \hline +1 & 0 \\ \hline 0 & -1 \\ \hline \end{array} \cdot R' \quad (\cos \varphi_{12} \geq 0).$$

Тригонометрические аналоги условий (155), (156) вытекают из формулы

$$\cos^2 \tilde{\Phi}_{12} = \overleftarrow{A_1 A_1'} \cdot \overleftarrow{A_2 A_2'} + \overrightarrow{A_2 A_2'} \cdot \overrightarrow{A_1 A_1'} = \overrightarrow{A_1 A_1'} \cdot \overrightarrow{A_2 A_2'} + \overleftarrow{A_2 A_2'} \cdot \overleftarrow{A_1 A_1'}. \quad (173)$$

Вывод аналогичен (168), где косинус есть проектор или антипроектор

$$\left. \begin{aligned} \cos^2 \tilde{\Phi}_{12} &= + \cos \tilde{\Phi}_{12} \leftrightarrow (156), \\ \cos^2 \tilde{\Phi}_{12} &= - \cos \tilde{\Phi}_{12} \leftrightarrow (155). \end{aligned} \right\} \quad (174)$$

Тензорные тригонометрические функции проективного угла в метрической форме характеризуют пространственные угловые отношения между линейными или между планарами. В тензорном варианте косинус и синус основного  $\tilde{\Phi}$  и дополнительного  $\tilde{\Xi}$  до согласованного с ним прямого угла  $\tilde{\pi}/2$  также равны между собой:

$$\cos \tilde{\Phi} = \sin \tilde{\Xi} = \sin(\tilde{\pi}/2 - \tilde{\Phi}), \quad \sin \tilde{\Phi} = \cos \tilde{\Xi} = \cos(\tilde{\pi}/2 - \tilde{\Phi}). \quad (175)$$

В аффинном пространстве угол не имеет количественного смысла за исключением, когда он нулевой или открытый. В евклидовом пространстве  $\langle \mathcal{E}^n \rangle$  прямые тензорные углы образуются, например, парами планаров  $\langle \text{im } A \rangle$  и  $\langle \ker A' \rangle$ ,  $\langle \text{im } B \rangle$  и  $\langle \ker B' \rangle$ :

$$(\overleftarrow{A_1 A_1'} - \overrightarrow{A_1 A_1'}) = +\text{Ref}\{A_1 A_1'\} = \cos \tilde{\Phi}_{12} - \sin \tilde{\Phi}_{12} = \cos \tilde{Z}_1, \quad (176)$$

$$(\overleftarrow{A_2 A_2'} - \overrightarrow{A_2 A_2'}) = +\text{Ref}\{A_2 A_2'\} = \cos \tilde{\Phi}_{12} + \sin \tilde{\Phi}_{12} = \cos \tilde{Z}_2; \quad (177)$$

$$(\overleftarrow{BB'} - \overrightarrow{BB'}) = +\text{Ref}\{BB'\} = \cos \tilde{\Phi}_B - \sin \tilde{\Phi}_B = \cos \tilde{Z}_B, \quad (178)$$

$$(\overleftarrow{B'B} - \overrightarrow{B'B}) = +\text{Ref}\{B'B\} = \cos \tilde{\Phi}_B + \sin \tilde{\Phi}_B = \cos \tilde{Z}_{B'}. \quad (179)$$

С одной стороны, это – синусы вышеуказанных прямых углов; с другой стороны, это – косинусы нулевых тензорных углов, соответствующих планарам  $\langle \text{im } A_1 \rangle$ ,  $\langle \text{im } A_2 \rangle$  и  $\langle \text{im } B \rangle$ ,  $\langle \text{im } B' \rangle$ . Симметричные квадратные корни (176)–(179) типа  $\sqrt{I} = (\sqrt{I})'$  определяются в  $\langle \mathcal{E}^n \rangle$  как *сферически ортогональные (симметричные) рефлекторы*. В общем случае они обозначаются  $\pm \text{Ref } B_m$ , где  $B_m$  – нуль-нормальная матрица.

Тензорные рефлекторы осуществляют операцию линейного отражения (рефлексии). При этом планары  $\langle \text{im } Bm \rangle$  и  $\langle \text{ker } Bm \rangle$  есть линейные зеркала для рефлекторов  $-\text{Ref } Bm$  и  $+\text{Ref } Bm$ , от которых происходит ортогональное отражение. Некоторые частные случаи:

$$\sin \tilde{\Phi} = Z \leftrightarrow \cos \tilde{\Phi} = \sqrt{I},$$

$$\cos \tilde{\Phi} = Z \leftrightarrow \sin \tilde{\Phi} = \sqrt{I},$$

$$\cos \tilde{\Phi} = +I \leftrightarrow \text{rang } A = n, \quad \text{rang } B = n;$$

$$\cos \tilde{\Phi} = -I \leftrightarrow \text{rang } A = 0, \quad \text{rang } B = 0;$$

при этом  $\sin \tilde{\Phi} \neq \pm I$ .

Очевидны тождества:  $I \cdot I = I = I \cdot I$ , или

$$\overleftarrow{(A_1 A_1' + A_1 A_1')} \cdot \overrightarrow{(A_2 A_2' + A_2 A_2')} = I = \overleftarrow{(A_2 A_2' + A_2 A_2')} \cdot \overrightarrow{(A_1 A_1' + A_1 A_1')}, \quad (180)$$

$$\overleftarrow{(B B' + B B')} \cdot \overrightarrow{(B' B + B' B)} = I = \overleftarrow{(B' B + B' B)} \cdot \overrightarrow{(B B' + B B')}. \quad (181)$$

Отсюда следуют тригонометрические формулы:

$$\sin^2 \tilde{\Phi} + \cos^2 \tilde{\Phi} = I, \quad (182)$$

$$\sin \tilde{\Phi} \cdot \cos \tilde{\Phi} = -\cos \tilde{\Phi} \cdot \sin \tilde{\Phi}, \quad \sin^2 \tilde{\Phi} \cdot \cos^2 \tilde{\Phi} = \cos^2 \tilde{\Phi} \cdot \sin^2 \tilde{\Phi}, \quad (183), (184)$$

$$\sin^{2k} \tilde{\Phi} \cdot \cos^l \tilde{\Phi} = \cos^l \tilde{\Phi} \cdot \sin^{2k} \tilde{\Phi}, \quad \sin^l \tilde{\Phi} \cdot \cos^{2k} \tilde{\Phi} = \cos^{2k} \tilde{\Phi} \cdot \sin^l \tilde{\Phi}. \quad (185)$$

Далее при выводе тригонометрических формул можно также использовать *таблицу умножения разнородных характеристических проекторов*:

$$\overleftarrow{B} \cdot \overleftarrow{B B'} = \overleftarrow{B B'} = \overleftarrow{B B'} \cdot \overleftarrow{B'}, \quad \overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{B' B} = \overrightarrow{B' B} = \overrightarrow{B' B} \cdot \overrightarrow{B'},$$

$$\overleftarrow{B'} \cdot \overleftarrow{B' B} = \overleftarrow{B' B} = \overleftarrow{B' B} \cdot \overleftarrow{B}, \quad \overrightarrow{B'} \cdot \overrightarrow{B B'} = \overrightarrow{B B'} = \overrightarrow{B B'} \cdot \overrightarrow{B},$$

$$\overleftarrow{B} \cdot \overleftarrow{B' B} = \overleftarrow{B} = \overleftarrow{B B'} \cdot \overleftarrow{B}, \quad \overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{B B'} = \overrightarrow{B} = \overrightarrow{B' B} \cdot \overrightarrow{B},$$

$$\overleftarrow{B'} \cdot \overleftarrow{B B'} = \overleftarrow{B'} = \overleftarrow{B' B} \cdot \overleftarrow{B'}, \quad \overrightarrow{B'} \cdot \overrightarrow{B' B} = \overrightarrow{B'} = \overrightarrow{B B'} \cdot \overrightarrow{B'}.$$

*Проективный* характер определённых выше тригонометрических функций показывают формулы:

$$\overleftarrow{B B'} = + \overleftarrow{B} \cdot \cos \tilde{\Phi} = + \cos \tilde{\Phi} \cdot \overleftarrow{B'}, \quad (186)$$

$$\overleftarrow{B' B} = + \overleftarrow{B'} \cdot \cos \tilde{\Phi} = + \cos \tilde{\Phi} \cdot \overleftarrow{B}, \quad (187)$$

$$\overrightarrow{B' B} = - \overrightarrow{B} \cdot \cos \tilde{\Phi} = - \cos \tilde{\Phi} \cdot \overrightarrow{B'}, \quad (188)$$

$$\overrightarrow{B B'} = - \overrightarrow{B'} \cdot \cos \tilde{\Phi} = - \cos \tilde{\Phi} \cdot \overrightarrow{B}, \quad (189)$$

$$\overleftarrow{B} - \overleftarrow{BB'} = (\sqrt{Z})_1 = + \overleftarrow{B} \cdot \sin \tilde{\Phi} = + \overleftarrow{B} \cdot \overleftarrow{BB'} = - \overleftarrow{BB'} \cdot \overleftarrow{B}, \quad (190)$$

$$\overrightarrow{B} - \overrightarrow{B'B} = (\sqrt{Z})_2 = + \overrightarrow{B} \cdot \sin \tilde{\Phi} = - \overrightarrow{B'} \cdot \overrightarrow{B} = + \overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{B'}, \quad (191)$$

$$\overleftarrow{B'} - \overleftarrow{B'B} = - (\sqrt{Z}')_2 = - \overleftarrow{B'} \cdot \sin \tilde{\Phi} = - \overleftarrow{B'} \cdot \overrightarrow{B'} = + \overleftarrow{B'} \cdot \overrightarrow{B'}, \quad (192)$$

$$\overrightarrow{B'} - \overrightarrow{BB'} = - (\sqrt{Z}')_1 = - \overrightarrow{B'} \cdot \sin \tilde{\Phi} = + \overrightarrow{B'} \cdot \overleftarrow{BB'} = - \overrightarrow{BB'} \cdot \overrightarrow{B'}, \quad (193)$$

$$\overleftarrow{BB'} = \overleftarrow{B} \cdot \overleftarrow{B'} \cdot \cos^2 \tilde{\Phi} = \overleftarrow{B} \cdot \cos^2 \tilde{\Phi} \cdot \overleftarrow{B'} = \cos^2 \tilde{\Phi} \cdot \overleftarrow{B} \cdot \overleftarrow{B'}, \quad (194)$$

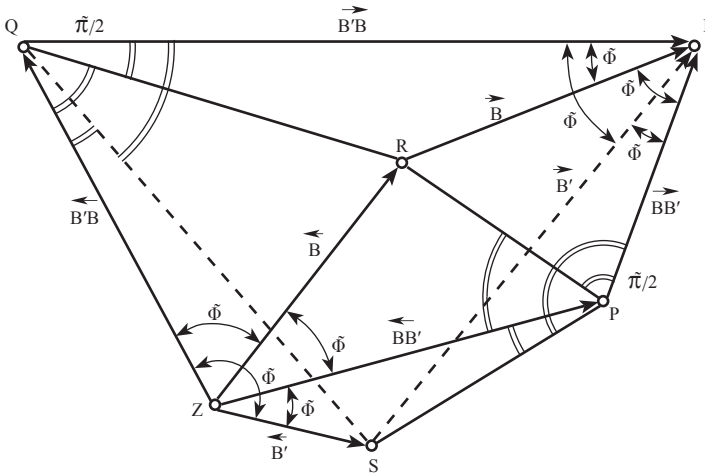
$$\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{B'} \cdot \overrightarrow{B} \cdot \cos^2 \tilde{\Phi} = \overrightarrow{B'} \cdot \cos^2 \tilde{\Phi} \cdot \overrightarrow{B} = \cos^2 \tilde{\Phi} \cdot \overrightarrow{B'} \cdot \overrightarrow{B}, \quad (195)$$

$$\overleftarrow{BB'} \cdot \overleftarrow{B'B} = \cos^2 \tilde{\Phi} \cdot \overleftarrow{B} \cdot \overleftarrow{B} = \overleftarrow{B} \cdot \cos^2 \tilde{\Phi}, \quad (196)$$

$$\overrightarrow{B'B} \cdot \overrightarrow{BB'} = \cos^2 \tilde{\Phi} \cdot \overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{B} = \overrightarrow{B} \cdot \cos^2 \tilde{\Phi}. \quad (197)$$

Формулы (194)-(197) – результат перемножений формул (186)-(189).

Проективные тригонометрические формулы и тензорные углы наглядно иллюстрирует *символический тензорный октаэдр*, образуемый восемью характеристическими проекторами в 2-х валентном евклидовом пространстве (рис.1). Для нуль-нормальной матрицы этот октаэдр вырождается в символический тензорный прямоугольный треугольник.



**Рис. 1.** Символический тензорный октаэдр из характеристических проекторов, иллюстрирующий тензорные углы.

### § 5.3. Проективные тензорные секанс, тангенс и аффинные рефлексоры

В свою очередь, тензорные функции секанса и тангенса от того же проективного угла определяются через аффинные или косогональные характеристические проекторы – § 1.2. Складывая (187) и (188), получаем

$$\overleftarrow{(B' - B)} \cdot \overrightarrow{\cos \tilde{\Phi}} = I = \cos \tilde{\Phi} \cdot \overleftarrow{(B' - B)}.$$

На основании этого соотношения матричная характеристика

$$\begin{aligned} \sec \tilde{\Phi}_B &= \overleftarrow{(B' - B)} = \overleftarrow{(B - B')} = \overleftarrow{(B + B' - I)} = (I - \overrightarrow{B} - \overrightarrow{B'}) = \\ &= \sec' \tilde{\Phi}_B = \sec \tilde{\Phi}_{B'} = \sec(-\tilde{\Phi}_B) = [(\overleftarrow{B})' - \overrightarrow{B}] = [\overleftarrow{B} - (\overrightarrow{B})'] \end{aligned} \quad (198)$$

определяется как проективный тензорный секанс угла  $\tilde{\Phi}_B$  между планарами  $\langle \text{im } B \rangle$  и  $\langle \text{im } B' \rangle$ . Согласно (172), тензорный косинус – не-сингулярная матрица тогда и только тогда, когда  $\langle \text{im } B \rangle \cap \langle \ker B \rangle = \mathbf{0}$ , то есть когда  $B$  – нуль-простая матрица. Поэтому имеем:

$$\sec \tilde{\Phi}_{B_p} = \cos^{-1} \tilde{\Phi}_{B_p}, \quad \sec \tilde{\Phi} \cdot \cos \tilde{\Phi} = I = \cos \tilde{\Phi} \cdot \sec \tilde{\Phi}; \quad (199)$$

$$\sec \tilde{\Phi}_B = \cos^+ \tilde{\Phi}_B, \quad \sec \tilde{\Phi}_B \cdot \overleftarrow{\cos \tilde{\Phi}_B} = \overleftarrow{\cos \tilde{\Phi}_B} = \cos \tilde{\Phi}_B \cdot \sec \tilde{\Phi}_B. \quad (200)$$

В последнем случае подразумевается, что исходная матрица может быть нуль-дефектной, а характеристические аффинные проекторы при этом же могут не существовать. Тогда на подпространстве  $\langle \text{im } B \rangle \cap \langle \ker B \rangle$  косинус и квазисеканс – оба вместе нулевые. Зато для нуль-дефектной матрицы косинус угла между подпространствами  $\langle \text{im } B^{s^0} \rangle$  и  $\langle \text{im } B'^{s^0} \rangle$  всегда несингулярный. В свою очередь, синус несингулярный тогда и только тогда, когда

$$\det \sin \tilde{\Phi}_B \neq 0 \leftrightarrow \langle \text{im } B \rangle \oplus \langle \text{im } B' \rangle \equiv \langle \mathcal{A}^n \rangle \quad (r_B = n/2). \quad (201)$$

В случае задания тензорного проективного угла линейорами  $A_1$  и  $A_2$  это же соответствует объединению условий (159) и (160). Ввиду этого квазикосеканс в общем случае определяется через квазиобратную матрицу

$$\text{cosec } \tilde{\Phi}_B = \sin^+ \tilde{\Phi}_B = \text{cosec}' \tilde{\Phi}_B = -\text{cosec } \tilde{\Phi}_{B'} = -\text{cosec}(-\tilde{\Phi}_B) = \sec \tilde{\Xi}. \quad (202)$$

Вычитая (186) из (187), получаем

$$\sin \tilde{\Phi}_B = -\cos \tilde{\Phi}_B \cdot \overleftarrow{(B' - B)} = +(\overleftarrow{B'} - \overleftarrow{B}) \cdot \cos \tilde{\Phi}_B.$$

На основании этого соотношения матричная характеристика

$$\begin{aligned} i \cdot \text{tg } \tilde{\Phi}_B &= (\overleftarrow{B}' - \overleftarrow{B}) = (\overrightarrow{B} - \overrightarrow{B}') = [(\overleftarrow{B})' - \overleftarrow{B}] = [\overrightarrow{B} - (\overrightarrow{B})'] = \\ &= -i \cdot \text{tg}' \tilde{\Phi}_B = -i \cdot \text{tg } \tilde{\Phi}_{B'} = -i \cdot \text{tg} (-\tilde{\Phi}_B) \end{aligned} \quad (203)$$

определяется как *овеществлённый* проективный тензорный тангенс  $\tilde{\Phi}_B$ . Такая форма обусловлена тем, что это кососимметричная матрица с её D-формой в комплексном базисе; её ненулевые собственные значения  $\mu_j = \pm i \cdot \text{tg } \varphi_j$ . Тангенс и синус связаны *антикоммулативно* (см. §§ 5.5 и 7):

$$\left. \begin{aligned} i \cdot \text{tg } \tilde{\Phi} &= + \sin \tilde{\Phi} \cdot \sec \tilde{\Phi} = - \sec \tilde{\Phi} \cdot \sin \tilde{\Phi} \leftrightarrow \\ \leftrightarrow \sin \tilde{\Phi} &= + i \cdot \text{tg } \tilde{\Phi} \cdot \cos \tilde{\Phi} = - \cos \tilde{\Phi} \cdot i \cdot \text{tg } \tilde{\Phi} \rightarrow \\ \rightarrow + \sin \tilde{\Phi} \cdot i \cdot \text{tg } \tilde{\Phi} &= - i \cdot \text{tg } \tilde{\Phi} \cdot \sin \tilde{\Phi} . \end{aligned} \right\} \quad (204)$$

В частности, для пары векторов и прямых с учётом (151), (152) имеем:

$$i \cdot \text{tg } \tilde{\Phi}_B = \frac{B' - B}{\text{tr } B} = \frac{\mathbf{a}_2 \mathbf{a}_1' - \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2'}{\mathbf{a}_1' \mathbf{a}_2} = i \cdot \text{tg } \tilde{\Phi}_{12}. \quad (205)$$

Квазикотангенс определяется для общего случая матрицей

$$i \cdot \text{ctg } \tilde{\Phi}_B = i \cdot \text{tg}^+ \tilde{\Phi}_B = -i \cdot \text{ctg}' \tilde{\Phi}_B = -i \cdot \text{ctg } \tilde{\Phi}_{B'} = -i \cdot \text{ctg} (-\tilde{\Phi}_B) = i \cdot \text{tg } \tilde{\Xi}. \quad (206)$$

Очевидно тождество

$$(\overleftarrow{B} + \overleftarrow{B}') \cdot (\overleftarrow{B}' + \overleftarrow{B}) = I = (\overleftarrow{B}' + \overleftarrow{B}') \cdot (\overleftarrow{B} + \overleftarrow{B}). \quad (207)$$

Отсюда следуют тригонометрические формулы:

$$\sec^2 \tilde{\Phi} - \text{tg}^2 \tilde{\Phi} = I = \sec^2 \tilde{\Phi} + (i \cdot \text{tg } \tilde{\Phi})^2, \quad (208)$$

$$i \cdot \text{tg } \tilde{\Phi} \cdot \sec \tilde{\Phi} = - \sec \tilde{\Phi} \cdot i \cdot \text{tg } \tilde{\Phi}, \quad (209)$$

$$\text{tg}^2 \tilde{\Phi} \cdot \sec^2 \tilde{\Phi} = \sec^2 \tilde{\Phi} \cdot \text{tg}^2 \tilde{\Phi}. \quad (210)$$

**Правило №1.** Квадраты и любые чётные степени тензорных тригонометрических функций коммутативны между собой и с характеристическими проекторами, когда они относятся к одной и той же паре линейоров или планаров.

Аналогично (176)–(179), но для нуль-простой матрицы, определяются *аффинные рефлекторы* (в  $\langle \mathcal{E}^n \rangle$  – *косогональные рефлекторы*):

$$(\overleftarrow{B} - \overleftarrow{B}) = \text{Ref}\{B\} = \sec \tilde{\Phi} - i \cdot \text{tg } \tilde{\Phi}, \quad (211)$$

$$(\overleftarrow{B}' - \overleftarrow{B}') = \text{Ref}\{B'\} = \sec \tilde{\Phi} + i \cdot \text{tg } \tilde{\Phi} = \text{Ref}'\{B\}. \quad (212)$$

В случае пространства с евклидовой метрикой они суть сферически косогональные рефлекторы и вместе с тем – характеристические квадратные корни типа  $\sqrt{I}$ . Если тензорный угол между  $\langle \text{im } B \rangle$  и  $\langle \text{im } B' \rangle$  ненулевой, то корни (211), (212) обязательно несимметричны.

В самом общем случае тензорные рефлекторы могут обозначаться как  $\pm \text{Ref}\{Bp\}$ , где  $Bp$  – нуль-простая матрица. Соответственно планары  $\langle \ker Bp \rangle$  и  $\langle \text{im } Bp \rangle$  есть линейные зеркала, от которых происходят косые отражения параллельно планарам  $\langle \text{im } Bp \rangle$  и  $\langle \ker Bp \rangle$ .

### § 5.4. Сопоставление двух способов задания тензорных углов – через прямоугольные и через квадратные сингулярные матрицы

Возникает вопрос, когда проективный тензорный угол и его тригонометрические функции, определяемые либо через  $A_1$  и  $A_2$ , либо через  $B$ , тождественны? Пусть в соответствии с (151) и (152) имеем:

$$B = A_1 \cdot A_2', \quad B' = A_2 \cdot A_1', \quad (213), (214)$$

$$C = A_1' \cdot A_2, \quad C' = A_2' \cdot A_1. \quad (215), (216)$$

Прежде всего отметим, что матрицы  $A_1$  и  $A_2$  здесь необходимо имеют одинаковый размер. Из равенства тензорных углов следует равенство всех одноимённых ортопроекторов и обратно:

$$\tilde{\Phi}_{12} = \tilde{\Phi}_B \leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \sin \tilde{\Phi}_{12} = \sin \tilde{\Phi}_B \\ \cos \tilde{\Phi}_{12} = \cos \tilde{\Phi}_B \end{array} \right\} \leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{tg } \tilde{\Phi}_{12} = \text{tg } \tilde{\Phi}_B \\ \text{sec } \tilde{\Phi}_{12} = \text{sec } \tilde{\Phi}_B \end{array} \right\} \leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \overleftrightarrow{A_1 A_1'} = \overleftrightarrow{B B'} \\ \overleftrightarrow{A_2 A_2'} = \overleftrightarrow{B' B} \end{array} \right\}.$$

(Но  $\overleftrightarrow{A_1 A_2'} = \overleftrightarrow{B}$  справедливо по исходному определению  $A_1 A_2' = B$ ; это дополнительное соотношение определяется только фактом существования косопроекторов – см. § 2.1.) В свою очередь, равенство ортопроекторов тождественно взаимосвязанным условиям:

$$\langle \text{im } A_1 \rangle \equiv \langle \text{im } B \rangle \quad \langle \ker A_2' \rangle \equiv \langle \ker B \rangle \quad (217), (218)$$

$$\langle \text{im } A_2 \rangle \equiv \langle \text{im } B' \rangle \quad \langle \ker A_1' \rangle \equiv \langle \ker B' \rangle. \quad (219), (220)$$

Вначале рассмотрим условие (217), тождественное (220):

$$\langle \text{im } B \rangle \equiv A_1 \cdot \langle \text{im } A_2' \rangle \leftarrow A_1 \cdot A_2' = B,$$

$$\langle \text{im } A_1 \rangle \equiv A_1 \cdot \langle \mathcal{A}^T \rangle \equiv A_1 \cdot \langle \text{im } A_2' \oplus \ker A_2 \rangle.$$

Отсюда следует, что выполнение (217) тождественно двум условиям:

$$\left. \begin{array}{l} \langle \text{im } A_2' \rangle \cap \langle \ker A_1 \rangle = \mathbf{0}, \\ \langle \ker A_2 \rangle \subset \langle \ker A_1 \rangle. \end{array} \right\} \quad (221)$$



Аналогичный подход применим к условию (219), тождественному (218):

$$\left. \begin{aligned} \langle \text{im } A_1' \rangle \cap \langle \ker A_2 \rangle &= \mathbf{0}, \\ \langle \ker A_1 \rangle &\subset \langle \ker A_2 \rangle. \end{aligned} \right\} \quad (222)$$

То есть выполнение двух независимых условий (217) и (219) равносильно тому, что

$$\begin{aligned} \overrightarrow{A_1' A_1} = \overrightarrow{A_2' A_2} &\leftrightarrow \overleftarrow{A_1' A_1} = \overleftarrow{A_2' A_2} \leftrightarrow \langle \text{im } A_1' \rangle \equiv \langle \text{im } A_2' \rangle \leftrightarrow \\ &\leftrightarrow \langle \ker A_1 \rangle \equiv \langle \ker A_2 \rangle, \end{aligned} \quad (223)$$

где необходимо  $r_1 = r_2 \leq m$ .

Ответ на поставленный выше вопрос заключается в выполнении необходимого и достаточного условия (223). В частности, оно соблюдается, когда  $r_1 = r_2 = r = m$ . Тогда

$$\langle \ker A_1 \rangle \equiv \langle \ker A_2 \rangle = \mathbf{0}, \quad \langle \text{im } A_1' \rangle \equiv \langle \text{im } A_2' \rangle \equiv \langle \mathcal{A}^T \rangle.$$

Этот упрощённый вариант, как правило, подразумевается при использовании внешних и внутренних произведений типа (213) – (216), то есть при условии:

$$r_1 = r_2 = r = m < n. \quad (224)$$

Например, такой вариант имеет место для пары векторов. Согласно (120) и (213) – (216), имеем:

$$k(B, r) = k(B', r) = \det C = \det C'. \quad (225)$$

При условии (224) имеем:

$$\left. \begin{aligned} \overrightarrow{A_1 A_1'} &= \overrightarrow{B B'}, \\ \overrightarrow{A_2 A_2'} &= \overrightarrow{B' B}. \end{aligned} \right\} \quad (226)$$

Для нуль-простой матрицы  $\langle \text{im } B \rangle \cap \langle \ker B \rangle = \mathbf{0}$ ;  $k(B, r) = \det C \neq 0$ . В частности, для нуль-нормальной матрицы имеем  $\langle \text{im } B \rangle \equiv \langle \text{im } B' \rangle$  и в соответствии с (97) получаем:

$$k(B B', r) = k(B' B, r) = k^2(B, r) = \det^2 C > 0.$$

Для нуль-дефектной матрицы имеем:  $\langle \text{im } B \rangle \cap \langle \ker B \rangle \neq \mathbf{0}$ ;  $k(B, r) = \det C = 0$ . Скалярная характеристика  $\det C = \det (A_1' A_2)$

в евклидовом пространстве, при условии (224), играет также роль критерия хотя бы частичной ортогональности линейоров или планаров. С другой стороны, определитель  $\det G = \det [(A_1|A_2)'(A_1|A_2)]$  в аффинном пространстве играет роль критерия хотя бы частичной их параллельности.

$$\det G = 0 \leftrightarrow \langle \text{im } A_1 \rangle \cap \langle \text{im } A_2 \rangle \neq \mathbf{0}, \quad (227)$$

$$\det G \neq 0 \leftrightarrow \langle \text{im } A_1 \rangle \cap \langle \text{im } A_2 \rangle = \mathbf{0}, \quad (228)$$

$$\det C = 0 \leftrightarrow \langle \text{im } A_1 \rangle \cap \langle \ker A_2' \rangle \neq \mathbf{0} \leftrightarrow \langle \text{im } A_2 \rangle \cap \langle \ker A_1' \rangle \neq \mathbf{0}, \quad (229)$$

$$\det C \neq 0 \leftrightarrow \langle \text{im } A_1 \rangle \cap \langle \ker A_2' \rangle = \mathbf{0} \leftrightarrow \langle \text{im } A_2 \rangle \cap \langle \ker A_1' \rangle = \mathbf{0}, \quad (230)$$

где для евклидова пространства  $\langle \ker A' \rangle \equiv \langle \text{im } A \rangle^\perp$ .

Полная параллельность линейоров или планаров отвечает нуль-нормальной матрице. Согласно (97) и (132), это тождественно соотношению:

$$\begin{aligned} |\det C| &= |k(\text{Bm}, r)| = \sqrt{k(\text{Bm } \text{Bm}', r)} = \mathcal{M}t(r)(A_1 \cdot A_2') = \mathcal{M}t(r)A_1 \cdot \mathcal{M}t(r)A_2' = \\ &= \sqrt{\det A_1' A_1} \cdot \sqrt{\det A_2' A_2}. \end{aligned} \quad (231)$$

С учётом (224) это же соответствует отношению параллельности (153). Впоследствии формула (231) получит *тригонометрическую* трактовку.

В свою очередь, полная ортогональность линейоров или планаров отвечает нильпотентной матрице 2-го порядка:  $B^2 = Z$  ( $C = Z$ ). С учётом (224) это же в евклидовом пространстве соответствует отношению ортогональности (155):

$$\begin{aligned} \langle \text{im } A_1 \rangle \equiv \langle \text{im } B \rangle \equiv \langle \ker B \rangle \equiv \langle \ker A_2' \rangle \leftrightarrow \\ \leftrightarrow \langle \text{im } A_2 \rangle \equiv \langle \text{im } B' \rangle \equiv \langle \ker B' \rangle \equiv \langle \ker A_1' \rangle. \end{aligned}$$

Тензорный угол  $\tilde{\Phi}_{12}$  и его тригонометрические функции имеют, конечно, более общий характер, нежели  $\tilde{\Phi}_B$  и его функции, так как они допускают исходно использование матриц  $A_1$  и  $A_2$  размера  $n \times r_1$  и  $n \times r_2$ , где  $r_1$  и  $r_2$  не обязательно равны. Например, если  $r_2 \leq r_1$ , то общая параллельность линейоров  $A_1$  и  $A_2$  сводится к отношению (154). С другой стороны, при любом соотношении  $r_1$  и  $r_2$  общая ортогональность линейоров  $A_1$  и  $A_2$  сводится к отношению (155). Тождественность  $\tilde{\Phi}_{12}$  и  $\tilde{\Phi}_B$  определяется условием (223).

В тензорной тригонометрии в зависимости от конкретных задач применяется та или иная форма представления тензорных углов и их функций.

### § 5.5. Канонические монобинарные клеточные формы сферических тензорных тригонометрических функций и рефлекторов

Параллельность и ортогональность линейных объектов являются только крайними случаями для тензорных углов между ними. Далее, чтобы выполнить полный анализ такого рода отношений, нужно вышеуказанные проективные тригонометрические функции представить в канонической форме, найти их собственные значения и установить информативные скалярные характеристики тензорного угла. Обратимся к разностям ортопроекторов типа (163), которые выражают проективный синус в двух вариантах. Согласно (182) – (184), собственные значения синуса и косинуса суть вещественные числа, находящиеся в интервале  $-1 \div +1$ :

$$\mu_{\sin}^2 + \mu_{\cos}^2 = 1. \quad (232)$$

В евклидовом пространстве указанные собственные значения связаны с некоторыми характеристическими скалярными углами. Обратим внимание на то, что используемые в обоих вариантах разностей (163) характеристические проекторы попарно ортогональны. Ввиду симметричности этих проекторов им же соответствуют четыре собственных подпространства:  $\langle \text{im } A_1 \rangle$ ,  $\langle \text{im } A_2 \rangle$ ,  $\langle \ker A_1' \rangle$ ,  $\langle \ker A_2' \rangle$ . Причём имеем:

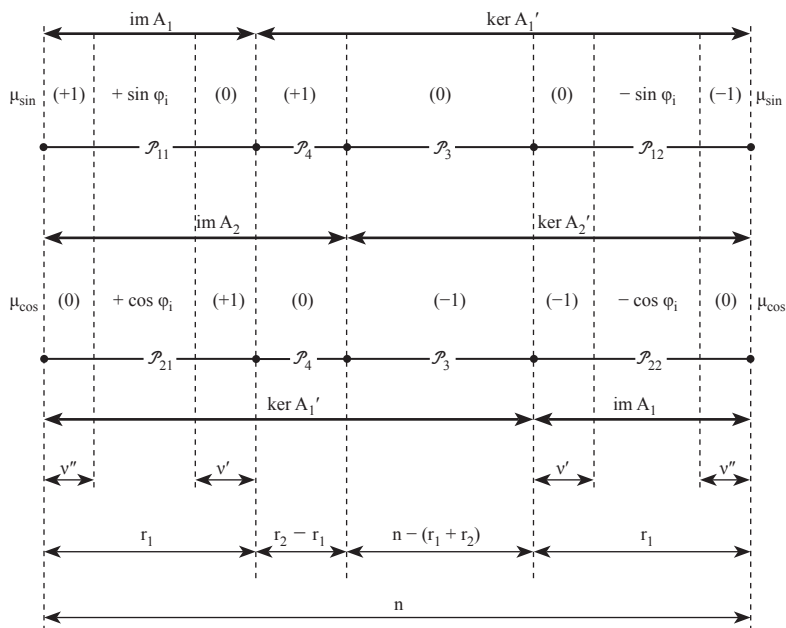
$$\left. \begin{aligned} \langle \text{im } A_1 \rangle \perp \langle \ker A_1' \rangle, \quad \langle \text{im } A_1 \rangle \oplus \langle \ker A_1' \rangle \equiv \langle \mathcal{E}^n \rangle, \\ \langle \text{im } A_2 \rangle \perp \langle \ker A_2' \rangle, \quad \langle \text{im } A_2 \rangle \oplus \langle \ker A_2' \rangle \equiv \langle \mathcal{E}^n \rangle. \end{aligned} \right\} \quad (233)$$

В первом варианте (163) синус рассматривается на подпространстве  $\langle \text{im } A_1 \cup \text{im } A_2 \rangle$ , а во втором варианте – на  $\langle \ker A_1' \cup \ker A_2' \rangle$ . Напротив, в первом варианте (171) косинус рассматривается на подпространстве  $\langle \text{im } A_2 \cup \ker A_1' \rangle$ , а во втором варианте – на  $\langle \text{im } A_1 \cup \ker A_2' \rangle$ . Пусть для определённости:  $r_2 \geq r_1$ ,  $r_1 + r_2 \leq n$ . Исходное евклидово пространство по отношению к вышеуказанным вариантам разностей проекторов распадается в общем случае на четыре базисных подпространства как в синусном, так и в косинусном вариантах (рис. 2). Эти подпространства попарно ортогональны при условиях:

$$\sin \varphi \neq \pm 1, \quad \cos \varphi \neq \pm 1. \quad (234)$$

В свою очередь, при данных условиях подпространства пересечений и их размерности выражаются в виде:

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{P}_3 \rangle \equiv \langle \ker A_1' \cap \ker A_2' \rangle, \quad \dim \langle \mathcal{P}_3 \rangle = n - (r_1 + r_2); \\ \langle \mathcal{P}_4 \rangle \equiv \langle \text{im } A_2 \cap \ker A_1' \rangle, \quad \dim \langle \mathcal{P}_4 \rangle = r_2 - r_1. \end{aligned}$$



**Рис. 2.** Распределение собственных значений проективных тензорных синуса и косинуса по характеристическим подпространствам:

$\mathcal{P}_{11}, \mathcal{P}_{12}, \mathcal{P}_3$  и  $\mathcal{P}_4$  – в синусном варианте;  
 $\mathcal{P}_{21}, \mathcal{P}_{22}, \mathcal{P}_3$  и  $\mathcal{P}_4$  – в косинусном варианте  
 (условно принято, что  $r_2 \geq r_1, r_1 + r_2 \leq n$ ).

Выделим *собственное бинарное тригонометрическое подпространство* в двух вариантах его бинарного разложения на прямые ортогональные суммы – синусом и косинусом:

$$\langle \mathcal{P}_{11} \oplus \mathcal{P}_{12} \rangle \equiv \langle \mathcal{P}_{21} \oplus \mathcal{P}_{22} \rangle. \tag{235}$$

(Оно имеет всегда чётную размерность  $2\tau$  – *тригонометрический ранг угла*.) Здесь  $\tau = \min \{r_1, r_2, (n - r_1), (n - r_2)\}$  – количество бинарных собственных углов  $\varphi_i$ . Но в данном случае  $\tau = r_1$ . Собственные значения тригонометрических функций во *взаимных* подпространствах (235) попарно равны по абсолютной величине, так как стороны собственных углов в силу (233) попарно ортогональны. Но эти собственные значения противоположны по знаку, так как порядки следования проекторов в обоих вариантах (163) и (171) взаимно обратны. Ввиду симметричности проективного косинуса и синуса последние приводятся к диагональной форме посредством ортогонального модального преобразования.

Для того чтобы собственные значения углов и функций имели тригонометрический смысл, здесь используется евклидово пространство с заданием *исходного* декартова базиса  $\tilde{E}$ . Каждой  $i$ -й бинарной тригонометрической клетке в (235) соответствует  $i$ -я собственная евклидова плоскость. На этой плоскости имеется пара ортогональных собственных вектор-осей тензорного косинуса  $u_i$  и  $v_i$ . Им отвечают собственные значения косинуса « $+\cos \varphi_i$ » и « $-\cos \varphi_i$ » ( $-\pi/2 \leq \varphi_i \leq +\pi/2$ ), где  $\varphi_i$  – собственные значения тензорных углов между планарами (а не линейными!). Эти, пока неориентированные собственные векторы, задают в базисе  $\tilde{E}$  1-ю и 2-ю  $i$ -е декартовы оси на собственной плоскости. С целью придания канонической формы проективным тригонометрическим функциям расположим тригонометрические клетки вдоль главной диагонали в направлении увеличения значений  $|\cos \varphi_i|$ ; затем по диагонали расположим моноклетки, соответствующие  $\langle \mathcal{P}_3 \rangle$  и  $\langle \mathcal{P}_4 \rangle$ . Далее установим парное соответствие между исходными и новыми декартовыми осями:  $\langle X_1 \leftrightarrow u_1, X_2 \leftrightarrow v_1 \rangle, \dots, \langle X_{2i-1} \leftrightarrow u_i, X_{2i} \leftrightarrow v_i \rangle, \dots, \langle X_{2\tau-1} \leftrightarrow u_\tau, X_{2\tau} \leftrightarrow v_\tau \rangle, \dots$ . Выбираем ориентацию новых осей так, чтобы  $t$ -е углы между ними были острыми, получая базис  $\tilde{E}_1 = R_w \tilde{E} = \{I\}$ .

Согласно (232), квадраты проективных функций в пределах тригонометрической  $2 \times 2$ -клетки имеют парные собственные значения. В силу условий коммутативности (184) и (185) диагональные формы квадратов синуса и косинуса и, например, исходного косинуса реализуются в одном и том же *декартовом базисе диагонального косинуса*  $\tilde{E}_1$ :

$$\sin^2 \tilde{\Phi}_{12} = \begin{array}{|c|c|} \hline \sin^2 \varphi_i & 0 \\ \hline 0 & \sin^2 \varphi_i \\ \hline \end{array}, \quad \cos^2 \tilde{\Phi}_{12} = \begin{array}{|c|c|} \hline \cos^2 \varphi_i & 0 \\ \hline 0 & \cos^2 \varphi_i \\ \hline \end{array}.$$

$\langle \mathcal{P}_3 \rangle$ 
 $\langle \mathcal{P}_4 \rangle$

Из условий симметрии и антикоммутативности проективных функций (183) и при этом коммутативности функций и их квадратов, согласно (185), следует, что в ориентированном  $\tilde{E}_1$  они имеют канонические формы:

$$\sin \tilde{\Phi}_{12} = \begin{array}{|c|c|} \hline 0 & +\sin \varphi_i \\ \hline +\sin \varphi_i & 0 \\ \hline \end{array}, \quad \cos \tilde{\Phi}_{12} = \begin{array}{|c|c|} \hline +\cos \varphi_i & 0 \\ \hline 0 & -\cos \varphi_i \\ \hline \end{array}. \quad (236), (237)$$

$\langle \mathcal{P}_3 \rangle$ 
 $\langle \mathcal{P}_4 \rangle$

$(r_2 > r_1)$ 
 $(r_1 + r_2 < n)$

В (236) из двух возможных контрдиагональных форм синуса – положительной и отрицательной выбрана первая, что соответствует определениям (163), (171). См. также об этих простейших формах далее в § 7.2. Заметим, что для угла  $\tilde{\Phi}_B$  подпространство  $\langle \mathcal{P}_4 \rangle$  нулевое, а  $\dim \langle \mathcal{P}_3 \rangle = |n - 2r|$ . Согласно (199) и (204), в  $\tilde{E}_1 = \{I\}$  имеем:

$$\sec \tilde{\Phi}_B = \begin{array}{|c|c|} \hline + \sec \varphi_i & 0 \\ \hline 0 & - \sec \varphi_i \\ \hline \end{array}, \quad i \cdot \operatorname{tg} \tilde{\Phi}_B = \begin{array}{|c|c|} \hline 0 & - \operatorname{tg} \varphi_i \\ \hline + \operatorname{tg} \varphi_i & 0 \\ \hline \end{array}. \quad (238), (239)$$

(2r < n)  $\langle \mathcal{P}_3 \rangle$   $\langle \mathcal{P}_4 \rangle$

Формулы (236)–(239) представляют проективные тригонометрические функции в канонической W-форме (§ 4.1) в ориентированном базисе диагонального косинуса  $\tilde{E}_1$ . Базис определяется как *тригонометрический*. При тех же условиях (234) имеем:

$$\left. \begin{aligned} \vec{S}_1 &= \overrightarrow{\{\cos^2 \tilde{\Phi} - \cos^2 \varphi_i \cdot I\}} = \overrightarrow{\{\sin^2 \tilde{\Phi} - \sin^2 \varphi_i \cdot I\}} = \vec{S}_{11} + \vec{S}_{12}; \\ \vec{S}_{11} &= \overrightarrow{\{\cos \tilde{\Phi} - \cos \varphi_i \cdot I\}}, \quad \vec{S}_{12} = \overrightarrow{\{\cos \tilde{\Phi} + \cos \varphi_i \cdot I\}}; \\ \vec{S}_3 &= \overrightarrow{\{\sin \tilde{\Phi}\}}; \quad \vec{S}_4 = \overrightarrow{\{\cos \tilde{\Phi}\}} \quad (\vec{S}_1 + \vec{S}_2 + \vec{S}_3 + \vec{S}_4 = \vec{S} + \vec{S}_3 + \vec{S}_4 = I). \end{aligned} \right\} (240)$$

Это суть проекторы, осуществляющие ортопроецирование на характеристические подпространства (ядра): i-я тригонометрическая клетка, оси  $u_i$  и  $v_i$ ,  $\langle \mathcal{P}_3 \rangle$  и  $\langle \mathcal{P}_4 \rangle$ . Они же своими базисными столбцами (строками) задают эти подпространства. Если некоторые  $\varphi_i$  совпадают, то i-я тригонометрическая клетка расширяется; требуется ортогонализация однородных осей для восстановления бинарной структуры.

Возвратимся к условиям (234). Они были приняты ранее для упрощения процесса разбиения на характеристические базисные подпространства. Но пусть, например,  $\cos \varphi_i = +1$  ( $\sin \varphi_i = 0$ ) с кратностью  $v'$  на  $\langle \mathcal{P}_{21} \rangle$  (рис.2);  $v' = \dim \langle \operatorname{im} A_1 \cap \operatorname{im} A_2 \rangle$ . Тогда этому значению косинуса, в свою очередь, на  $\langle \mathcal{P}_{22} \rangle$  соответствует  $\cos \varphi_i = -1$  с той же кратностью  $v'$  (в силу обратного порядка расположения проекторов). Собственное значение косинуса «-1» теперь относится и к  $\langle \mathcal{P}_3 \rangle$ , как ранее, и к  $\langle \mathcal{P}_{22} \rangle$ . Для отделения собственного тригонометрического подпространства от  $\langle \mathcal{P}_3 \rangle$  нужно ортогонализировать собственные векторы косинуса с  $\mu = -1$ . При этом устанавливается парная ортогональность  $\langle \mathcal{P}_3 \rangle$  и  $\langle \mathcal{P}_{22} \rangle$ . Аналогично поступают, если на  $\langle \mathcal{P}_{11} \rangle$  окажутся значения  $\sin \varphi_i = +1$  ( $\cos \varphi_i = 0$ ) с кратностью  $v'' = \dim \langle \operatorname{im} A_1 \cap \ker A_2 \rangle$  (рис.2). Тогда на  $\langle \mathcal{P}_{12} \rangle$  им соответствуют  $\sin \varphi_i = -1$  с той же кратностью  $v''$ . Собственное значение синуса «+1» теперь относится и к  $\langle \mathcal{P}_4 \rangle$ , как ранее,

и к  $\langle \mathcal{P}_{11} \rangle$ . Для отделения собственного тригонометрического подпространства от  $\langle \mathcal{P}_4 \rangle$  нужно ортогонализировать собственные векторы синуса с  $\mu = +1$ . При этом устанавливается парная ортогональность  $\langle \mathcal{P}_3 \rangle$  и  $\langle \mathcal{P}_4 \rangle$ .

Кроме того, если вопреки принятому ранее,  $r_1 > r_2$ , то  $\langle \mathcal{P}_4 \rangle \equiv \equiv \langle \text{im } A_1 \cap \ker A_2' \rangle$ . Если же  $r_1 + r_2 > n$ , то  $\langle \mathcal{P}_3 \rangle \equiv \langle \text{im } A_1 \cap \text{im } A_2 \rangle$ . Сообразно этому изменяют знаки единичных собственных значений на  $\langle \mathcal{P}_3 \rangle$  и  $\langle \mathcal{P}_4 \rangle$ .

Используемые в работе базисы суть правые, в том числе исходный ортогональный базис в  $\langle \mathcal{E}^n \rangle$  ( $\det \{R\} = +1$ ), а также ортогональные базисы на собственных плоскостях  $\langle u_i, v_i \rangle$ , составляющие вместе тригонометрический базис (его бинарную часть). В тригонометрическом базисе находят с точностью до знака контрадиагональные значения синуса, согласно форме (236). При этом знаки при косинусе определяются строго в соответствии с формой (237). Тогда величина и знак угла  $\varphi_i$  строго определяют его положение в интервале  $[-\pi/2 \div +\pi/2]$ . Направление отсчёта скалярного угла  $\varphi_i$  на собственной плоскости с правым декартовым базисом, как общепринято, выбрано против часовой стрелки. Заметим, что вышеуказанный интервал изменения собственных значений углов  $\varphi_i$  относится к угловым отношениям планаров (а не линейоров!). В том же тригонометрическом базисе  $\tilde{E}_1 = \{I\}$  (то есть базисе диагонального косинуса) определяются канонические формы характеристических ортогональных (176), (177) и аффинных (211), (212) рефлекторов:

$$\text{Ref}\{A_1 A_1'\} = \begin{array}{|c|c|} \hline +\cos \varphi_i & -\sin \varphi_i \\ \hline -\sin \varphi_i & -\cos \varphi_i \\ \hline \end{array}, \quad \text{Ref}\{A_2 A_2'\} = \begin{array}{|c|c|} \hline +\cos \varphi_i & +\sin \varphi_i \\ \hline +\sin \varphi_i & -\cos \varphi_i \\ \hline \end{array}; \quad (241)$$

$(r_2 > r_1; r_1 + r_2 < n)$ 
 $\langle \mathcal{P}_3 \rangle$ 
 $\langle \mathcal{P}_4 \rangle$

$$\text{Ref}\{B\} = \begin{array}{|c|c|} \hline +\sec \varphi_i & +\text{tg } \varphi_i \\ \hline -\text{tg } \varphi_i & -\sec \varphi_i \\ \hline \end{array}, \quad \text{Ref}\{B'\} = \begin{array}{|c|c|} \hline +\sec \varphi_i & -\text{tg } \varphi_i \\ \hline +\text{tg } \varphi_i & -\sec \varphi_i \\ \hline \end{array}. \quad (242)$$

$(2r < n)$ 
 $\langle \mathcal{P}_3 \rangle$

### § 5.6. Ротационные тензорные тригонометрические функции от сферических углов моторного типа

В дальнейшем при выводе ряда формул и неравенств, относящихся к тензорной тригонометрии, будет довольно широко использоваться принцип бинарности. Поясним его. Если простые вещественные матрицы  $P_1$  и  $P_2$  антикоммутируют, то тогда и только тогда они представляются в одном и том же специальном базисе в вещественных монобинарных клеточных формах  $W_1$  и  $W_2$  (§ 4.1), антикоммутирующих по общим собственным подпространствам размерности 1 и 2 (см. также далее в § 7.2). При этом в каких-либо базисах любая аналитическая функция  $F(P_1, P_2)$  выражается в той же форме, что и функция  $F(W_1, W_2)$ . В вышеуказанном специальном базисе функция  $F(P_1, P_2)$  представляется прямой суммой аналогичных собственных функций от монарных и бинарных клеток матриц  $W_1$  и  $W_2$ . В свою очередь, скалярные инварианты  $F(P_1, P_2)$  равны произведению собственных инвариантов по клеткам. Заметим, что для аналитических функций от нескольких простых, попарно коммутативных матриц-аргументов  $P_i$  в теории матриц, в том числе и в изучаемой тензорной тригонометрии, используется аналогичный принцип монарности. Принцип бинарности исходит из коммутативности именно квадратов простых матриц. Оба данных принципа позволяют непосредственным образом переносить аналитические операции и их результаты с простейшей клеточной формы на исходные матрицы или на их аналитические функции. Пусть  $P_1 = \cos \tilde{\Phi}$ ,  $P_2 = \sin \tilde{\Phi}$  ( $r_1 = r_2 \rightarrow \langle \mathcal{P}_4 \rangle = \mathbf{0}$ ). Составим некоторую аналитическую функцию от них с учётом (176), (177):

$$F(P_1, P_2) = (P_1 + P_2) \cdot (P_1 - P_2) = \text{Ref}\{A_2 A_2'\} \cdot \text{Ref}\{A_1 A_1'\},$$

где  $\text{rang } A_1 = \text{rang } A_2$ , то есть  $A_1$  и  $A_2$  – эквиванговые линейоры.

Её  $W$ -форма в тригонометрическом базисе  $\tilde{E}_1 = R_W \cdot \tilde{E} = \{I\}$  – см. § 5.5 (где исходный базис  $\tilde{E}$ ), исходя из бинарных произведений матриц по  $2 \times 2$ -клеткам есть ортогональная ротационная матрица-функция:

$$\begin{array}{|c|c|} \hline \text{Ref}\{A_2 A_2'\} & \text{Ref}\{A_1 A_1'\} \\ \hline \cos \varphi_i & \sin \varphi_i \\ \hline \sin \varphi_i & -\cos \varphi_i \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|c|} \hline \text{Ref}\{A_1 A_1'\} & \text{Rot } 2\Phi_{12} \\ \hline \cos \varphi_i & -\sin \varphi_i \\ \hline -\sin \varphi_i & -\cos \varphi_i \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline \text{Rot } 2\Phi_{12} & \\ \hline \cos 2\varphi_i & -\sin 2\varphi_i \\ \hline \sin 2\varphi_i & \cos 2\varphi_i \\ \hline \end{array}.$$

При этом  $\langle \mathcal{P}_3 \rangle$  в таких произведениях всегда соответствует диагонально-единичный блок  $I$ , т. к. из (237):  $(\pm 1) \cdot (\pm 1) = +1$  Полученная  $2 \times 2$ -матрица реализует ротацию на собственной плоскости на угол  $2\varphi_i$  против часовой стрелки, как и принято в скалярной форме. В целом эта матрица реализует в исходном  $\tilde{E}$  сферическую ротацию на тензорный угол  $2\Phi_{12}$ :



$$\begin{aligned} \text{Ref}\{A_2A_2'\} \cdot \text{Ref}\{A_1A_1'\} &= (\cos \tilde{\Phi}_{12} + \sin \tilde{\Phi}_{12}) \cdot (\cos \tilde{\Phi}_{12} - \sin \tilde{\Phi}_{12}) = \\ &= (\cos^2 \tilde{\Phi}_{12} - \sin^2 \tilde{\Phi}_{12}) + 2\sin \tilde{\Phi}_{12} \cdot \cos \tilde{\Phi}_{12} = (\cos^2 \Phi_{12} - \sin^2 \Phi_{12}) + 2i \cdot \sin \Phi_{12} \cdot \cos \Phi_{12} = \\ &= \cos 2\Phi_{12} + i \cdot \sin 2\Phi_{12} = \text{Rot } 2\Phi_{12}, \end{aligned} \quad (243)$$

$$\text{Ref}\{A_1A_1'\} \cdot \text{Ref}\{A_2A_2'\} = \text{Rot}' 2\Phi_{12} = \text{Rot}(-2\Phi_{12}), \quad (244)$$

где приставка «Rot» обозначает *ротационную матрицу-функцию* от *моторного* тензорного сферического угла  $\Phi$ . В отличие от угла проективного типа  $\tilde{\Phi}$ , фигурирующего в рефлекторах (т. е. симметричных R!) в его обозначении знак *тильды* сверху отсутствует. Нетрудно проверить:

$$\cos^2 \tilde{\Phi} = \cos^2 \Phi, \quad \sin^2 \tilde{\Phi} = \sin^2 \Phi \quad (\text{см. Правило №1});$$

$$\sin \tilde{\Phi} \cdot \cos \tilde{\Phi} = i \sin \Phi \cdot \cos \Phi = \cos \Phi \cdot i \sin \Phi = -\cos \tilde{\Phi} \cdot \sin \tilde{\Phi}.$$

Тригонометрические функции от  $\Phi$  относятся также к моторному типу. Тензорная ротация осуществляется в тригонометрическом подпространстве размерности  $2\tau_R$ , где  $\tau_R = r_1 - v'$  (рис.2) относительно его ортогонального дополнения размерности  $(n - 2\tau_R)$ , то есть обобщённой оси ротации. Ортогональная матрица R является *ротационной*, если  $\det R = +1$ , и является *рефлективной*, если  $R = R'$ . Оба эти качества могут совмещаться, а могут и нет. В свою очередь, ротационная матрица  $\text{Rot } \Phi_{12}$  теоретически вычисляется как *тригонометрический квадратный корень* из (243), т. е. делением угла пополам:

$$\text{Rot } \Phi_{12} = [\text{Ref}\{A_2A_2'\} \cdot \text{Ref}\{A_1A_1'\}]^{1/2}. \quad (245)$$

Формула (243) наглядно интерпретируется так. *Ортогональная рефлексия от  $\langle \text{im } A_1 \rangle$  и затем от  $\langle \text{im } A_2 \rangle$  тождественна ротации на удвоенный угол между  $\langle \text{im } A_1 \rangle$  и  $\langle \text{im } A_2 \rangle$* . Это очевидно для пары векторов или пары прямых. В частности, для пары неориентированных векторов или планаров ранга 1 имеем ротационную матрицу ( $\tau = 1$ ):

$$\begin{aligned} \text{Rot } \Phi_{12} &= [(I - 2 \cdot \overleftarrow{a_2 a_2'}) \cdot (I - 2 \cdot \overleftarrow{a_1 a_1'})]^{1/2} = \\ &= \left[ I - 2 \cdot \left( \frac{a_1 a_1'}{a_1' a_1} + \frac{a_2 a_2'}{a_2' a_2} \right) + 4 \cos^2 \Phi_{12} \cdot \frac{a_2 a_1'}{a_1' a_2} \right]^{1/2}, \end{aligned} \quad (246)$$

$$\text{где } \overleftarrow{a a'} = \frac{a a'}{a' \cdot a}, \quad \overleftarrow{a_2 a_1'} = \frac{a_2 a_1'}{a_1' a_2}, \quad \text{в том числе при } a = e: \overleftarrow{e e'} = e e'.$$

Для *ориентированных* векторов или линеоров принятый ранее для собственного угла  $\Phi_1$  допустимый интервал  $[-\pi/2 \div +\pi/2]$  занижен вдвое. Поэтому для  $\Phi_1$  в монобинарной клеточной форме матрицы  $\text{Rot } \Phi$  применяют интервал  $[-\pi \div +\pi]$ .

В формулах (243) и (244) фигурируют ортогональные рефлекторы  $\text{Ref}\{A_1A_1'\}$  и  $\text{Ref}\{A_2A_2'\}$ , для которых зеркала есть  $\langle \ker A_1' \rangle$  и  $\langle \ker A_2' \rangle$ , согласно (176), (177). Помимо них в *евклидовой тензорной тригонометрии* при  $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma$  особое значение имеет симметричный рефлектор, занимающий своим образом и зеркалом срединное положение между ними. В тригонометрическом подпространстве угла его образ и зеркало определяется вектор-осями  $u_i$  и  $v_i$  ( $i = \bar{1}, \bar{2}$ ), § 5. 5, – т. е. собственными векторами проективного косинуса  $\Phi_{12}$  с его собственными значениями «+ cos  $\varphi_i$ » (для образа) и «– cos  $\varphi_i$ » (для зеркала) при  $2\Gamma \leq n$  (рис.2). (При частично ортогональных  $A_1$  и  $A_2$  имеются значения  $\cos \varphi = \pm 1$ ; при  $2\Gamma > n$  срединное подпространство расширяется ещё на  $\langle \mathcal{P}_3' \rangle$ , но  $\langle \mathcal{P}_4' \rangle = \mathbf{0}$ ). Эта тензорная характеристика именуется как *срединный рефлектор*. Согласно (237) и (240), проективный косинус представляется в виде алгебраической суммы из 2х сферически ортогональных слагаемых с положительными и отрицательными собственными значениями:

$$\cos \tilde{\Phi}_{12} = \{\cos \tilde{\Phi}_{12}\}^{\oplus} + \{\cos \tilde{\Phi}_{12}\}^{\ominus} \quad (I = \vec{S}_1 + \vec{S}_2 + \vec{S}_3, \langle \mathcal{P}_4' \rangle = \mathbf{0}).$$

Эти слагаемые суть сингулярные симметричные матрицы. Зеркало срединного рефлектора при  $2\Gamma < n$  – подпространство  $\langle \text{im} \{\cos \tilde{\Phi}_{12}\}^{\ominus} \rangle$ . Согласно (176), срединный рефлектор теоретически выражается как

$$\text{Ref}\{\cos \tilde{\Phi}_{12}\}^{\ominus} = \{\cos \tilde{\Phi}_{12}\}^{\oplus} - \{\cos \tilde{\Phi}_{12}\}^{\ominus} = \{\sqrt{I}\}_S = R_w \cdot I \cdot R_w' \quad (247)$$

Покажем, что зеркало срединного рефлектора расположено действительно посередине между зеркалами планаров, образующих тензорный угол. Для этого получим срединный рефлектор либо ротацией рефлектора первого планара на угол  $\{+\Phi_{12}/2\}$ , либо ротацией рефлектора второго планара на угол  $\{-\Phi_{12}/2\}$  как двухвалентных тензоров. В соответствии с принципом бинарности имеем в базе диагонального косинуса  $\tilde{E}_1 = \{I\}$ :

$$\begin{aligned}
 & \begin{array}{|c|c|} \hline \text{Rot } \Phi_{12}/2 \\ \hline \cos \varphi_i/2 & -\sin \varphi_i/2 \\ \hline \sin \varphi_i/2 & \cos \varphi_i/2 \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|c|} \hline \text{Ref } \{A_1A_1'\} \\ \hline \cos \varphi_i & -\sin \varphi_i \\ \hline -\sin \varphi_i & -\cos \varphi_i \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|c|} \hline \text{Rot}' \Phi_{12}/2 \\ \hline \cos \varphi_i/2 & \sin \varphi_i/2 \\ \hline -\sin \varphi_i/2 & \cos \varphi_i/2 \\ \hline \end{array} = \\
 & = \begin{array}{|c|c|} \hline \text{Rot}' \Phi_{12}/2 \\ \hline \cos \varphi_i/2 & \sin \varphi_i/2 \\ \hline -\sin \varphi_i/2 & \cos \varphi_i/2 \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|c|} \hline \text{Ref } \{A_2A_2'\} \\ \hline \cos \varphi_i & \sin \varphi_i \\ \hline \sin \varphi_i & -\cos \varphi_i \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|c|} \hline \text{Rot } \Phi_{12}/2 \\ \hline \cos \varphi_i/2 & -\sin \varphi_i/2 \\ \hline \sin \varphi_i/2 & \cos \varphi_i/2 \\ \hline \end{array} = \\
 & = \begin{array}{|c|c|} \hline \text{Ref } \{\cos \tilde{\Phi}_{12}\}^{\ominus} \\ \hline +1 & 0 \\ \hline 0 & -1 \\ \hline \end{array} \quad (248)
 \end{aligned}$$

Тут подпространству  $\langle \mathcal{P}_3 \rangle$  отвечает или отрицательный единичный блок ( $2\tau < n$ ), или положительный единичный блок ( $2\tau > n$ ), либо этот блок отсутствует ( $2\tau = n$ ). Простые матрицы определяются как *тригонометрически согласованные*, если они приводятся к W-форме одной и той же структуры в общем базисе. Причём нормальные матрицы приводятся к ней ротационным ортогональным преобразованием базиса  $\tilde{E}$ , обозначаемым здесь как  $R_W$  (т. е.  $\tilde{E}_1 = R_W \cdot \tilde{E} = \{I\}$ ). Согласно (248), W-форма срединного рефлектора всегда диагональная!!!

**Правило №2.** Тригонометрически согласованные ротационные матрицы одного и того же вида, например сферические, коммутативны. При этом в их произведениях тензорные углы-аргументы моторного типа образуют алгебраическую сумму.

**Правило №3.** Ротационная сферическая матрица переносится через сферически ортогональный рефлектор (при их тригонометрической согласованности) с изменением знака её угла-аргумента.

Эти правила получают также непосредственным путём с использованием принципа бинарности. Кроме того, имеем:

$$\begin{aligned} \text{Rot } \Phi_{12} \cdot (\cos \tilde{\Phi} \pm \sin \tilde{\Phi}) \cdot \text{Rot } (-\Phi_{12}) &= \text{Rot } 2\Phi_{12} \cdot (\cos \tilde{\Phi} \pm \sin \tilde{\Phi}) = \\ &= (\cos \tilde{\Phi} \pm \sin \tilde{\Phi}) \cdot \text{Rot } (-2\Phi_{12}) = \{\cos (\tilde{\Phi} \pm 2\tilde{\Phi}_{12}) \pm \sin (\tilde{\Phi} \pm 2\tilde{\Phi}_{12})\}, \\ \text{Ref}\{A_2 A_2'\} &= \text{Rot } \Phi_{12} \cdot \text{Ref}\{A_1 A_1'\} \cdot \text{Rot } (-\Phi_{12}) = \text{Rot } 2\Phi_{12} \cdot \text{Ref}\{A_1 A_1'\}. \end{aligned}$$

Следствие. Согласованная ротация рефлектора как двухвалентного тензора на угол  $\Phi$  тождественна его ротации как одновалентного тензора на угол  $2\Phi$ .

Кроме того, для согласованных рефлекторов справедливо наиболее полное обобщение утверждений (243) и (244):

$$(\cos \tilde{\Phi}_{12} \pm \sin \tilde{\Phi}_{12}) \cdot (\cos \tilde{\Phi}_{34} \mp \sin \tilde{\Phi}_{34}) = \text{Rot } \{\pm \Phi_{12} \pm \Phi_{34}\}.$$

Множество тригонометрически согласованных матриц включает в себя, например, производимые аналитической функцией от пары антикоммутативных простых матриц. Если в (243) и (245) в качестве второго линейора взять  $A_2 = R_{12} \cdot A_1$  ( $\det R_{12} = +1$ ), то с учётом (98) и (99) имеем:

$$\left. \begin{aligned} \overleftrightarrow{A_2 A_2'} &= R_{12} \cdot \overleftrightarrow{A_1 A_1'} \cdot R_{12}', \\ \text{Ref}\{A_2 A_2'\} &= R_{12} \cdot \text{Ref}\{A_1 A_1'\} \cdot R_{12}'. \end{aligned} \right\} \quad (249)$$

На множестве матриц  $\langle R_{12} \rangle$ , выполняющих указанную операцию, матрица  $\text{Rot } \Phi_{12}$ , получаемая однозначно из (245), имеет тригонометрическое подпространство *минимальной* размерности. Именно она тригонометрически согласована со следующими рефлекторами:  $\text{Ref}\{A_1 A_1'\}$ ,  $\text{Ref}\{A_2 A_2'\}$  и  $\text{Ref}\{\cos \tilde{\Phi}_{12}\}^{\odot}$ . С учётом Правила №3 справедлива общая формула:

$$\text{Rot } \Phi_{12} \cdot \text{Ref}\{AA'\} \cdot \text{Rot } \Phi_{12} = \text{Ref}\{AA'\} \quad (A = A_1 \text{ или } A_2). \quad (250)$$

В указанном случае множество  $\langle R_{12} \rangle$  не произвольно. А именно:  $\langle R_{12} \rangle \equiv \langle \text{Rot } \Phi_{12} \cdot \text{Rot } \Theta_{12} \rangle$ , где  $\Theta_{12}$  – сферический угол ортогональной ротации по отношению к  $\Phi_{12}$ , или *ортосферический угол*. Для тензорных углов этих двух типов и только для них выполняются соотношения:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Rot } \Phi_{12} \cdot \text{Ref}\{\cos \tilde{\Phi}_{12}\}^{\ominus} \cdot \text{Rot } \Phi_{12} = \text{Ref}\{\cos \tilde{\Phi}_{12}\}^{\ominus} = \text{Rot}(-\Phi_{12}) \cdot \text{Ref}\{\cos \tilde{\Phi}_{12}\}^{\ominus} \cdot \text{Rot}(-\Phi_{12}), \\ \text{Rot}' \Theta_{12} \cdot \text{Ref}\{\cos \tilde{\Phi}_{12}\}^{\ominus} \cdot \text{Rot } \Theta_{12} = \text{Ref}\{\cos \tilde{\Phi}_{12}\}^{\ominus} = \text{Rot} \Theta_{12} \cdot \text{Ref}\{\cos \tilde{\Phi}_{12}\}^{\ominus} \cdot \text{Rot}' \Theta_{12}. \end{array} \right. \quad (251)$$

Соотношения типа (251) лежат в обосновании как ротационной *квази-евклидовой геометрии и тригонометрии* с вышеуказанным срединным рефлектором в качестве вводимого независимо *рефлектор-тензора*, так и *внешней геометрии со сферическими функциями*. Последняя по сути есть *сферическая геометрия (постоянной положительной кривизны)*. Эта геометрия реализуется на специальном гиперсфероиде, вложенном в *квазиевклидово пространство*  $\langle Q^{n+q} \rangle$ , заданном рефлектор-тензором и евклидовой метрикой. (В *квазиевклидовой геометрии* рефлектор-тензор не является метрическим, то есть не определяет внутренние и внешние произведения, а задаёт допустимые ротации и рефлексии двух типов!)

Из (247) следует, что *срединный рефлектор определяется однозначно при заданной канонической форме проективного косинуса* (237). Видно также, что срединный рефлектор осуществляет операцию ортогонального отражения (рефлексии) относительно подпространства, задаваемого координатными осями  $u_i$  (то есть зеркала):

$$\text{Ref}\{\cos \tilde{\Phi}_{12}\}^{\ominus} = \text{Rot } \Phi_{12} \cdot \text{Ref}\{A_1 A_1'\} = \text{Rot}(-\Phi_{12}) \cdot \text{Ref}\{A_2 A_2'\}.$$

В *проективной верши* тензорной квазиевклидовой тригонометрии все рефлекторы согласуются аналогично, но по формулам типа:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Ref}\{\cos \tilde{\Phi}_{12}\}^{\ominus} \cdot \text{Ref}\{\cos \tilde{\Phi}_{12}\}^{\ominus} \cdot \text{Ref}\{\cos \tilde{\Phi}_{12}\}^{\ominus} = \text{Ref}\{\cos \tilde{\Phi}_{12}\}^{\ominus}, \\ \text{Ref}\{\cos \tilde{\Theta}_{12}\}^{\ominus} \cdot \text{Ref}\{\cos \tilde{\Phi}_{12}\}^{\ominus} \cdot \text{Ref}\{\cos \tilde{\Theta}_{12}\}^{\ominus} = \text{Ref}\{\cos \tilde{\Phi}_{12}\}^{\ominus}. \end{array} \right\} \quad (252)$$

В квазиевклидовой тригонометрии срединный рефлектор тензорного угла с максимальным тригонометрическим рангом (§ 5.5) может задавать рефлектор-тензор псевдоевклидова пространства (но при условии, что все его тензорные углы тригонометрически согласуются с ним, согласно соотношениям (251)). Тогда он задаёт не только тригонометрический базис диагонального косинуса, но и рефлектор-тензор (247) пространства  $\langle Q^{n+q} \rangle$ :

$$\text{Ref}\{\cos \tilde{\Phi}_{12}\}^{\ominus} = \{\sqrt{I}\}_S \quad (\tau = \tau_{\max} = q) \text{ – рефлектор-тензор в общей форме.}$$

Согласованные ротационные преобразования типа  $\text{Rot } \Phi$  определяются как *главные*; ротационные преобразования типа  $\text{Rot } \Theta$  как *ортосферические*.

### § 5.7. Тригонометрическая теория простых корней $\sqrt{I}$

Далее выясним связь тензорной тригонометрии с теорией корней  $\sqrt{I}$ . Простой квадратный корень и он же рефлктор  $\sqrt{I} = \text{Ref}\{Bp\}$  приводится модальным преобразованием к блочно-единичной форме:

$$\begin{array}{|c|c|} \hline +I & Z \\ \hline Z & -I \\ \hline \end{array} \begin{array}{l} q^+ \\ q^- \end{array} \quad (q^+ + q^- = n);$$

где  $q^+ = \text{rang } Bp = \text{rang } AA' = \text{rang } A = r$ ,

$q^- = \text{sing } Bp = \text{sing } AA' = \text{sing } A' = n - r$ . См. формулы (176), (178), (211).

Определим *тригонометрический ранг* матрицы как  $2\tau = 2\min \langle q^+, q^- \rangle = 2\min \langle r, n - r \rangle$ . Это фактически размерность тригонометрического подпространства любой тригонометрической матрицы. Выделим *симметричные* корни  $(\sqrt{I}) = (\sqrt{I})'$ . Пусть  $(\sqrt{I})_1$  и  $(\sqrt{I})_2$  – пара независимых симметричных корней. Полагаем

$$\left. \begin{array}{l} \overleftarrow{A_1 A_1'} = \frac{I + (\sqrt{I})_1}{2}, \quad \overrightarrow{A_1 A_1'} = \frac{I - (\sqrt{I})_1}{2}, \\ \overleftarrow{A_2 A_2'} = \frac{I + (\sqrt{I})_2}{2}, \quad \overrightarrow{A_2 A_2'} = \frac{I - (\sqrt{I})_2}{2}, \end{array} \right\} \leftrightarrow \begin{cases} (\sqrt{I})_1 = 2\overleftarrow{A_1 A_1'} - I = I - 2\overrightarrow{A_1 A_1'}, \\ (\sqrt{I})_2 = 2\overleftarrow{A_2 A_2'} - I = I - 2\overrightarrow{A_2 A_2'}. \end{cases} \quad (253)$$

Откуда с учётом (163), (171), (176) и (177) получаем:

$$\left. \begin{array}{l} \cos \tilde{\Phi}_{12} - \sin \tilde{\Phi}_{12} = (\sqrt{I})_1 = \text{Ref}\{A_1 A_1'\}, \\ \cos \tilde{\Phi}_{12} + \sin \tilde{\Phi}_{12} = (\sqrt{I})_2 = \text{Ref}\{A_2 A_2'\}. \end{array} \right\} \quad (254)$$

$$\left. \begin{array}{l} \cos \tilde{\Phi}_{12} = \frac{(\sqrt{I})_2 + (\sqrt{I})_1}{2}, \\ \sin \tilde{\Phi}_{12} = \frac{(\sqrt{I})_2 - (\sqrt{I})_1}{2}. \end{array} \right\} \quad (255)$$

Если исходные корни имеют один и тот же тригонометрический ранг, то однородные проекторы эквиранговые и обратно.

#### Следствия

1. Симметричный корень  $\sqrt{I}$  задаёт в  $\langle \mathcal{E}^n \rangle$  взаимно-однозначно сферически ортогональные проектор и рефлктор, а также прямой тензорный угол одного и того же тригонометрического ранга.
2. Пара симметричных корней  $(\sqrt{I})_1$  и  $(\sqrt{I})_2$  задаёт в  $\langle \mathcal{E}^n \rangle$  взаимно-однозначно тензорный угол  $\tilde{\Phi}_{12}$  и его тригонометрические функции.

Если же исходные корни имеют один и тот же тригонометрический ранг, то  $(\sqrt{\Gamma})_2 \cdot (\sqrt{\Gamma})_1 = \text{Rot } 2\Phi_{12}$ .

3. Пара симметричных корней  $(\sqrt{\Gamma})_1$  и  $(\sqrt{\Gamma})_2$  всегда представима в  $\langle \mathcal{E}^n \rangle$  в W-форме одной и той же структуры, согласно (254), в одном и том же ортонормированном базисе  $\{\tilde{E}_1 = R_W \cdot \tilde{E} = \{I\}\}$  при исходном декартовом базисе  $\tilde{E} = \{R\}$ .

Далее выделим простые несимметричные корни  $\sqrt{\Gamma} \neq (\sqrt{\Gamma})'$ . Пусть координаты корней даны также в  $\langle \mathcal{E}^n \rangle$  в некотором исходном ортонормированном базисе  $\{R\}$ . Полагаем

$$\left. \begin{aligned} \overleftarrow{B} &= \frac{I + \sqrt{\Gamma}}{2}, & \overrightarrow{B} &= \frac{I - \sqrt{\Gamma}}{2}, \\ \overleftarrow{B}' &= \frac{I + (\sqrt{\Gamma})'}{2}, & \overrightarrow{B}' &= \frac{I - (\sqrt{\Gamma})'}{2}, \end{aligned} \right\} \leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{\Gamma} = 2\overleftarrow{B} - I = I - 2\overrightarrow{B}, \\ (\sqrt{\Gamma})' = 2\overleftarrow{B}' - I = I - 2\overrightarrow{B}'. \end{cases} \quad (256)$$

Откуда с учётом (198), (203), (211), (212) имеем:

$$\sec \tilde{\Phi}_B - i \cdot \text{tg } \tilde{\Phi}_B = \sqrt{\Gamma} = \text{Ref}\{B\}, \quad (257)$$

$$\sec \tilde{\Phi}_B + i \cdot \text{tg } \tilde{\Phi}_B = (\sqrt{\Gamma})' = \text{Ref}\{B'\}.$$

$$\sec \tilde{\Phi}_B = \frac{(\sqrt{\Gamma})' + \sqrt{\Gamma}}{2}, \quad i \cdot \text{tg } \tilde{\Phi}_B = \frac{(\sqrt{\Gamma})' - \sqrt{\Gamma}}{2}. \quad (258)$$

Исходные корни  $\sqrt{\Gamma}$  и  $(\sqrt{\Gamma})'$  всегда имеют один и тот же тригонометрический ранг. Между простым корнем  $\sqrt{\Gamma} \neq (\sqrt{\Gamma})'$  и  $\overleftarrow{B} \ (\overrightarrow{B})$ , согласно (256), имеется взаимно-однозначное соответствие. Они же однозначно задают эквиванговые ортопроекторы в (253), при этом  $\det \cos \tilde{\Phi}_{12} \neq 0$ , или ортопроекторы  $\overleftarrow{B}'\overleftarrow{B}$  и  $\overrightarrow{B}\overrightarrow{B}'$ , при этом  $\det \cos \tilde{\Phi}_B \neq 0$ , и пару симметричных корней  $(\sqrt{\Gamma})_1$  и  $(\sqrt{\Gamma})_2$ , при этом  $\det [(\sqrt{\Gamma})_1 + (\sqrt{\Gamma})_2] \neq 0$ . Для этого дополнительно используются соотношения типа (186)–(189) и (226).

### Следствия

1. Простой несимметричный корень  $\sqrt{\Gamma}$  задаёт в  $\langle \mathcal{E}^n \rangle$  взаимно-однозначно сферически косогональные проектор, рефлектор и тригонометрические функции  $\text{tg } \tilde{\Phi}_B$  и  $\sec \tilde{\Phi}_B$  и однозначно пару эквиванговых ортопроекторов и орторефлекторов, а также тензорный угол  $\tilde{\Phi}_B$  и тригонометрические функции  $\sin \tilde{\Phi}_B$  и  $\cos \tilde{\Phi}_B$ .

2. Все характеристические проекторы  $\overleftarrow{B}, \overrightarrow{B}, \overleftarrow{B}', \overrightarrow{B}'$ , а также тригонометрические функции угла  $\tilde{\Phi}_B$  и соответствующие им рефлекторы (тригонометрические корни) в  $\langle \mathcal{E}^n \rangle$  приводятся к согласованным W-формам в одном и том же ортонормированном базисе  $\tilde{E}_1 = R_W \cdot \tilde{E} = \{I\}$  при исходном декартовом базисе  $\tilde{E} = \{R\}$ .

(Наиболее общо аналогичные “тригонометрические” утверждения имеют место для симметричных и простых несимметричных корней типа  $\sqrt{S}$ .)

**§ 5.8. Моторные тензорные синус, косинус, секанс и тангенс**

Тензорный косинус и синус моторного угла формально определяются через ротационную ортогональную матрицу, ранее полученную в (243)-(246), (причём  $\det R = +1 \leftrightarrow R = \text{Rot } \Phi$ ), как

$$\cos \Phi = \cos' \Phi = \frac{\text{Rot } \Phi + \text{Rot}' \Phi}{2} = \frac{\text{Rot } \Phi + \text{Rot} (-\Phi)}{2}, \quad (259)$$

$$i \sin \Phi = - (i \sin \Phi)' = \frac{\text{Rot } \Phi - \text{Rot}' \Phi}{2} = \frac{\text{Rot } \Phi - \text{Rot} (-\Phi)}{2}. \quad (260)$$

Форма синуса обусловлена тем, что это кососимметричная матрица с её D-формой в комплексном  $\tilde{E}_c$  и с собственными значениями  $\mu_j = \pm i \cdot \sin \varphi_j$ . Тензорный секанс определим в исходном базисе, а тензорный тангенс определим в общем комплексном базисе  $\tilde{E}_c$  для D-форм синуса и тангенса.

$$\sec \Phi = \sec' \Phi = \cos^{-1} \Phi, \quad (261)$$

$$\{ \text{tg } \Phi \}_D = \{ \sin \Phi \}_D \cdot \{ \sec \Phi \}_D = \{ \sec \Phi \}_D \cdot \{ \sin \Phi \}_D = \{ \text{tg}' \Phi \}_D. \quad (262)$$

(определение тангенса в исходном базисе будет дано в параграфе 5.10.)

Очевидны тригонометрические соотношения, аналогичные ранее полученным для проективных функций:

$$\cos^2 \Phi + \sin^2 \Phi = I = \cos^2 \Phi - (i \sin \Phi)^2. \quad (263)$$

$$\sec^2 \Phi - \text{tg}^2 \Phi = I. \quad (264)$$

Вышеуказанные пары тензорных моторных функций коммутативны:

$$\cos \Phi \cdot \sin \Phi = \sin \Phi \cdot \cos \Phi, \quad \sec \Phi \cdot \text{tg } \Phi = \text{tg } \Phi \cdot \sec \Phi. \quad (265,266)$$

Для моторных углов и функций необходимо выполняется условие  $\langle \mathcal{P}_4 \rangle = \mathbf{0}$ . Канонические W-формы вещественной ортогональной матрицы, а также моторного косинуса и синуса в тригонометрическом базисе имеют вид:

$$\text{Rot } \Phi = \cos \Phi + i \cdot \sin \Phi = \exp (i\Phi) = \text{Rot}' (-\Phi) = \text{Rot}^{-1} (-\Phi) = \quad (267)$$

$$= \begin{array}{c} \cos \Phi \qquad \qquad \sin \Phi \\ \begin{array}{|c|c|} \hline \cos \varphi_j & 0 \\ \hline 0 & \cos \varphi_j \\ \hline \end{array} + i \cdot \begin{array}{|c|c|} \hline 0 & +i \cdot \sin \varphi_j \\ \hline -i \cdot \sin \varphi_j & 0 \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|} \hline 0 \\ \hline \end{array} \cdot \langle \mathcal{P}_3 \rangle \end{array}$$

Далее установим канонические формы моторных функций и угла. Для этого сначала перейдём в комплексный базис диагональной формы синуса, а затем вернёмся в исходный *вещественный тригонометрический базис* (то есть в базис диагонального косинуса). Это в итоге тождественное модальное преобразование позволяет установить каноническую форму моторного угла в тригонометрическом базисе:

$$\begin{aligned}
 & \begin{array}{c} \tilde{E}_D \\ \rightarrow \cos \end{array} \begin{array}{c} D\{\Phi\} \\ \begin{array}{|c|c|} \hline +\varphi_j & 0 \\ \hline 0 & -\varphi_j \\ \hline \end{array} \end{array} + i \cdot \sin \begin{array}{c} D\{\Phi\} \\ \begin{array}{|c|c|} \hline +\varphi_j & 0 \\ \hline 0 & -\varphi_j \\ \hline \end{array} \end{array} \begin{array}{c} \tilde{E}_D^{-1} \\ \rightarrow \end{array} \\
 & \begin{array}{c} \Phi \\ \begin{array}{|c|c|} \hline 0 & +i \cdot \varphi_j \\ \hline -i \cdot \varphi_j & 0 \\ \hline \end{array} \end{array} + i \cdot \sin \begin{array}{c} \Phi \\ \begin{array}{|c|c|} \hline 0 & +i \cdot \varphi_j \\ \hline -i \cdot \varphi_j & 0 \\ \hline \end{array} \end{array} = \\
 & = \exp \begin{array}{c} i\Phi \\ \begin{array}{|c|c|} \hline 0 & -\varphi_j \\ \hline +\varphi_j & 0 \\ \hline \end{array} \end{array} .
 \end{aligned}$$

В дополнение к формулам (164) и (170) для углов проективного типа отсюда вытекают родственные соотношения для углов моторного типа:

$$\Phi_{12} = -(\Phi_{12})' = -\Phi_{21}, \quad \Phi_B = -(\Phi_B)' = -\Phi_{B'} . \tag{268}$$

$$\begin{array}{c} \cos \\ \rightarrow \end{array} \begin{array}{c} \Phi \\ \begin{array}{|c|c|} \hline 0 & +i \cdot \varphi_j \\ \hline -i \cdot \varphi_j & 0 \\ \hline \end{array} \end{array} = \begin{array}{c} \cos \\ \rightarrow \end{array} \begin{array}{c} D\{\Phi\} \\ \begin{array}{|c|c|} \hline +\varphi_j & 0 \\ \hline 0 & -\varphi_j \\ \hline \end{array} \end{array} = \begin{array}{c} \cos \Phi \\ \begin{array}{|c|c|} \hline \cos \varphi_j & 0 \\ \hline 0 & \cos \varphi_j \\ \hline \end{array} \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ \rightarrow \end{array}$$

(эта формула более очевидна, если использовать ряд Маклорена),

$$\begin{array}{c} i \cdot \sin \\ \rightarrow \end{array} \begin{array}{c} \Phi \\ \begin{array}{|c|c|} \hline 0 & +i \cdot \varphi_j \\ \hline -i \cdot \varphi_j & 0 \\ \hline \end{array} \end{array} = \begin{array}{c} i \cdot \sin \Phi \\ \begin{array}{|c|c|} \hline 0 & -\sin \varphi_j \\ \hline +\sin \varphi_j & 0 \\ \hline \end{array} \end{array} .$$

Заметим: после замены в  $\text{Rot } \Phi$  тензорного угла  $\Phi$  на дополнительный угол  $\Xi$  с использованием формул (175), новая – *синус-косинусная матрица-функция* от  $\Phi(\Xi)$  даёт ротацию на дополнительный угол  $\Xi$ !



### § 5.9. Взаимосвязь между проективными и моторными тригонометрическими функциями и углами

С учётом (236)–(239), (261), (262) и (267) получаем соотношение:

$$\text{Ref}\{\cos \tilde{\Phi}\}^{\ominus} \cdot (i\tilde{\Phi}) = \Phi = (-i\tilde{\Phi}) \cdot \text{Ref}\{\cos \tilde{\Phi}\}^{\ominus}, \quad (269)$$

$$(\tilde{\Phi}^2 = \Phi^2);$$

$$\text{Ref}\{\cos \tilde{\Phi}\}^{\ominus} \cdot \begin{Bmatrix} \cos \tilde{\Phi} \\ -\sin \tilde{\Phi} \\ \sec \tilde{\Phi} \\ -i \operatorname{tg} \tilde{\Phi} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \cos \Phi \\ i \sin \Phi \\ \sec \Phi \\ \operatorname{tg} \Phi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \cos \tilde{\Phi} \\ \sin \tilde{\Phi} \\ \sec \tilde{\Phi} \\ i \operatorname{tg} \tilde{\Phi} \end{Bmatrix} \cdot \text{Ref}\{\cos \tilde{\Phi}\}^{\ominus}. \quad (270)$$

**Правило №4.** Квадраты и любые чётные степени тензорного угла проективного и моторного типа, а также их тригонометрических функций одноимённого вида равны.

Углы  $\tilde{\Phi}$  и  $\Phi$  суть симметричный и кососимметричный тензоры, приводимые к тождественным диагональным формам, но в различных ортогональных базисах – декартовом и эрмитово ортонормированном. Здесь, конечно, подразумевается, что  $\langle \mathcal{P}_4 \rangle = \mathbf{0}$ , например при  $\tilde{\Phi} = \tilde{\Phi}_B$ .

Для преобразования вещественных сферических тригонометрических функций в комплексные псевдосферические с целью естественного ввода затем тензорных гиперболических функций определим локальный комплексный тригонометрический базис  $\tilde{E}_0$ . Ему отвечает модальная матрица перехода из  $\tilde{E}_1 = \{I\}$  в базис  $\tilde{E}_0$  – псевдоарифметический квадратный корень из срединного рефлектора тензорного угла (248):

$$\tilde{E}_0 = R'_W \cdot \sqrt{\text{Ref}\{\cos \tilde{\Phi}\}^{\ominus}} \cdot R_W \cdot \tilde{E}_1 = \begin{array}{|c|c|} \hline +1 & 0 \\ \hline 0 & +i \\ \hline \end{array} \cdot \tilde{E}_1 = (\sqrt{I^{\ominus}}) \cdot \{I\} = R_c \cdot \{I\}. \quad (271)$$

При этом подпространству  $\langle \mathcal{P}_3 \rangle$  соответствует либо мнимо-единичный блок ( $2\gamma < n$ ), либо положительный единичный блок ( $2\gamma > n$ ), либо этот блок вовсе отсутствует ( $2\gamma = n$ ). Комплексный тригонометрический базис отличается от вещественного тем, что в нём координаты, отвечающие исходно отрицательным собственным значениям проективного косинуса (то есть ординаты), мнимонизированы:  $v_j \rightarrow i \cdot v_j$ . При переходе в комплексный тригонометрический базис  $\tilde{E}_0$  косинус и секанс не изменяются, а угол, синус и тангенс трансформируются в псевдогиперболические аналоги. (Далее нижние индексы «г» и «с» отвечают соответственно вышеуказанным вещественному  $\tilde{E}_1 = \{I\}$  и комплексному  $\tilde{E}_0$  локальному тригонометрическому базису.)

$$R_c^{-1} \cdot \{\tilde{\Phi}\}_r \cdot R_c \equiv i \cdot \{-i\tilde{\Phi}\}_c \equiv \{\Phi\}_r \leftrightarrow R_c^{-1} \cdot \{i\Phi\}_r \cdot R_c \equiv \{-i\Phi\}_c \equiv \{-i\tilde{\Phi}\}_r, \quad (272)$$

$$R_c^{-1} \cdot \{\sin \tilde{\Phi}\}_r \cdot R_c \equiv \{i \operatorname{sh}(-i\tilde{\Phi})\}_c \equiv \{\sin \Phi\}_r \leftrightarrow \quad (273)$$

$$\leftrightarrow R_c^{-1} \cdot \{i \sin \Phi\}_r \cdot R_c \equiv \{\operatorname{sh}(-i\Phi)\}_c \equiv \{-i \sin \tilde{\Phi}\}_r, \quad (274)$$

$$R_c^{-1} \cdot \{i \operatorname{tg} \tilde{\Phi}\}_r \cdot R_c \equiv \{\operatorname{th}(-i\tilde{\Phi})\}_c \equiv \{-i \operatorname{tg} \Phi\}_r \leftrightarrow \quad (275)$$

$$\leftrightarrow R_c^{-1} \cdot \{\operatorname{tg} \Phi\}_r \cdot R_c \equiv \{i \operatorname{th}(-i\Phi)\}_c \equiv \{\operatorname{tg} \tilde{\Phi}\}_r. \quad (276)$$

Ниже сопоставлены канонические формы угла и функций в тригонометрических базисах – вещественном (слева) и комплексном (справа):

$$\{\tilde{\Phi}\}_r = \begin{array}{|c|c|} \hline 0 & \varphi_j \\ \hline \varphi_j & 0 \\ \hline \end{array} = \{\tilde{\Phi}\}'_r, \quad \{\tilde{\Phi}\}_c = \begin{array}{|c|c|} \hline 0 & +i \cdot \varphi_j \\ \hline -i \cdot \varphi_j & 0 \\ \hline \end{array} = \{\tilde{\Phi}\}_c^*, \quad (277)$$

$$\{i\Phi\}_r = \begin{array}{|c|c|} \hline 0 & -\varphi_j \\ \hline +\varphi_j & 0 \\ \hline \end{array} = -\{i\Phi\}'_r, \quad \{-i\Phi\}_c = \begin{array}{|c|c|} \hline 0 & -i \cdot \varphi_j \\ \hline -i \cdot \varphi_j & 0 \\ \hline \end{array} = \{i\Phi\}_c^*; \quad (278)$$

$$\{\cos \tilde{\Phi}\}_r = \begin{array}{|c|c|} \hline +\cos \varphi_j & 0 \\ \hline 0 & -\cos \varphi_j \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline +\operatorname{ch} i\varphi_j & 0 \\ \hline 0 & -\operatorname{ch} i\varphi_j \\ \hline \end{array} = \{\operatorname{ch}(\pm i\tilde{\Phi})\}_c, \quad (279)$$

$$\{\cos \Phi\}_r = \begin{array}{|c|c|} \hline \cos \varphi_j & 0 \\ \hline 0 & \cos \varphi_j \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline \operatorname{ch} i\varphi_j & 0 \\ \hline 0 & \operatorname{ch} i\varphi_j \\ \hline \end{array} = \{\operatorname{ch}(\pm i\Phi)\}_c, \quad (280)$$

$$\{\sec \tilde{\Phi}\}_r = \begin{array}{|c|c|} \hline +\sec \varphi_j & 0 \\ \hline 0 & -\sec \varphi_j \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline +\operatorname{sch} i\varphi_j & 0 \\ \hline 0 & -\operatorname{sch} i\varphi_j \\ \hline \end{array} = \{\operatorname{sch}(\pm i\tilde{\Phi})\}_c, \quad (281)$$

$$\{\sec \Phi\}_r = \begin{array}{|c|c|} \hline \sec \varphi_j & 0 \\ \hline 0 & \sec \varphi_j \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline \operatorname{sch} i\varphi_j & 0 \\ \hline 0 & \operatorname{sch} i\varphi_j \\ \hline \end{array} = \{\operatorname{sch}(\pm i\Phi)\}_c; \quad (282)$$

$$\{\sin \tilde{\Phi}\}_r = \begin{array}{|c|c|} \hline 0 & \sin \varphi_j \\ \hline \sin \varphi_j & 0 \\ \hline \end{array}, \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 0 & +\operatorname{sh} i\varphi_j \\ \hline -\operatorname{sh} i\varphi_j & 0 \\ \hline \end{array} = \{i \operatorname{sh}(-i\tilde{\Phi})\}_c, \quad (283)$$

$$\{i \sin \Phi\}_r = \begin{array}{|c|c|} \hline 0 & -\sin \varphi_j \\ \hline +\sin \varphi_j & 0 \\ \hline \end{array}, \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 0 & -\operatorname{sh} i\varphi_j \\ \hline -\operatorname{sh} i\varphi_j & 0 \\ \hline \end{array} = \{\operatorname{sh}(-i\Phi)\}_c; \quad (284)$$

$$\{i \operatorname{tg} \tilde{\Phi}\}_r = \begin{array}{|c|c|} \hline 0 & -\operatorname{tg} \varphi_j \\ \hline +\operatorname{tg} \varphi_j & 0 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline 0 & -\operatorname{th} i\varphi_j \\ \hline -\operatorname{th} i\varphi_j & 0 \\ \hline \end{array} = \{\operatorname{th}(-i\tilde{\Phi})\}_c, \quad (285)$$

$$\{\operatorname{tg} \Phi\}_r = \begin{array}{|c|c|} \hline 0 & \operatorname{tg} \varphi_j \\ \hline \operatorname{tg} \varphi_j & 0 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline 0 & +\operatorname{th} i\varphi_j \\ \hline -\operatorname{th} i\varphi_j & 0 \\ \hline \end{array} = \{i \operatorname{th}(-i\Phi)\}_c. \quad (286)$$

Для ротационной ортогональной матрицы справедливы формулы Муавра и Эйлера:

$$\operatorname{Rot}^m \Phi = \cos \{m \cdot \Phi\} + i \sin \{m \cdot \Phi\} = \\ = \operatorname{ch} \{m \cdot i\Phi\} + \operatorname{sh} \{m \cdot i\Phi\} = \exp \{m \cdot i\Phi\} = \operatorname{Rot} \{m \cdot \Phi\}. \quad (287)$$

В вещественном тригонометрическом базисе это интерпретируется как

$$\operatorname{Rot}^m \Phi = \begin{array}{|c|c|} \hline \cos m\varphi_j & -\sin m\varphi_j \\ \hline +\sin m\varphi_j & \cos m\varphi_j \\ \hline \end{array} = \exp \begin{array}{|c|c|} \hline 0 & -m\varphi_j \\ \hline +m\varphi_j & 0 \\ \hline \end{array}.$$

В комплексном тригонометрическом базисе это интерпретируется как

$$\{\operatorname{Rot}^m \Phi\}_c = \begin{array}{|c|c|} \hline \cos m\varphi_j & -i \sin m\varphi_j \\ \hline -i \sin m\varphi_j & \cos m\varphi_j \\ \hline \end{array} = \exp \begin{array}{|c|c|} \hline 0 & -i m\varphi_j \\ \hline -i m\varphi_j & 0 \\ \hline \end{array}.$$

(Если в эти формулы подставить  $m = 1/2$ , то таким образом можно вычислить именно *тригонометрический квадратный корень* типа (245) из ротационной матрицы-функции).

### § 5.10. Деформационные тензорные тригонометрические функции от сферических углов моторного типа

К сферической ротационной матрице-функции ранее формально привело последовательное применение *ортогональных* рефлекторов, связанных с двумя эквиранговыми линеорами (планарами), согласно (243). Аналогичным образом, с использованием принципа бинарности последовательное применение *косогональных* рефлекторов, связанных

с той же парой эквиванговых линейоров (планаров), формально приводит к определению другого нового понятия – *сферической деформационной матрицы-функции*. Как и ротационная матрица-функция, она имеет бинарную элементарную тригонометрическую структуру в виде:

$$\begin{array}{|c|c|} \hline \text{Ref}\{B'\} \\ \hline \sec \varphi_j & -\text{tg } \varphi_j \\ \hline \text{tg } \varphi_j & -\sec \varphi_j \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|c|} \hline \text{Ref}\{B\} \\ \hline \sec \varphi_j & \text{tg } \varphi_j \\ \hline -\text{tg } \varphi_j & -\sec \varphi_j \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline \text{Def } \alpha_B \\ \hline \sec \alpha_j & \text{tg } \alpha_j \\ \hline \text{tg } \alpha_j & \sec \alpha_j \\ \hline \end{array} \quad (\alpha_B \neq 2\tilde{\Phi}_B).$$

При этом подпространству  $\langle \mathcal{P}_3 \rangle$  в указанном произведении всегда соответствует диагонально-единичный блок. В целом же указанная матрица-функция осуществляет сферическую деформацию на тензорный угол  $\alpha_B$ . В аналитической форме это матричное преобразование реализуется аналогично (243) и (244):

$$\begin{aligned} \text{Ref}\{B'\} \cdot \text{Ref}\{B\} &= (\sec \tilde{\Phi}_B + i \text{tg } \tilde{\Phi}_B) \cdot (\sec \tilde{\Phi}_B - i \text{tg } \tilde{\Phi}_B) = \\ &= (\sec^2 \tilde{\Phi}_B + \text{tg}^2 \tilde{\Phi}_B) + (2i \cdot \text{tg } \tilde{\Phi}_B \cdot \sec \tilde{\Phi}_B) = \text{Def } \alpha_B, \end{aligned} \quad (288)$$

$$\text{Ref}\{B\} \cdot \text{Ref}\{B'\} = \text{Def}^{-1} \alpha_B = \text{Def}(-\alpha_B). \quad (289)$$

Приставка «Def» обозначает деформационную матрицу-функцию от тензорного сферического угла моторного типа. Но если ротационные тензорные функции имеют синусно-косинусную природу, то как бы аналогичные им по формальному определению деформационные тензорные функции имеют тангенсно-секансную природу. (Полной аналогии в *сферическом* варианте угла здесь, очевидно, нет.) Бинарная тензорная деформация осуществляется также, как и ротация, в тригонометрическом подпространстве (рис. 2) относительно его сферически ортогонального дополнения. Тензорные секанс и тангенс *теперь уже вполне естественным путём* определяются через сферическую деформационную матрицу соотношениями, аналогичными (259) и (260), и дополняя по смыслу (261), (262):

$$\sec \Phi = (\text{Def } \Phi + \text{Def}^{-1} \Phi) / 2 = [\text{Def } \Phi + \text{Def}(-\Phi)] / 2, \quad (290)$$

$$\text{tg } \Phi = (\text{Def } \Phi - \text{Def}^{-1} \Phi) / 2 = [\text{Def } \Phi - \text{Def}(-\Phi)] / 2. \quad (291)$$

Тензорные косеканс и котангенс моторного угла определяются соответственно как обратные или квазиобратные синус и тангенс. Каноническая *W*-форма для вещественной деформационной матрицы реализуется в том же вещественном тригонометрическом базисе:

$$\text{Def } \Phi = \text{Def}' \Phi = \sec \Phi + \text{tg } \Phi = \begin{pmatrix} \sec \varphi_j & \text{tg } \varphi_j \\ \text{tg } \varphi_j & \sec \varphi_j \end{pmatrix}, \quad (292)$$

1

$$\text{Def}^{-1} \Phi = \text{Def}(-\Phi) = \sec \Phi - \text{tg } \Phi. \quad (293)$$

Канонические формы ротационной и деформационной матриц-функций сферического тензорного угла в комплексном тригонометрическом базисе имеют вид:

$$\{\text{Rot } \Phi\}_c = \cos \Phi + \{-i \cdot \sin \Phi\}_c = \begin{pmatrix} \cos \varphi_j & -i \cdot \sin \varphi_j \\ -i \cdot \sin \varphi_j & \cos \varphi_j \end{pmatrix} =$$

$$= \text{ch}(-i\Phi) + \text{sh}(-i\Phi), \quad (294)$$

1

$$\{\text{Rot } \Phi\}_c^{-1} = \{\text{Rot}(-\Phi)\}_c = \cos \Phi + \{i \cdot \sin \Phi\}_c = \text{ch}(-i\Phi) - \text{sh}(-i\Phi); \quad (295)$$

$$\{\text{Def } \Phi\}_c = \sec \Phi + \{\text{tg } \Phi\}_c = \begin{pmatrix} \sec \varphi_j & -i \cdot \text{tg } \varphi_j \\ +i \cdot \text{tg } \varphi_j & \sec \varphi_j \end{pmatrix} = \text{sch}(-i\Phi) + i \cdot \text{th}(-i\Phi), \quad (296)$$

1

$$\{\text{Def } \Phi\}_c^{-1} = \{\text{Def}(-\Phi)\}_c = \sec \Phi - \{\text{tg } \Phi\}_c = \text{sch}(-i\Phi) - i \cdot \text{th}(-i\Phi). \quad (297)$$

Как для ротационной, так и для бинарной деформационной матрицы детерминант каждой клетки W-формы и в целом равен +1. Деформационная матрица-функция от сферического угла симметрична и положительно определена. Ротация базисов 2×2-клеток W-формы, то есть в пределах собственных тригонометрических плоскостей, на углы  $\varphi_j = \pm \pi/4$  приводит к диагонализации этих клеток. Собственные значения матрицы:  $\mu_{2j} = \sec \varphi_j + \text{tg } \varphi_j > 0$ ,  $\mu_{2j+1} = \sec \varphi_j - \text{tg } \varphi_j = \mu_{2j}^{-1} > 0$  и, возможно,  $\mu_k = +1$ . Чтобы выяснить суть бинарного деформационного преобразования, представим его в виде:

$$\begin{pmatrix} \sec \varphi_j & \text{tg } \varphi_j \\ \text{tg } \varphi_j & \sec \varphi_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \pi/4 & -\sin \pi/4 \\ \sin \pi/4 & \cos \pi/4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sec \varphi_j + \text{tg } \varphi_j & 0 \\ 0 & \sec \varphi_j - \text{tg } \varphi_j \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \pi/4 & \sin \pi/4 \\ -\sin \pi/4 & \cos \pi/4 \end{pmatrix}.$$

Отсюда видно, что модальное сферическое деформационное преобразование в канонической форме (292) сводится на собственной тригонометрической плоскости к тому, что осуществляется растяжение координатной сетки по главной диагонали (1-й и 3-й квадрант) с

коэффициентом  $\mu = \sec \varphi + \operatorname{tg} \varphi > 0$  и сжатие сетки по побочной диагонали с обратным коэффициентом  $\mu^{-1} = \sec \varphi - \operatorname{tg} \varphi > 0$ . По аналогии с представлением комплексного числа в форме (149), любое *положительное* число  $\mu$  и обратное ему взаимно-однозначно представляются через сферический угол:

$$\left. \begin{aligned} \mu &= \sec \varphi + \operatorname{tg} \varphi > 0, \\ \mu^{-1} &= \sec \varphi - \operatorname{tg} \varphi > 0, \end{aligned} \right\} \longleftrightarrow \begin{cases} \sec \varphi = (\mu + \mu^{-1})/2, \\ \operatorname{tg} \varphi = (\mu - \mu^{-1})/2. \end{cases} \quad (298)$$

Дадим ещё одну интерпретацию бинарного деформационного преобразования, связанную с использованием *перекрёстных базисов*. В частности, она применима при релятивистских преобразованиях в пространстве-времени Минковского. А именно пусть декартовы базисы  $\tilde{E}_i$  и  $\tilde{E}_j$  связаны ротационным преобразованием:  $\tilde{E}_i = \operatorname{Rot}(-\Phi_{ij}) \cdot \tilde{E}_j$ . Декартовы координаты вектора в обоих базисах связаны пассивным преобразованием:

$$a^{(i)} = \operatorname{Rot} \Phi_{ij} \cdot a^{(j)} = \begin{array}{|c|c|} \hline \cos \varphi_t & -\sin \varphi_t \\ \hline \sin \varphi_t & \cos \varphi_t \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|} \hline x_1^{(j)} \\ \hline x_2^{(j)} \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline \cos \varphi_t \cdot x_1^{(j)} - \sin \varphi_t \cdot x_2^{(j)} \\ \hline \sin \varphi_t \cdot x_1^{(j)} + \cos \varphi_t \cdot x_2^{(j)} \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline x_1^{(i)} \\ \hline x_2^{(i)} \\ \hline \end{array}.$$

В пределах  $t$ -й  $2 \times 2$ -клетки базис  $\tilde{E}_j$  повернут относительно базиса  $\tilde{E}_i$  на угол  $\varphi_t$  по часовой стрелке. Определим *перекрёстные* базисы  $\tilde{E}_{i,j}$  со смешанными осями  $\langle x_1^{(i)}, x_2^{(i)} \rangle$  и  $\tilde{E}_{j,i}$  со смешанными осями  $\langle x_1^{(j)}, x_2^{(j)} \rangle$ . Они связаны *активным* модальным преобразованием вида

$$\tilde{E}_{i,j} = \operatorname{Def}(-\Phi_{ij}) \cdot \tilde{E}_{j,i}. \quad (299)$$

В пределах той же  $2 \times 2$ -клетки *перекрёстные координаты* вектора в обоих базисах связаны пассивным модальным преобразованием того же вида:

$$a^{(i,j)} = \operatorname{Def} \Phi_{ij} \cdot a^{(j,i)} = \begin{array}{|c|c|} \hline \sec \varphi_t & \operatorname{tg} \varphi_t \\ \hline \operatorname{tg} \varphi_t & \sec \varphi_t \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|} \hline x_1^{(j,i)} \\ \hline x_2^{(j,i)} \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline \sec \varphi_t \cdot x_1^{(j,i)} - \operatorname{tg} \varphi_t \cdot x_2^{(j,i)} \\ \hline \operatorname{tg} \varphi_t \cdot x_1^{(j,i)} + \sec \varphi_t \cdot x_2^{(j,i)} \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline x_1^{(i,j)} \\ \hline x_2^{(j,i)} \\ \hline \end{array}. \quad (300)$$

Здесь координаты вектора находятся *перекрёстным проецированием*. Заметим, что в евклидовом пространстве при декартовом проецировании значениям координат тензорного объекта соответствуют евклидовы тригонометрические инварианты (182), (263), а при перекрёстном проецировании значениям координат тензорного объекта соответствуют тригонометрические квазиинварианты формально типа (208), (264).

Естественным обобщением бинарной сферической деформационной матрицы является положительно определённая симметричная матрица с единичным детерминантом, например  $\{G/\sqrt[n]{\det G}\}$ . Любое линейное модальное преобразование  $V$  без рефлексии (для двухвалентных тензоров) сводится к модальной матрице с единичным детерминантом. Поэтому, согласно её полярному разложению, такое модальное преобразование представляется произведением ротационной и обобщённой деформационной матриц при сохранении одной и той же ориентации базиса, то есть при  $\det V > 0$ .

### § 5.11. Специальные модальные преобразования собственных ортогональных и косогональных проекторов и рефлекторов

В тензорной тригонометрии между центральным планаром и симметричным проектором одного и того же ранга имеется взаимно-однозначное соответствие. То же в евклидовом пространстве относится к их ортогональным дополнениям. Эквиванговые планары, как и ортопроекторы, преобразуются друг в друга посредством как тензорной ротации, так и тензорной рефлексии. Формулы модального преобразования следуют, например, из (252), (176), (177) или непосредственно с применением принципа бинарности:

$$\overleftrightarrow{A_2 A_2'} = \text{Rot } \overleftrightarrow{\Phi_{12}} \cdot \overleftrightarrow{A_1 A_1'} \cdot \text{Rot } (-\overleftrightarrow{\Phi_{12}}) = \text{Ref } \{\cos \tilde{\Phi}_{12}\}^{\ominus} \cdot \overleftrightarrow{A_1 A_1'} \cdot \text{Ref } \{\cos \tilde{\Phi}_{12}\}^{\ominus}, \quad (301)$$

$$\overleftrightarrow{B' B} = \text{Rot } \overleftrightarrow{\Phi_B} \cdot \overleftrightarrow{B B'} \cdot \text{Rot } (-\overleftrightarrow{\Phi_B}) = \text{Ref } \{\cos \tilde{\Phi}_B\}^{\ominus} \cdot \overleftrightarrow{B B'} \cdot \text{Ref } \{\cos \tilde{\Phi}_B\}^{\ominus}. \quad (302)$$

Они преобразуются как ортогональные тензоры валентности 2. “Внутри” символического октаэдра (рис. 1), проведя диагональ PQ, можно указать два характеристических “равнобедренных” тензорных треугольника PZQ и PIQ, где  $\angle PZQ \equiv \angle PIQ \equiv \Phi_B$ . Кроме того, в тензорной тригонометрии, согласно условиям (217) – (220), имеется взаимно-однозначное соответствие между парой центральных эквиванговых планаров  $\langle \text{im } A_1 \rangle$  и  $\langle \text{im } A_2 \rangle$  ранга  $r$  ( $\det A_1' A_2 \neq 0$ ) и косопроекторами  $\overleftrightarrow{B}$  и  $\overleftrightarrow{B'}$ . Характеристические косопроекторы  $\overleftrightarrow{B}$  и  $\overleftrightarrow{B'}$  ( $\overleftrightarrow{B}$  и  $\overleftrightarrow{B'}$ ) преобразуются друг в друга посредством как бинарной тензорной деформации, так и тензорной рефлексии. Формулы преобразований, аналогичные (252), (301), (302), устанавливаются также исходя из принципа бинарности и структуры косопроекторов (211), (212):

$$\begin{aligned} \text{Ref } \{B'\} &= \text{Def } \overleftrightarrow{\Phi_B} \cdot \text{Ref } \{B\} \cdot \text{Def } (-\overleftrightarrow{\Phi_B}) = \\ &= \text{Ref } \{\cos \tilde{\Phi}_B\}^{\ominus} \cdot \text{Ref } \{B\} \cdot \text{Ref } \{\cos \tilde{\Phi}_B\}^{\ominus}, \end{aligned} \quad (303)$$

$$\overleftrightarrow{B}' = \text{Def } \overleftrightarrow{\Phi}_B \cdot \overleftrightarrow{B} \cdot \text{Def } (-\overleftrightarrow{\Phi}_B) = \text{Ref } \{\cos \overleftrightarrow{\Phi}_B\}^\ominus \cdot \overleftrightarrow{B} \cdot \text{Ref } \{\cos \overleftrightarrow{\Phi}_B\}^\ominus. \quad (304)$$

Аналогично (251), имеем:

$$\text{Ref } \{\cos \overleftrightarrow{\Phi}_B\}^\ominus = \text{Def } \overleftrightarrow{\Phi}_B \cdot \text{Ref } \{B\} = \text{Def } (-\overleftrightarrow{\Phi}_B) \cdot \text{Ref } \{B'\}. \quad (305)$$

“Внутри” символического октаэдра (рис. 1), проведя диагональ RS, можно указать ещё два особых характеристических треугольника: RZS и RIS. Они будут рассмотрены в главе 6.

Формулы рефлективного модального преобразования характеристических проекторов в (301) и в (304) приводятся к тригонометрической форме путём поклеточного умножения слева и справа на собственные косинусы и секансы (что возможно лишь для нуль-простой исходной матрицы):

$$\left\{ \begin{array}{c} \overleftrightarrow{B'B} \\ \overleftrightarrow{B'} \end{array} \right\} = \cos \overleftrightarrow{\Phi}_B \cdot \left\{ \begin{array}{c} \overleftrightarrow{BB'} \\ \overleftrightarrow{B} \end{array} \right\} \cdot \sec \overleftrightarrow{\Phi}_B = \sec \overleftrightarrow{\Phi}_B \cdot \left\{ \begin{array}{c} \overleftrightarrow{BB'} \\ \overleftrightarrow{B} \end{array} \right\} \cdot \cos \overleftrightarrow{\Phi}_B. \quad (306)$$

Эти модальные формулы нетрудно проверить через таблицу умножения характеристических проекторов (см. § 5.2). Формулы (302), (304), (306) – примеры модального преобразования, осуществляемого либо ротационной, либо рефлективной, либо симметричной тригонометрическими матрицами, но с *одинаковым* результатом.

В обратном порядке изложения все характеристические проекторы представляются через соответствующие им пары антикоммутирующих проективных тригонометрических функций, заданных как бы самостоятельным образом. Это непосредственно следует из (176)–(179):

$$\left. \begin{array}{l} \overleftarrow{A_1 A_1'} = 1/2 \cdot (I + \cos \overleftrightarrow{\Phi} - \sin \overleftrightarrow{\Phi}) = \overleftarrow{B B'}, \\ \overrightarrow{A_1 A_1'} = 1/2 \cdot (I - \cos \overleftrightarrow{\Phi} + \sin \overleftrightarrow{\Phi}) = \overrightarrow{B B'}, \\ \overleftarrow{A_2 A_2'} = 1/2 \cdot (I + \cos \overleftrightarrow{\Phi} + \sin \overleftrightarrow{\Phi}) = \overleftarrow{B' B}, \\ \overrightarrow{A_2 A_2'} = 1/2 \cdot (I - \cos \overleftrightarrow{\Phi} - \sin \overleftrightarrow{\Phi}) = \overrightarrow{B' B}; \end{array} \right\} \quad (307)$$

$$\left. \begin{array}{l} \overleftarrow{B} = 1/2 \cdot (I + \sec \overleftrightarrow{\Phi} - i \text{tg } \overleftrightarrow{\Phi}) = \overleftarrow{A_1 A_2'}, \\ \overrightarrow{B} = 1/2 \cdot (I - \sec \overleftrightarrow{\Phi} + i \text{tg } \overleftrightarrow{\Phi}) = \overrightarrow{A_1 A_2'}, \\ \overleftarrow{B'} = 1/2 \cdot (I + \sec \overleftrightarrow{\Phi} + i \text{tg } \overleftrightarrow{\Phi}) = \overleftarrow{A_2 A_1'}, \\ \overrightarrow{B'} = 1/2 \cdot (I - \sec \overleftrightarrow{\Phi} - i \text{tg } \overleftrightarrow{\Phi}) = \overrightarrow{A_2 A_1'}. \end{array} \right\} \quad (308)$$



Отсюда непосредственно следует применимость и для проекторов принципа бинарности. Множество всех характеристических ортопроекторов и множество всех симметричных идемпотентных матриц одного и того же ранга тождественны. Множество всех характеристических косопроекторов и множество всех несимметричных идемпотентных матриц одного и того же ранга тождественны. При условии

$\{\det \cos \tilde{\Phi} \neq 0 \leftrightarrow \det \sec \tilde{\Phi} \neq \infty\}$  пары  $\overleftrightarrow{\langle BB', B' \rangle}$  и  $\overleftrightarrow{\langle B, B' \rangle}$  взаимнооднозначно соответствуют друг другу.

Представим ортопроекторы в тригонометрической  $W$ -форме, согласно (307). Используя бинарные соотношения, вычислим модальные матрицы, приводящие ортопроекторы к диагональной форме. Например, для ортопроектора  $\overleftarrow{BB'}$  имеем в  $\tilde{E}_1$ :

$$\overbrace{\begin{pmatrix} \cos \varphi_1/2 & -\sin \varphi_1/2 \\ \sin \varphi_1/2 & \cos \varphi_1/2 \end{pmatrix}}^{\text{Rot } \Phi_B/2} \cdot 1/2 \cdot \overbrace{\begin{pmatrix} 1 + \cos \varphi_1 & -\sin \varphi_1 \\ -\sin \varphi_1 & 1 - \cos \varphi_1 \end{pmatrix}}^{\overleftarrow{BB'}} \cdot \overbrace{\begin{pmatrix} \cos \varphi_1/2 & \sin \varphi_1/2 \\ -\sin \varphi_1/2 & \cos \varphi_1/2 \end{pmatrix}}^{\text{Rot}' \Phi_B/2} = \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}^{D\{\overleftarrow{BB'}\}}.$$

Или в матричной форме:  $V_{\text{col}_I}^{-1} \cdot \overleftarrow{BB'} \cdot V_{\text{col}_I} = D\{\overleftarrow{BB'}\}$ . В исходном ортогональном базисе  $\{R_W\}$  эта же модальная матрица выражается как

$$V_{\text{col}_I} = \text{Rot}(-\Phi_B/2) \cdot R_W = R_W \cdot \{R'_W \cdot \text{Rot}(-\Phi_B/2) \cdot R_W\}, \tag{309}$$

где в фигурных скобках дана ротационная матрица в вышеуказанной  $W$ -форме. В свою очередь, собственным подпространствам  $\langle \text{im } B \rangle$  и  $\langle \text{ker } B \rangle$  соответствуют системы ортогональных собственных вектор-столбцов этой же модальной матрицы:

$$b_{i1} = R_W \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \cos \varphi_1/2 \\ -\sin \varphi_1/2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad d_{i1} = R_W \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \sin \varphi_1/2 \\ \cos \varphi_1/2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Аналогичным образом устанавливается модальная матрица из вектор-столбцов для приведения  $\overleftarrow{B'B}$  к  $D$ -форме ( $V_{\text{col}_{II}}^{-1} \cdot \overleftarrow{B'B} \cdot V_{\text{col}_{II}} = D\{\overleftarrow{B'B}\}$ ), а именно

$$V_{\text{col}_{II}} = \text{Rot } \Phi_B/2 \cdot R_W = R_W \cdot \{R'_W \cdot \text{Rot } \Phi_B/2 \cdot R_W\}. \tag{310}$$

Собственным подпространствам  $\langle \text{im } B' \rangle$  и  $\langle \text{ker } B' \rangle$  соответствуют здесь системы ортогональных собственных вектор-столбцов указанной модальной матрицы:

$$\mathbf{b}_{i_{II}} = R_W \cdot \begin{vmatrix} 0 \\ \cos \varphi_i / 2 \\ \sin \varphi_i / 2 \\ 0 \end{vmatrix}, \quad \mathbf{d}_{i_{II}} = R_W \cdot \begin{vmatrix} 0 \\ -\sin \varphi_i / 2 \\ \cos \varphi_i / 2 \\ 0 \end{vmatrix}.$$

Что же касается тригонометрических модальных матриц для диагонализации косопректоров, то они будут вычислены в гл. 6 с применением сферическо-гиперболической аналогии. Сейчас же пока мы ограничимся формулами с использованием арифметических корней, но модальные матрицы в них теряют *сферическую* тригонометрическую природу:

$$\{R'_W \cdot \sqrt{\text{Def } \Phi_B}\} \cdot \vec{B} \cdot \{\sqrt{\text{Def } (-\Phi_B)} \cdot R_W\} = D\{\vec{B}\}, \quad (311)$$

$$\{R'_W \cdot \sqrt{\text{Def } (-\Phi_B)}\} \cdot \vec{B}' \cdot \{\sqrt{\text{Def } \Phi_B} \cdot R_W\} = D\{\vec{B}'\}. \quad (312)$$

### § 5.12. Элементарные тензорные сферические тригонометрические функции

В евклидовом или в квазиевклидовом пространстве выделим группу централизованных непрерывных движений. Такого рода движения известны как *однородные*. В данном случае они задаются сферическими ротационными матрицами. Как было показано ранее – см. формулы (245), (246), такие движения для точечных элементов, векторов, прямых и гиперплоскостей в декартовом базисе задаются однозначно сферической ротационной матрицей с единственной тригонометрической 2×2-клеткой. Подобного вида тригонометрические матрицы-функции в дальнейшем именуется как *элементарные*. Они обозначаются с малой буквы, например ротационные функции как  $\text{rot } \Phi$ ,  $\text{rot } \Theta$ . В частности, элементарные матрицы могут применяться для описания специальных ротаций в  $\langle Q^{n+1} \rangle$  – с реперной осью  $\langle x_{n+1} \rangle$  (с реперной гиперплоскостью) для отсчёта скалярного значения угла ротации  $\varphi$ . Эти матрицы имеют специальную каноническую структуру в универсальном базисе  $\vec{E}_1$ :

$$\{\text{rot}(\pm \Phi)\}_{3 \times 3}$$

$1 - (1 - \cos \varphi) \cdot \cos^2 \alpha_1$	$-(1 - \cos \varphi) \cdot \cos \alpha_1 \cdot \cos \alpha_2$	$\mp \sin \varphi \cdot \cos \alpha_1$
$-(1 - \cos \varphi) \cdot \cos \alpha_1 \cdot \cos \alpha_2$	$1 - (1 - \cos \varphi) \cdot \cos^2 \alpha_2$	$\mp \sin \varphi \cdot \cos \alpha_2$
$\pm \sin \varphi \cdot \cos \alpha_1$	$\pm \sin \varphi \cdot \cos \alpha_2$	$\cos \varphi$

), (313)

$$\{\text{rot}(\pm \Phi)\}_{(n+1) \times (n+1)}$$

$I_{n \times n} - (1 - \cos \varphi) \cdot \{\mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{e}'_\alpha\}$ $(\mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{e}'_\alpha = \overleftarrow{\mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{e}'_\alpha})$	$\mp \sin \varphi \cdot \mathbf{e}_\alpha$	(314)
$\pm \sin \varphi \cdot \mathbf{e}'_\alpha$	$\cos \varphi$	

Координаты матриц даны, как всегда, в правом декартовом базисе  $\tilde{E}_1$ . Прямая *ориентированная* линия  $\langle x_{n+1} \rangle$  есть реперная (полярная) ось координат, от которой отсчитывается положительный для  $\text{rot } \Phi$  скалярный угол ротации  $\varphi$  с направляющими косинусами  $\cos \alpha_k$  ( $k = \bar{1, n}$ ), выраженными в ортогонально дополнительном к реперной оси декартовом суббазисе с координатами  $x_k$ .

Сначала докажем формулу (313). Применим такое ротационное преобразование дополнительного декартова суббазиса, чтобы новая 1-я ось координат  $\langle x'_1 \rangle$  и вектор направляющих косинусов тензорного угла  $\Phi$ , лежащий в плоскости двумерного суббазиса, а именно

$\mathbf{e}_\alpha = \begin{vmatrix} \cos \alpha_1 \\ \cos \alpha_2 \end{vmatrix}$  (где  $\cos^2 \alpha_1 + \cos^2 \alpha_2 = 1$ ), стали коллинеарны, а в итоге  $\langle x_3 \rangle$ ,  $\mathbf{e}_\alpha$ ,  $\langle x'_1 \rangle$  стали компланарны. Для этой сферической ротации используем другой тензорный угол  $\beta_{12}$ . Отметим, что при  $n = 2$  его скалярный собственный угол  $\beta_{12}$  совпадает с углом  $\alpha_1$ . Поэтому искомое ротационное преобразование в данном случае имеет вид:

$$\text{rot } \beta_{12}$$

$\cos \alpha_1$	$-\sin \alpha_1$	0
$\sin \alpha_1$	$\cos \alpha_1$	0
0	0	1

Далее в новом трёхмерном декартовом базисе  $\tilde{E}$  применяем обычную двумерную каноническую форму для данной *элементарной* ротации, действующей именно в плоскости  $\langle x'_1, x_3 \rangle$ , но с учётом того, что отсчёт угла выполняется от оси  $\langle x_3 \rangle$  по часовой стрелке, а по отношению к оси  $\langle x'_1 \rangle$  – против часовой стрелки:

$$\{\text{rot } \Phi\}_{\text{can}}$$

$\cos \varphi$	0	$-\sin \varphi$
0	1	0
$\sin \varphi$	0	$\cos \varphi$

Затем возвращаемся в исходный трёхмерный базис  $\tilde{E}_1$ , осуществляя обратную ротацию:

$$\{\text{rot } \Phi\}_{3 \times 3} = \text{rot } \beta_{12} \cdot \{\text{rot } \Phi\}_{\text{can}} \cdot \text{rot } \beta_{12}' \quad (315)$$

Нетрудно убедиться, что в итоге после этих операций получаем вышеуказанную формулу (313).

Для вывода общей формулы (314) используем аналогичную схему. Применим такое ротационное преобразование дополнительного декартова суббазиса, чтобы новая 1-я ось координат, вектор направляющих косинусов  $e_\alpha = \{\cos \alpha_k\}$  (где  $\sum_{k=1}^n \cos^2 \alpha_k = 1$ ) и реперная ось  $\langle x_{n+1} \rangle$

стали компланарны. Для этого используем *последовательно* другие тензорные углы сферических координат радиус-вектора угла ротации:  $\beta_{12}$  в плоскости  $\langle x_1, x_2 \rangle$ ;  $\beta_{1'3}$  в плоскости  $\langle x_1', x_3 \rangle$ ; ...,  $\beta_{1' \dots n}$  в плоскости  $\langle x_1' \dots', x_n \rangle$ . Причём из тригонометрических соотношений имеем:

$$\begin{aligned} \cos \beta_{12} &= \cos \alpha_1 / \sqrt{\cos^2 \alpha_1 + \cos^2 \alpha_2}, \\ \cos \beta_{1'3} &= \sqrt{\cos^2 \alpha_1 + \cos^2 \alpha_2} / \sqrt{\cos^2 \alpha_1 + \cos^2 \alpha_2 + \cos^2 \alpha_3}, \\ &\dots\dots\dots \\ \cos \beta_{1' \dots n} &= \sqrt{\cos^2 \alpha_1 + \dots + \cos^2 \alpha_{n-1}} = \sin \alpha_n. \end{aligned} \quad (316)$$

Последовательные ротации осуществляют матрицы  $\text{rot } \beta_{12}, \text{rot } \beta_{1'3}, \dots$ :

rot $\beta_{12}$		
cos $\beta_{12}$	- sin $\beta_{12}$	Z
sin $\beta_{12}$	cos $\beta_{12}$	
Z'		I <sub>n-1</sub>

rot $\beta_{1'3}$			
cos $\beta_{1'3}$	0	- sin $\beta_{1'3}$	Z
0	1	0	
sin $\beta_{1'3}$	0	cos $\beta_{1'3}$	
Z'			I <sub>n-2</sub>

В итоге приходим к базису простейшей 2×2 клеточной формы элементарной ротации:

$$\tilde{E} = \text{rot } \beta \cdot \tilde{E}_1, \quad (317)$$

где  $\text{rot } \beta = \text{rot } \beta_{12} \cdot \text{rot } \beta_{1'3} \cdot \dots \cdot \text{rot } \beta_{1' \dots n}$ . Теперь уже в этом декартовом базисе  $\tilde{E}$  придаём двумерную каноническую форму данной элементарной ротации в плоскости  $\langle x_1' \dots', x_{n+1} \rangle$ :

{rot $\Phi$ } <sub>can</sub>		
cos $\varphi$	<b>0'</b>	- sin $\varphi$
<b>0</b>	I <sub>n-1</sub>	<b>0</b>
sin $\varphi$	<b>0'</b>	cos $\varphi$

Затем возвращаемся в базис  $\tilde{E}_1$ , осуществляя обратную ротацию:

$$\{\text{rot } \Phi\}_{(n+1) \times (n+1)} = \text{rot } \beta \cdot \{\text{rot } \Phi\}_{\text{can}} \cdot \text{rot}' \beta. \quad (318)$$

После этих операций с учётом соотношений (316) получаем формулу (314). Это нетрудно проверить прямым вычислением. Аналогично для отрицательного угла элементарной ротации (как угла в той же тригонометрической плоскости) имеем:

$$\{\text{rot } (-\Phi)\}_{(n+1) \times (n+1)} = \text{rot } \beta \cdot \{\text{rot } (-\Phi)\}_{\text{can}} \cdot \text{rot}' \beta. \quad (319)$$

(Аналогичная элементарная деформационная матрица будет дана в п.6.10.)

Если изучается движение точечного элемента, вектора, прямой или гиперплоскости вне связи с другими элементами, то активные и пассивные модальные преобразования информативно полно задаются с использованием только элементарных ротационных матриц. Переход к другим, элементарно связанным (с исходным) декартовым базисам осуществляется в обоих базисах (317) соответственно как

$$\left. \begin{aligned} \tilde{E}_2 &= \text{rot } \Phi_{12} \cdot \tilde{E}_1, \\ \tilde{E}_{II} &= \{\text{rot } \Phi_{12}\}_{\text{can}} \cdot \tilde{E}_1. \end{aligned} \right\} \quad (320)$$

При этом координаты указанных геометрических объектов преобразуются пассивно, как для тензоров валентности 1:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{u}^{(2)} &= \text{rot } (-\Phi_{12}) \cdot \mathbf{u}^{(1)}, \\ \mathbf{u}^{(II)} &= \{\text{rot } (-\Phi_{12})\}_{\text{can}} \cdot \mathbf{u}^{(I)}. \end{aligned} \right\} \quad (321)$$

$$(\mathbf{u}^{(I)} = \text{rot } (-\beta) \cdot \mathbf{u}^{(1)}, \quad \mathbf{u}^{(II)} = \text{rot } (-\beta) \cdot \mathbf{u}^{(2)}.)$$

Таким образом, в этой главе сформулированы основные положения тензорной тригонометрии в *евклидовой* и в *квазиевклидовой* версиях. Евклидовы (антиевклидовы) тензорная тригонометрия и геометрия могут рассматриваться как частный случай с единичным (отрицательно-единичным) рефлектор-тензором, когда с ним формально допустимо применение любых срединных рефлекторов углов (247) из их полного множества, отвечающего линейному пространству данной размерности. В квазиевклидовой тензорной тригонометрии и геометрии рефлектор-тензор *в общей форме*  $\{\sqrt{T}\}_S$  или *в единичной стандартной форме*  $I^{\otimes}$  задают *независимо*. Рефлектор-тензор порождает группу тригонометрических преобразований, включающую *множество основных ротаций* и *подгруппу ортосферических ротаций*, ортогональных к первым; а также допустимые для него рефлексии! Для евклидовой и квазиевклидовой геометрии квадратичная метрика – евклидова!!!

## Глава 6. Тензорная псевдоевклидова тригонометрия

### § 6.1. Гиперболические тензорные тригонометрические функции и рефлекторы

Модальное преобразование (271) порождает мнимые *псевдогиперболические* углы и функции (272)-(276) из сферических. Угол  $\{-i\Phi\}_c$  имеет гиперболический характер. *Псевдогиперболическая тригонометрия* во внешнем тензорном варианте реализуется из *квазиевклидовой* в  $\langle Q^{n+q} \rangle$  в *комплексном изометричном псевдоевклидовом пространстве*  $\langle P^{n+q} \rangle_c$  со структурой, задаваемой тем же срединным рефлектором угла, а общо – тем же рефлектор-тензором пространства  $\langle Q^{n+q} \rangle$ . Из (271) для  $\langle P^{n+q} \rangle_c$  метрический и рефлектор-тензор есть  $\tilde{E}_{01}' \cdot \tilde{E}_{01} = \{(\sqrt{I^\oplus})\}^2 = I^\oplus$  (при возврате из этой D-формы он имеет вид  $\{\sqrt{I}\}_S$ ). Скалярное произведение в обоих изометричных пространствах – инвариант. Отсюда в  $\langle P^{n+q} \rangle_c$  имеем:

$$(\tilde{E}_{01}' \cdot \mathbf{z}_{01})' \cdot (\tilde{E}_{01}' \cdot \mathbf{z}_{01}) = \mathbf{z}_{01}' \cdot I^\oplus \cdot \mathbf{z}_{01} \equiv \mathbf{x}' \cdot \mathbf{x}, \quad \mathbf{z}_{01} = \sqrt{I^\oplus}^{-1} \cdot \mathbf{x} \quad \text{в } \tilde{E}_{01} = \sqrt{I^\oplus} \cdot \{I\} \quad \text{и } \tilde{E}_1 = \{I\}.$$

В нём далее просто осуществляется переход от сферических понятий к гиперболическим. А именно при таких переходах применяется *абстрактная сферическо-гиперболическая аналогия* обоих углов и здесь:  $-i\Phi \leftrightarrow \Gamma$  (§ 4.2). Она реализуется в 2-х общих схемах, например, для моторных углов:

$$\Phi \rightarrow -i\Phi \rightarrow \Gamma, \quad \varphi_j \rightarrow -i\varphi_j \rightarrow \gamma_j \quad (\mathbf{x} \text{ в } \tilde{E}_1 \rightarrow \mathbf{z}_{01} \text{ в } \tilde{E}_{01} \rightarrow \mathbf{u} \text{ в } \tilde{E}_1). \quad (322)$$

$$\Gamma \rightarrow i\Gamma \rightarrow \Phi, \quad \gamma_j \rightarrow i\gamma_j \rightarrow \varphi_j \quad (\mathbf{u} \text{ в } \tilde{E}_1 \rightarrow \mathbf{z}_{02} \text{ в } \tilde{E}_{02} \rightarrow \mathbf{x} \text{ в } \tilde{E}_1). \quad (323)$$

В сферическо-гиперболической аналогии абстрактного типа углы-аналоги при такой замене имеют абстрактный смысл (при сохранении бинарной структуры и метрического тензора). Она осуществляется в исходном единичном базисе, но далее углы используются истинными. Применив в конце процесса (322) к (294)–(297) и (277)–(286) абстрактную аналогию, получаем гиперболические аналоги в *вещественном псевдоевклидовом пространстве*  $\langle P^{n+q} \rangle$  с тождественными метрическим и рефлектор-тензором  $I^\oplus$  с углами и функциями в W-форме в тригонометрическом базисе диагонального косинуса  $\tilde{E}_1 = \{I\}$ , или *с их возвратом* из W-формы, но с метрическим рефлектор-тензором  $\{\sqrt{I}\}_S$ . Имеем:

$$R_w \cdot \begin{array}{|c|c|} \hline \text{ch } \gamma_j & \text{sh } \gamma_j \\ \hline \text{sh } \gamma_j & \text{ch } \gamma_j \\ \hline \end{array} \cdot R'_w = \text{ch } \Gamma + \text{sh } \Gamma = \text{Roth } \Gamma = \text{Roth}' \Gamma = \exp \Gamma, \quad (324)$$

$$\text{ch } \Gamma - \text{sh } \Gamma = \text{Roth}^{-1} \Gamma = \text{Roth}(-\Gamma) = \exp(-\Gamma). \quad (325)$$

Это гиперболическая ротационная матрица-функция моторного угла  $\Gamma$  или  $(-\Gamma)$ .

$$R_w \cdot \begin{array}{|c|c|} \hline \text{sech } \gamma_j & -\text{th } \gamma_j \\ \hline \text{th } \gamma_j & \text{sech } \gamma_j \\ \hline \end{array} \cdot R'_w = \text{sech } \Gamma + i \cdot \text{th } \Gamma = \text{Defh } \Gamma, \quad (326)$$

$$\text{sech } \Gamma - i \cdot \text{th } \Gamma = \text{Defh}^{-1} \Gamma = \text{Defh}(-\Gamma) = \text{Defh}' \Gamma. \quad (327)$$

Это гиперболическая деформационная матрица-функция моторного угла  $\Gamma$  или  $(-\Gamma)$ .

$$R_w \cdot \begin{array}{|c|c|} \hline +\text{ch } \gamma_j & \pm \text{sh } \gamma_j \\ \hline \mp \text{sh } \gamma_j & -\text{ch } \gamma_j \\ \hline \end{array} \cdot R'_w = \text{ch } \tilde{\Gamma} \mp i \cdot \text{sh } \tilde{\Gamma}. \quad (328)$$

Это гиперболически ортогональный рефлектор с проективным углом  $\tilde{\Gamma}$  или  $(-\tilde{\Gamma})$ .

$$R_w \cdot \begin{array}{|c|c|} \hline +\text{sech } \gamma_j & \mp \text{th } \gamma_j \\ \hline \mp \text{th } \gamma_j & -\text{sech } \gamma_j \\ \hline \end{array} \cdot R'_w = \text{sech } \tilde{\Gamma} \mp \text{th } \tilde{\Gamma}. \quad (329)$$

Это гиперболически косоугольный рефлектор с проективным углом  $\tilde{\Gamma}$  или  $(-\tilde{\Gamma})$ .

В псевдоевклидовой тригонометрии срединный рефлектор угла (247) с максимальным тригонометрическим рангом среди углов (при условии, что все тензорные углы с ним согласованы) задаёт рефлектор-тензор *не соосно ориентированного псевдоевклидова пространства*  $\langle P^{n+q} \rangle$  также, как независимый рефлектор-тензор. Причём преобразование  $R_w$  тригонометрически не согласовано с единичным тензором!

$$\text{Ref} \{ \text{ch } \tilde{\Gamma} \}^{\ominus} = \{ \sqrt{I} \}_S = R_w \cdot I^{\oplus} \cdot R'_w, \quad (\tau = \tau_{\max} = q) \quad (330)$$

по аналогии с (247). Применяя принцип бинарности с учётом (271) и (324), получаем аннигилирующие соотношения – аналогичные (251) для ортосферической и гиперболической матрицы:

$$\text{Rot } \Theta \cdot \{ \sqrt{I} \}_S \cdot \text{Rot}' \Theta = \{ \sqrt{I} \}_S = \text{Rot}' \Theta \cdot \{ \sqrt{I} \}_S \cdot \text{Rot } \Theta,$$

$$\text{Roth } \Gamma \cdot \{ \sqrt{I} \}_S \cdot \text{Roth } \Gamma = \{ \sqrt{I} \}_S.$$

Далее модальное преобразование, *обратное* (271), производит в (323) сначала *мнимые псевдосферические* углы и функции из *гиперболических*. Тензорный угол  $\{+i\Gamma\}$  имеет сферический характер. Псевдосферическая тригонометрия в тензорном варианте реализуется в особом *комплексном квазиевклидовом пространстве*  $\langle Q^{n+q} \rangle_c$  с той же бинарной структурой. и с тем же *единичным* (в этом случае) метрическим тензором. Скалярное произведение в изометричных пространствах  $\langle P^{n+q} \rangle$  и  $\langle Q^{n+q} \rangle_c$  – инвариант:

$$\mathbf{z}_{02} \cdot \mathbf{I} \cdot \mathbf{z}_{02} = (\tilde{E}_{01} \cdot \mathbf{u})' \cdot (\tilde{E}_{01} \cdot \mathbf{u}) \equiv \mathbf{u}' \cdot \mathbf{I} \cdot \mathbf{u}, \quad \mathbf{z}_2 = \tilde{E}_{01} \cdot \mathbf{u} \text{ в } \tilde{E}_{02} = \sqrt{\Gamma^{\oplus}}^{-1} \cdot \{\Gamma\} \text{ и } \tilde{E}_1 = \{\Gamma\}.$$

Пространство  $\langle Q^{n+q} \rangle_c$  применимо как изометричный комплексный квазиевклидовизоморфизм вещественному псевдоевклидову пространству. (Впервые оно было введено Пуанкаре в 1905г. как двумерное метрическое пространство с группой преобразований Лоренца!) Применив далее к псевдосферическим понятиям абстрактную аналогию  $+i\Gamma \leftrightarrow \Phi$ , но в схеме (323), получаем в конце исходные сферические аналоги в вещественном *квазиевклидовом* пространстве  $\langle Q^{n+q} \rangle$ . Это приводится только для завершения в целом картины абстрактной аналогии, так как в итоге круг преобразований (322)–(323) замкнулся на исходном угле  $\Phi$ !

По аналогии со сферическими формулами (269) и (270) получаем связи проективных и моторных гиперболических углов и их функций через срединный рефлектор *в одном общем базисе*. Например:

$$-i\tilde{\Gamma}_{12} \cdot \text{Ref}\{\text{ch } \tilde{\Gamma}_{12}\} \ni \Gamma_{12} = + \text{Ref}\{\text{ch } \tilde{\Gamma}_{12}\} \ni i\tilde{\Gamma}_{12}, \quad (\Gamma_{12})^2 = (\tilde{\Gamma}_{12})^2.$$

Для описания сферических и гиперболических преобразований на какой-либо собственной плоскости/псевдоплоскости (по клеточно) далее используется общая тригонометрическая диаграмма (рис. 3). Тут изначально нет какой-либо связи между вещественными сферическими и гиперболическими углами, что характерно именно для *абстрактной* аналогии. Для того чтобы *в исходном декартовом базисе*  $\tilde{E}_1$  установить отношение изоморфизма между сферическими и гиперболическими тригонометрическими углами и функциями, нужно задать какую-либо однозначную взаимосвязь углов в исходном базисе как *универсальном*.

## § 6.2. Сферическо-гиперболическая аналогия конкретного типа

Обратим внимание на то, что множества значений сферических и гиперболических синусов и тангенсов углов в  $\tilde{E}_1$  тождественны:

$$\sin \varphi \equiv \text{th } \gamma, \quad \text{tg } \varphi \equiv \text{sh } \gamma. \quad (331)$$



Отсюда между углами-аргументами устанавливается взаимосвязь:

$$\gamma = \gamma(\varphi) = \operatorname{arth}(\sin \varphi) = \operatorname{arsh}(\operatorname{tg} \varphi) = \ln(\sec \varphi + \operatorname{tg} \varphi),$$

$$\varphi = \varphi(\gamma) = \operatorname{arctg}(\operatorname{sh} \gamma) = \operatorname{arcsin}(\operatorname{th} \gamma) = \ln(\operatorname{sech} \gamma + i \cdot \operatorname{th} \gamma) \cdot (-i).$$

Весьма полезны их дифференциалы  $\operatorname{sech} \gamma d\gamma = d\varphi(\gamma)$ ,  $\sec \varphi d\varphi = d\gamma(\varphi)$ ;  $d\gamma(\varphi)/d\varphi = \sec \varphi \equiv [d\varphi(\gamma)/d\gamma]^{-1} = \operatorname{sech}^{-1} \gamma = \operatorname{ch} \gamma$ ,  $\operatorname{sech} \gamma \equiv \cos \varphi$  и так далее!

Согласно тригонометрической диаграмме (рис. 3), главные значения сферических углов  $\varphi$ , как ранее (гл. 5), берутся в интервале  $-\pi/2 \div +\pi/2$ . Значения сферического косинуса и секанса для них неотрицательны. Поэтому тождества (331) можно дополнить ещё двумя аналогами:

$$\cos \varphi \equiv \operatorname{sech} \gamma \geq 0, \quad \sec \varphi \equiv \operatorname{ch} \gamma \geq 0. \quad (332)$$

При тригонометрических преобразованиях линеоров, планаров и двухвалентных тензоров вполне достаточно использовать вышеуказанный интервал для собственных сферических углов. На тождествах (331) базируется *сферическо-гиперболическая аналогия конкретного типа*. Она же есть *синус-тангенсная аналогия*. В её тензорном варианте, или с тождествами по бинарным клеткам, аналогия представляется в  $\tilde{E}_1$  как:

$$\left. \begin{aligned} \sin \Phi &\equiv \operatorname{th} \Gamma, & \operatorname{tg} \Phi &\equiv \operatorname{sh} \Gamma, \\ \cos \Phi &\equiv \operatorname{sech} \Gamma, & \sec \Phi &\equiv \operatorname{ch} \Gamma \end{aligned} \right\} \quad (333)$$

$$(\varphi_i = -\pi/2 \div +\pi/2, \quad \gamma_i = -\infty \div +\infty).$$

Далее в исходном единичном базисе  $\tilde{E}_1$  она распространяется на все типы тригонометрических матриц-функций:

$$\operatorname{Def} \Phi \equiv \operatorname{Roth} \Gamma, \quad (334)$$

$$\operatorname{Rot} \Phi \equiv \operatorname{Defh} \Gamma. \quad (335)$$

Отсюда следует функциональная связь обоих углов моторного типа:

$$\Gamma = \Gamma(\Phi) = \ln \operatorname{Def} \Phi, \quad i\Phi = i\Phi(\Gamma) = \ln \operatorname{Defh} \Gamma. \quad (336)$$

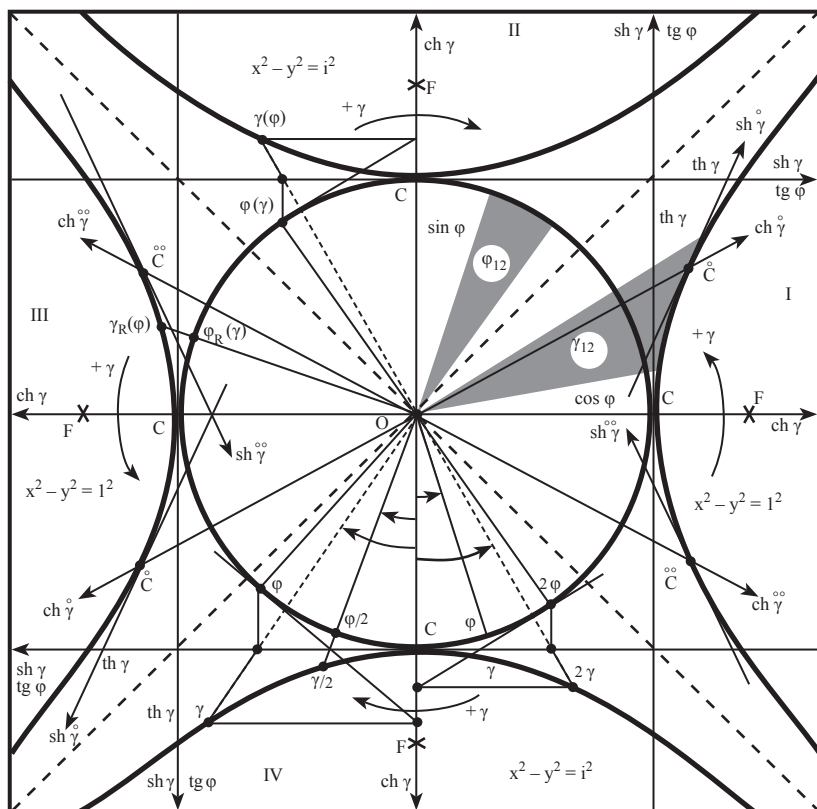
Рефлекторы (328), (329) – гиперболические аналоги (178), (179) и (211), (212), приняв, что срединный рефлектор угла  $\tilde{\Gamma}_B$  есть рефлектор-тензор:

$$\operatorname{Ref} \{BB'\} = \operatorname{sech} \tilde{\Gamma}_B - \operatorname{th} \tilde{\Gamma}_B, \quad (337)$$

$$\operatorname{Ref} \{B'B\} = \operatorname{sech} \tilde{\Gamma}_B + \operatorname{th} \tilde{\Gamma}_B, \quad (338)$$

$$\operatorname{Ref} \{B\} = \operatorname{ch} \tilde{\Gamma}_B - i \operatorname{sh} \tilde{\Gamma}_B, \quad (339)$$

$$\operatorname{Ref} \{B'\} = \operatorname{ch} \tilde{\Gamma}_B + i \operatorname{sh} \tilde{\Gamma}_B. \quad (340)$$



**Рис. 3.** Тригонометрическая диаграмма на плоскости/псевдоплоскости в правом универсальном базисе и сферическо-гиперболические аналогии:  $\varphi$  – сферический угол,  $\gamma$  – гиперболический угол; F – фокус гипербол. I, II, III и IV суть 1-й, 2-й, 3-й и 4-й гиперболические квадранты для отображения скалярных гиперболических углов на псевдоплоскости;  $\overset{\circ}{\gamma}$  и  $\overset{\circ\circ}{\gamma}$  – положительный и отрицательный углы гиперболической ротации в универсальном базисе, определяемые парой вещественных гипербол, как примеры в 1-м и 3-м квадрантах;  $\varphi(\gamma)$  и  $\gamma(\varphi)$  – примеры сферическо-гиперболической аналогии синус-тангенсного типа (во 2-м квадранте); в частности,  $\gamma(\pi/4) = \gamma_F = \omega \approx 0,881$ .  $\varphi_R(\gamma)$  и  $\gamma_R(\varphi)$  – примеры сферическо-гиперболической аналогии тангенс-тангенсного типа в 3-м квадранте; в 4-м квадранте даны примеры бисекции (слева) и удвоения (справа) гиперболического угла в универсальном базисе с использованием выше-указанных аналогий.

Применяя введённую выше сферическо-гиперболическую аналогию обоих типов (абстрактную и конкретную), моторные матрицы-функции преобразуются друг в друга по нижеуказанному *квартовому кругу*:

$$\text{Rot}(i\Gamma) \equiv \text{Defh}(-i\Phi) \leftrightarrow \text{Roth}\Gamma \equiv \text{Def}\Phi$$

$$\begin{array}{ccc} \uparrow & & \downarrow \\ \text{Rot}\Phi \equiv \text{Defh}\Gamma & \leftrightarrow & \text{Roth}(-i\Phi) \equiv \text{Def}(i\Gamma). \end{array} \quad (341)$$

Для тригонометрически согласованных гиперболических ротационных матриц и ортогональных рефлекторов действуют Правила №2 и №3 (§ 5.6). Правило 3 в гиперболическом варианте есть **Правило № 5**. Правила № 3 и № 5 являются *первоосновой для основных ротаций!*

Для скалярных тригонометрических функций все правила действуют автоматически, так как для них  $n = 2$ . В частности, имеем:

$$\prod_{i=1}^m (\sec \varphi_i \pm \text{tg} \varphi_i)^{h_i} \equiv \prod_{i=1}^m (\text{ch} \gamma_i \pm \text{sh} \gamma_i)^{h_i} = \exp\left(\sum_{i=1}^m \pm h_i \gamma_i\right) = \exp \gamma =$$

$$= \text{ch} \gamma + \text{sh} \gamma \equiv \sec \varphi + \text{tg} \varphi \quad (-\pi/2 \leq \varphi \leq +\pi/2).$$

Синус-тангенсная аналогия позволяет придать *гиперболически ортогональную форму* ранее рассмотренным собственным *аффинным* проекторам, квазиобратной матрице и рефлекторам, получая формулы-аналоги, исходно сферических прототипов в гиперболическом варианте (принимая, что срединный рефлектор угла  $\tilde{\Gamma}_B$  есть рефлектор-тензор):

$$\text{Ref}\{B'\} \cdot \text{Ref}\{B\} = (\text{ch} \tilde{\Gamma}_B + \text{sh} \tilde{\Gamma}_B) \cdot (\text{ch} \tilde{\Gamma}_B - \text{sh} \tilde{\Gamma}_B) = \text{Roth} 2\Gamma_B. \quad (342)$$

То есть двукратная рефлексия типа  $\{(\sqrt{I})'_h \cdot (\sqrt{I})_h\}$ , где  $(\sqrt{I})_h \neq (\sqrt{I})'_h$  – простой несимметричный корень, есть гиперболическая ротация по аналогии с (245):

$$\text{Roth}(\pm \Gamma_B) = [(\text{ch} \tilde{\Gamma}_B \pm i \cdot \text{sh} \tilde{\Gamma}_B) \cdot (\text{ch} \tilde{\Gamma}_B \mp i \cdot \text{sh} \tilde{\Gamma}_B)]^{1/2}. \quad (343)$$

Из матрицы в квадратных скобках извлекается арифметический корень и он же в данном случае гиперболический *тригонометрический* корень, аналогичный сферическому. В общем случаея 2-х неориентированных векторов или планаров ранга 1 при условии  $\mathbf{a}'_1 \cdot \mathbf{a}'_2 \neq 0$  однозначно вычисляется собственная *элементарная* ротационная матрица ( $\tau = 1$ ):

$$\text{Roth} \Gamma_{12} = [(I - 2 \cdot \overleftarrow{\mathbf{a}}_2 \mathbf{a}'_1) \cdot (I - 2 \cdot \overleftarrow{\mathbf{a}}_1 \mathbf{a}'_2)]^{1/2} = \quad (344)$$

$$= \left[ I - 2 \cdot \left( \frac{\mathbf{a}_1 \mathbf{a}'_2}{\mathbf{a}'_2 \mathbf{a}_1} + \frac{\mathbf{a}_2 \mathbf{a}'_1}{\mathbf{a}'_1 \mathbf{a}_2} \right) + 4 \text{ch}^2 \gamma_{12} \cdot \frac{\mathbf{a}_2 \mathbf{a}'_2}{\mathbf{a}'_2 \mathbf{a}_2} \right]^{1/2},$$

где  $\overleftarrow{\mathbf{a}}_2 \mathbf{a}'_1 = \frac{\mathbf{a}_2 \mathbf{a}'_1}{\mathbf{a}'_1 \mathbf{a}_2}$ ,  $\overleftarrow{\mathbf{a}}_1 \mathbf{a}'_2 = \frac{\mathbf{a}_1 \mathbf{a}'_2}{\mathbf{a}'_2 \mathbf{a}_1}$ ;  $(\mathbf{a}_1 = \mathbf{e}_1, \mathbf{a}_2 = \mathbf{e}_2 \rightarrow \mathbf{e}_2' \cdot \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_1' \cdot \mathbf{e}_2 = \cos \varepsilon_{12})$

$\{\overleftarrow{\mathbf{a}} \cdot \mathbf{b}' = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}'}{\mathbf{a}' \cdot \mathbf{b}}\}$  – проецирует на  $\langle \text{im} \mathbf{a} \rangle$  параллельно  $\langle \ker \mathbf{b}' \rangle \equiv \langle \text{im} \mathbf{b} \rangle^\perp$ ,

$\{I - \overleftarrow{\mathbf{a}} \cdot \mathbf{b}'\}$  – проецирует на  $\langle \ker \mathbf{b}' \rangle$  параллельно  $\langle \text{im} \mathbf{a} \rangle \equiv \langle \ker \mathbf{a}' \rangle^\perp$ .

С использованием формулы взаимосвязи углов (336) вычисляется количественно тензорный *сферический* угол  $\alpha_B$  в соотношении (288):

$$\left. \begin{aligned} \text{Def } \Phi_B &\equiv \text{Roth } \Gamma_B, \\ \text{Def } \alpha_B &\equiv \text{Roth } 2\Gamma_B, \end{aligned} \right\} \rightarrow \alpha_B = -i \cdot \ln \{ \text{Defh } [2 \ln (\text{Def } \Phi_B)] \}.$$

Согласно синус-тангенсной аналогии, срединный рефлектор тензорного угла выражается в 4-х тождественных вариантах:

$$\text{Ref } \{ \cos \tilde{\Phi} \}^{\ominus} = \text{Ref } \{ \sec \tilde{\Phi} \}^{\ominus} \equiv \text{Ref } \{ \text{ch } \tilde{\Gamma} \}^{\ominus} = \text{Ref } \{ \text{sch } \tilde{\Gamma} \}^{\ominus}. \quad (345)$$

Умножая матрицы в квартовом круге (341) справа на срединный рефлектор, переходим к квартовому кругу для рефлекторов. Повторив эту операцию, возвращаемся к исходному моторному варианту. Также нетрудно получить формулы-аналоги (336) для взаимосвязи между проективными углами. Изначально проективные гиперболические углы и функции можно определить проще по формулам проективной евклидовой тригонометрии, но с использованием синус-тангенсной аналогии. Применяя её же к модальным преобразованиям (303), (304), получаем соотношения, родственные (252), (304):

$$\text{Ref}\{B'\} = \text{Roth } \Gamma_B \cdot \text{Ref}\{B\} \cdot \text{Roth } (-\Gamma_B) = \text{Ref}\{\text{ch } \tilde{\Gamma}_B\}^{\ominus} \cdot \text{Ref}\{B\} \cdot \text{Ref}\{\text{ch } \tilde{\Gamma}_B\}^{\ominus}, \quad (346)$$

$$\stackrel{\cong}{B'} = \text{Roth } \Gamma_B \cdot \stackrel{\cong}{B} \cdot \text{Roth } (-\Gamma_B) = \text{Ref } \{ \text{ch } \tilde{\Gamma}_B \}^{\ominus} \cdot \stackrel{\cong}{B} \cdot \text{Ref } \{ \text{ch } \tilde{\Gamma}_B \}^{\ominus}. \quad (347)$$

На множестве ротационных модальных матриц  $\langle \Gamma_B \rangle$ , выполняющих операции типа (346), (347), матрица  $\text{Roth } \Gamma_B$ , получаемая однозначно из (343), имеет тригонометрическое подпространство *минимальной* размерности. Теперь есть возможность вычислить ротационный вариант модальной матрицы для приведения собственных аффинных проекторов к диагональной форме, то есть развивая дальше (311), (312):

$$R_w' \cdot \text{Roth } \Gamma_B / 2 \cdot \stackrel{\cong}{B} \cdot \text{Roth } (-\Gamma_B / 2) \cdot R_w = D \{ \tilde{B} \}, \quad (348)$$

$$R_w' \cdot \text{Roth } (-\Gamma_B / 2) \cdot \stackrel{\cong}{B'} \cdot \text{Roth } \Gamma_B / 2 \cdot R_w = D \{ \tilde{B}' \}.$$

Точно также, как в тензорной евклидовой тригонометрии (см. в § 5.6 формулы (249), (251)), здесь соотношения (346), (347) имеют место для общих ротационных матриц из множества  $\langle \Gamma_B \rangle \equiv \langle \text{Roth } \Gamma_B \cdot \text{Rot } \Theta_B \rangle$  с учётом транспонирования. Причём  $\Gamma_B$  есть гиперболический угол *основной* ортогональной ротации,  $\Theta_B$  – сферический угол ортогональной ротации (по отношению к  $\Gamma_B$ ) или *ортосферический* угол. Именно для этих тензорных углов выполняются фундаментальные соотношения:

$$\left\{ \begin{aligned} \text{Roth } \Gamma_B \cdot \text{Ref}\{\text{ch } \tilde{\Gamma}_B\}^{\ominus} \cdot \text{Roth } \Gamma_B &= \text{Ref}\{\text{ch } \tilde{\Gamma}_B\}^{\ominus} = \text{Roth}(-\Gamma_B) \cdot \text{Ref}\{\text{ch } \tilde{\Gamma}_B\}^{\ominus} \cdot \text{Roth}(-\Gamma_B), \\ \text{Rot}' \Theta_B \cdot \text{Ref}\{\text{ch } \tilde{\Gamma}_B\}^{\ominus} \cdot \text{Rot } \Theta_B &= \text{Ref}\{\text{ch } \tilde{\Gamma}_B\}^{\ominus} = \text{Rot } \Theta_B \cdot \text{Ref}\{\text{ch } \tilde{\Gamma}_B\}^{\ominus} \cdot \text{Rot}' \Theta_B. \end{aligned} \right. \quad (349)$$

Соотношения (349) лежат в основе как ротационной псевдоевклидовой геометрии и тригонометрии в ней с указанным срединным рефлектором (345) в качестве вводимого независимо рефлектор-тензора, так и внешней гиперболической геометрии. Последняя по существу есть неевклидова геометрия постоянной отрицательной кривизны (радиуса). Эта геометрия реализуется на специальных гиперboloидах, вложенных в псевдоевклидово пространство, задаваемое рефлектор-тензором и псевдоевклидовой метрикой.

### § 6.3. Фундаментальный рефлектор-тензор в квазиевклидовой и псевдоевклидовой интерпретации

Применению гиперболических и сферических матриц в тензорной тригонометрии и в теории собственных проекторов нужно дать надлежащее обоснование, имея ввиду используемые базовые метрические пространства и допустимые в них преобразования базисов. Выберем в  $n$ -мерном арифметическом (аффинном) пространстве координатный базис с единичной матрицей вектор-столбцов  $\tilde{E}_1 = \{I\}$ . Далее вводим в этом пространстве совершенно независимым образом рефлектор-тензор  $\{\sqrt{I}\}_S$ , который придаёт ему в общем случае не соосную ориентацию. Во-первых, в этом пространстве как исходно аффинном допускается операция трансляции, в том числе базиса. Во-вторых, определим в  $\tilde{E}_1$  ротационные преобразования 3-х типов:

$$\langle \text{Rot } \Phi \rangle: \text{Rot } \Phi \cdot \{\sqrt{I}\}_S \cdot \text{Rot } \Phi = \{\sqrt{I}\}_S = \text{Rot}(-\Phi) \cdot \{\sqrt{I}\}_S \cdot \text{Rot}(-\Phi)$$

– основные сферические ротации,

$$\langle \text{Roth } \Gamma \rangle: \text{Roth } \Gamma \cdot \{\sqrt{I}\}_S \cdot \text{Roth } \Gamma = \{\sqrt{I}\}_S = \text{Roth}(-\Gamma) \cdot \{\sqrt{I}\}_S \cdot \text{Roth}(-\Gamma)$$

– основные гиперболические ротации,

$$\langle \text{Rot } \Theta \rangle: \text{Rot}' \Theta \cdot \{\sqrt{I}\}_S \cdot \text{Rot } \Theta = \{\sqrt{I}\}_S = \text{Rot } \Theta \cdot \{\sqrt{I}\}_S \cdot \text{Rot}' \Theta$$

– побочные ортогональные сферические ротации (относительно обеих предыдущих ротаций).

Общее квазиевклидово пространство  $\langle Q^{n+q} \rangle$  (ориентированное) определяется евклидовой квадратичной метрикой и своим рефлектор-тензором  $\{\sqrt{I}\}_S$ , задающим допустимые преобразования базиса:  
 $\tilde{E} = \text{Rot } \Phi \cdot \text{Rot } \Theta \cdot \tilde{E}_1. \quad (350)$

Это суть ротационно связанные квазидекارتовы базисы. Именно в таком пространстве воплощается квазиевклидова тригонометрия в квазидекартых базисах. Преобразования образуют свою группу.

Общее псевдоевклидово пространство  $\langle P^{n+q} \rangle$  (ориентированное) определяется псевдоевклидовой квадратичной метрикой и своим рефлктор-тензором  $\{\sqrt{\Gamma}\}_S$ , задающим допустимые преобразования, в том числе базиса, вида:

$$\tilde{E} = \text{Roth } \Gamma \cdot \text{Rot } \Theta \cdot \tilde{E}_1. \quad (351)$$

Это суть *ротационно связанные псевдодекартовы базисы*. Именно в таком пространстве воплощается псевдоевклидова тригонометрия в псевдодекартовых базисах. Преобразования образуют *группу Лоренца*.

Кроме того, определим **универсальные базисы** (правые):

$$\langle \tilde{E}_{1u} \rangle \equiv \langle \text{Rot } \Theta \cdot \tilde{E}_1 \rangle \equiv \langle \text{Rot } \Theta \rangle \leftrightarrow \begin{cases} \tilde{E}'_{1u} \cdot \tilde{E}_{1u} = I, \\ \tilde{E}'_{1u} \cdot \{\sqrt{\Gamma}\}_S \cdot \tilde{E}_{1u} = \{\sqrt{\Gamma}\}_S. \end{cases} \quad (\det \tilde{E}_{1u} = +1) \quad (352)$$

Сюда входит исходный единичный базис  $\tilde{E}_1 = \{\Gamma\}$ , то есть простейший по форме. Универсальные базисы принадлежат пересечению множеств ротационно связанных базисов обоих выше-указанных типов. Благодаря этому в них реализуется совместно квазиевклидова и псевдоевклидова тригонометрия, а, следовательно, и сферическо-гиперболическая аналогия конкретного типа. (Например, в СТО в универсальных базисах описывается движение с точки зрения относительно неподвижного наблюдателя.) Эти преобразования образуют *подгруппу пересечени 2-х указанных групп*. Далее выясним влияние рефлктор-тензора на матричные отношения.

Пусть  $B$  – нуль-простая матрица, исходно применяемая в аффинном пространстве  $\langle \mathcal{A}^n \rangle$ . Введём рефлктор-тензор в 2-х вариантах с переходом в общие (несоосные) квази- и псевдоевклидовы пространства:

$$\{\sqrt{\Gamma}\}_S = \text{Ref } \{\cos \tilde{\Phi}_B\} \overset{\ominus}{\leftarrow} \text{Ref } \{\text{ch } \tilde{\Gamma}_B\} \overset{\ominus}{\leftarrow}. \quad (353)$$

В еклидовом пространстве симметричные проекторы  $\overleftarrow{B}B'$  и  $\overrightarrow{B}B'$  ортогональны друг другу (§ 2.1). В квазиевклидовом пространстве со сферическим тензором (353) они также ортогональны, так как он не влияет ни на внутренние, ни на внешние произведения матричных объектов.

Несимметричные проекторы  $\overleftarrow{B}$  и  $\overrightarrow{B}$  в псевдоевклидовом пространстве с гиперболическим тензором (353) стали гиперболически ортогональны друг другу. Это следует из соотношений (347):

$$(\overleftarrow{B})' \cdot \text{Ref } \{\text{ch } \tilde{\Gamma}_B\} \overset{\ominus}{\leftarrow} \overrightarrow{B} = \text{Ref } \{\text{ch } \tilde{\Gamma}_B\} \overset{\ominus}{\leftarrow} \overleftarrow{B} \cdot \overrightarrow{B} = Z.$$

Соответственно  $B^-$  (§ 2.1) есть *гиперболически ортогональная квазиобратная матрица*. Подпространства  $\langle \text{im } B \rangle$  и  $\langle \text{ker } B \rangle$  образуют при вводе (345) псевдоевклидово ортогональную прямую сумму тогда, когда  $B$  нуль-простая. Для проекторов  $\overleftarrow{B}$  и  $\overrightarrow{B}$  собственные векторы

или подпространства, относящиеся к различным собственным значениям («+1» и «0»), гиперболически ортогональны. Эквиванговые проекторы  $\overleftarrow{B}$  и  $\overleftarrow{B}'$  ( $B$  и  $B'$ ) и связанные с ними планары преобразуются друг в друга гиперболической ротацией (347) как гиперболически ортогональные тензоры и тензорные объекты валентности 2. Проектор  $\overleftarrow{B}$  проецирует гиперболически ортогонально на  $\langle \text{im } B \rangle$ , а проектор  $\overrightarrow{B}$  проецирует гиперболически ортогонально на  $\langle \text{ker } B \rangle$ . Сферически и гиперболически ортогональные собственные проекторы принадлежат своим подмножествам множества идемпотентных матриц. Здесь  $\overleftrightarrow{BB'}$  – симметричные, а  $\langle B \rangle$  – несимметричные идемпотентные матрицы. Соответствующую гиперболическую трансформацию претерпевают проективные формулы (186) – (197). В символическом октаэдре (рис. 1), проведя диагональ RS, с учётом (347) имеем два псевдоравнобедренных тензорных треугольника RZS и RIS с равными гиперболическими углами  $\angle RZS \equiv \angle RIS \equiv \Gamma_B$ . Вот что вносит в ввод рефлектор-тензора (353)!

Для гиперболически ортогональной ротационной матрицы имеют место аналоги формул Муавра и Эйлера:

$$\text{Roth}^m \Gamma = \text{ch} \{m\Gamma\} + \text{sh} \{m\Gamma\} = \exp \{m\Gamma\} = \text{Roth} \{m\Gamma\}.$$

Её свойства, безотносительно к углу ротации, те же, что у деформационной сферической матрицы. Она симметрична и положительно определена:  $\mu_{2j} = \text{ch } \gamma_j + \text{sh } \gamma_j > 0$ ,  $\mu_{2j+1} = \mu_{2j}^{-1} = \text{ch } \gamma_j - \text{sh } \gamma_j > 0$  и, возможно,  $\mu_k = +1$ . Любое положительное число и мультипликативно обратное ему взаимно-однозначно представляются через скалярный гиперболический угол, в том числе в форме  $2 \times 2$ -матрицы (см. § 5.10).

Исключительно важным применением сферическо-гиперболической аналогии конкретного типа (331) – см. подробнее об этом в Приложении (гл. 1А) – является констатация её как математического фундамента для корректного и наглядного ввода понятия “*угол параллельности* P(a)” с целью последующего построения неевклидовых геометрий. В начале он не имеет конкретной природы – сферической или гиперболической, то есть в процессе аксиоматического построения абсолютной геометрии (независимо от 5-го постулата Евклида). При переходе к конкретной неевклидовой геометрии (сферической, гиперболической) он принимает конкретную форму, что отвечает двум крайним вариантам угла Саккери.

В псевдоевклидовой и кваевклидовой геометриях применяются тригонометрические матрицы только *монобинарной* структуры. В случае не соосно ориентированного пространства с рефлектор-тензором  $\{\sqrt{I}\}_S$  его всегда можно *формально* представить в виде  $R_W' \cdot \{\sqrt{I}\}_S \cdot R_W = I^{\oplus}$ , где появляется другой – *единичный тензор* в своей *диагональной W-форме*.

Матрица  $R_W$  выходит из множества матриц, согласованных с исходным рефлектор-тензором, что его и изменяет. Тогда, например, Roth  $\Gamma$  приводится совместно с новым рефлектор-тензором пространства к их  $W$ -формам (см. § 5.5) естественным путём:

$$R_W \cdot (R_W' \cdot \text{Roth } \Gamma \cdot R_W) \cdot R_W' \cdot [R_W \cdot \{\sqrt{I}\}_S \cdot R_W] \cdot R_W' =$$

$$= R_W \cdot \begin{array}{|c|c|} \hline \text{ch } \gamma_j & \text{sh } \gamma_j \\ \hline \text{sh } \gamma_j & \text{ch } \gamma_j \\ \hline \end{array} \cdot R_W' \cdot R_W \cdot \begin{array}{|c|c|} \hline +1 & 0 \\ \hline 0 & -1 \\ \hline \end{array} \cdot R_W'.$$

На рис. 3 видно, что для углов-аналогов  $\varphi = \varphi(\gamma)$  и  $\gamma = \gamma(\varphi)$  оси ординаты и абсциссы суть оси  $v$  и  $u$  диагональных косинуса и рефлектор-тензора!

### § 6.4. Скалярная тригонометрия на псевдоплоскости

Диагональный рефлектор-тензор  $\{I^{\oplus}\}$  отвечает соосно ориентированному пространству, его бинарная структура и тензор согласованы с координатными осями в допустимых базисах  $\tilde{E}$ . В базисе  $\tilde{E}_1$  гиперболическая ротационная матрица Roth  $\Gamma$  имеет каноническую  $W$ -форму (324). В  $j$ -й  $2 \times 2$ -клетке главная и побочная *изотропные* диагонали базиса  $\tilde{E}_1$  есть 2 асимптоты *характеристической квадрогоиперболы* (рис.3) на  $j$ -й псевдоплоскости, абсцисса и ордината задают 2 оси диагональной формы  $\text{ch } \Gamma$  и тензора  $\{I^{\oplus}\}$ :  $u$  и  $v$ . Ввиду согласованности рефлектор-тензора с ротационными матрицами эти две асимптоты квадрогоипербол во всех  $\tilde{E}$  инвариантны при допустимых гиперболических ротационных преобразованиях, отвечающих  $j$ -й клетке псевдоплоскости. В псевдоевклидовом пространстве размерности более 2 этим инвариантным асимптотам, как известно [21], отвечает изотропный конус (асимптотическое плоское подпространство) с вложенными в него гиперблоидами радиусов 1 и  $i$ . На какой-либо  $j$ -й псевдоплоскости данного пространства, пересекающей эти гиперблоиды по квадрогоиперболам, осуществляется чисто гиперболические ротации, в т. ч. в  $\tilde{E}_1$  (рис. 3) отвечающие  $j$ -й  $2 \times 2$ -клетке Roth  $\Gamma$ . Отсчёт положительных значений собственных углов  $\gamma_j$  выполняется во всех квадрантах в направлении к асимптотам. Гиперболический угол  $\gamma$  измеряется либо через *псевдоевклидову длину* дуги гиперболы, либо через двойную площадь гиперболического сектора на псевдоплоскости при единичных радиусах. По модулю *евклидовы характеристики* в  $\tilde{E}_1$  больше:

$$I_p = R \int_{\gamma_1}^{\gamma_2} \sqrt{(d \text{ sh } \gamma)^2 - (d \text{ ch } \gamma)^2} = R (\gamma_2 - \gamma_1) < I_E = R \int_{\gamma_1}^{\gamma_2} \sqrt{(d \text{ sh } \gamma)^2 + (d \text{ ch } \gamma)^2},$$



$$S = R \cdot \left[ \int_{\gamma_1}^{\gamma_2} \operatorname{ch} \gamma \, d \operatorname{sh} \gamma - \operatorname{sh} \gamma \cdot \operatorname{ch} \gamma / 2 \right]_{\gamma_1}^{\gamma_2} = 1/2 R \cdot (\gamma_2 - \gamma_1) < S_E.$$

Единичный радиус-вектор  $R$  псевдокривизны гиперболически ортогонален гиперболе в точке касания и  $d\ell = R d\gamma$ . Причём, он и касательная задают специальные гиперболически связанные оси координат. Фокусу гиперболы соответствует особый (!) скалярный гиперболический угол  $\omega$ :  $\omega \approx 0,881$  рад;  $\operatorname{sh} \omega = 1$ ,  $\operatorname{ch} \omega = \sqrt{2}$ ,  $\operatorname{th} \omega = \operatorname{sh} \omega / \operatorname{ch} \omega = \sqrt{2}/2$  – см. рис. 3. Согласно синус-тангенсной аналогии конкретного типа,  $\varphi(\omega) = \pi/4$ . Например,  $\sin(\pi/4 \pm i \cdot \omega) = 1 \pm \sqrt{2}/2 \cdot i$ ,  $\cos(\pi/4 \pm i \cdot \omega) = 1 \mp \sqrt{2}/2 \cdot i$ .

Другой вид сферическо-гиперболической аналогии конкретного типа в  $\tilde{E}_1$  устанавливается через отношение изоморфизма между кажущимся сферическим углом  $\varphi_R$  и гиперболическим углом  $\gamma_R$ , если принять, что они задаются на плоскости/псевдоплоскости одним и тем же радиус-вектором (рис. 3). Указанная тригонометрическая аналогия определяется исходно через тождество тангенсов

$$\operatorname{tg} \varphi_R \equiv \operatorname{th} \gamma \rightarrow \varphi_R = \varphi_R(\gamma) = \operatorname{arctg} \operatorname{th} \gamma \quad (-\pi/4 \leq \varphi_R \leq +\pi/4). \quad (354)$$

Другие функции связаны соотношениями:

$$\left. \begin{aligned} \sin \varphi_R &\equiv \operatorname{sh} \gamma / \sqrt{\operatorname{ch} 2\gamma}, & \cos \varphi_R &\equiv \operatorname{ch} \gamma / \sqrt{\operatorname{ch} 2\gamma}, \\ \operatorname{sh} \gamma &\equiv \sin \varphi_R / \sqrt{\cos 2\varphi_R}, & \operatorname{ch} \gamma &\equiv \cos \varphi_R / \sqrt{\cos 2\varphi_R}. \end{aligned} \right\} \quad (355)$$

Данное соответствие определяется как сферическо-гиперболическая тангенс-тангенсная аналогия. Например,  $\varphi_R(\omega) \approx 35^\circ$ .  $\gamma(\pi/4) = \infty$ . В принципе, возможно бесконечное количество вариантов аналогий конкретного типа, но все они сводятся к тождествам вида:

$$\operatorname{tg}(k_1 \cdot \varphi/2) \equiv \operatorname{th}(k_2 \cdot \gamma/2) \leftrightarrow \begin{cases} \sin(k_1 \varphi) \equiv \operatorname{th}(k_2 \gamma), & \operatorname{tg}(k_1 \varphi) \equiv \operatorname{sh}(k_2 \gamma), \\ \cos(k_1 \varphi) \equiv \operatorname{sch}(k_2 \gamma), & \operatorname{sec}(k_1 \varphi) \equiv \operatorname{ch}(k_2 \gamma). \end{cases} \quad (356)$$

Здесь  $-\pi/4 \leq k_1 \cdot \varphi/2 \leq +\pi/4$ .

Практический интерес представляют 4 варианта:

- 1)  $k_1 = k_2 = 1$  соответствует (331).
- 2)  $k_1 = k_2 = 2$  соответствует (354).
- 3)  $k_1 = 1, k_2 = 2$ .
- 4)  $k_1 = 2, k_2 = 1$ .

Если конкретную аналогию применить в вариантах 1 и 2 совместно, то чисто геометрически решаются (с помощью циркуля и линейки) задачи удвоения и бисекции гиперболического угла в  $\tilde{E}_1$  (рис. 3):

a)  $\operatorname{tg} \varphi \equiv \operatorname{th} \gamma$ ,  $\varphi_R = \varphi_R(\gamma)$ ,  $\varphi = 2\varphi_R \rightarrow \operatorname{sh} 2\gamma \equiv \operatorname{tg} \varphi$ ;

б)  $\operatorname{tg} \varphi \equiv \operatorname{sh} \gamma$ ,  $\varphi = \varphi(\gamma)$ ,  $\varphi_R = \varphi/2 \rightarrow \operatorname{th} \gamma/2 \equiv \operatorname{tg} \varphi_R$ .

В этом случае имеет место неравенство

$$|\varphi_R(\gamma)| < |\varphi(\gamma)| < 2 \cdot |\varphi_R(\gamma)|. \quad (357)$$

Действительно,

$$\left. \begin{aligned} \cos \varphi &\equiv \operatorname{sch} \gamma, \\ \cos 2\varphi_R &\equiv \operatorname{sch} 2\gamma, \end{aligned} \right\} \rightarrow \cos \varphi > \cos (2\varphi_R);$$

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \varphi &\equiv \operatorname{sh} \gamma, \\ \operatorname{tg} \varphi_R &\equiv \operatorname{th} \gamma, \end{aligned} \right\} \rightarrow |\operatorname{tg} \varphi| > |\operatorname{tg} \varphi_R|.$$

Псевдоевклидова длина отрезков и дуг гипербол с разным наклоном от изотропной диагонали суть или мнимая, или нулевая, или вещественная. Поэтому эти объекты в псевдоевклидовой геометрии подразделяют на *пространству и времени подобные, а также изотропные (как в СТО)*.

В тензорной тригонометрии представляет особый интерес именно синус-тангенсная аналогия. Она устанавливает непосредственную взаимосвязь исходно в любом универсальном базисе  $\tilde{E}_1$  между преобразованиями и углами в квартовом круге (341). С применением синус-тангенсной аналогии устанавливаются тригонометрические формулы для плоского гиперболически прямоугольного треугольника. Последний определяется как треугольник на псевдоплоскости, у которого две стороны-катеты  $a$  и  $b$  принадлежат разнометричным однородным подпространствам рефлектор-тензора (осям), т. е. с собственными значениями «+1» и «-1». Против прямого угла  $v$  лежит гипотенуза  $g$ . Если  $|b| > |a|$ , то гипотенуза треугольника находится внутри изотропного конуса и  $g^2 = b^2 - a^2$  (внутренний треугольник). Если  $|a| > |b|$ , то гипотенуза треугольника находится вне изотропного конуса и  $g^2 = a^2 - b^2$  (внешний треугольник). При  $|a| = |b|$  гипотенуза на изотропном конусе,  $g = 0$ , при ней 2 угла  $\delta = +\infty$ . Гипотенуза  $g$  в зависимости от положения относительно изотропного конуса или времени подобна, или пространству подобна, или вырождена. Против катета с меньшим модулем  $\operatorname{minimod} \langle a, b \rangle$  лежит острый угол  $\gamma$ . Угол  $\gamma$  образуется гипотенузой и прилежащим катетом  $\operatorname{maximod} \langle a, b \rangle$ . Против катета с большим модулем  $\operatorname{maximod} \langle a, b \rangle$  лежит тупой угол, состоящий из бесконечного угла  $\delta = +\infty$  (в гиперболической метрике) и острого дополнительного угла  $\lambda$  (по отношению к углу  $\gamma$ ). Острый угол  $\lambda$  образует гипотенуза и прилежащий внутренний изотропный отрезок. Катеты образуют нулевой прямой угол  $v = 0$  (в гиперболической метрике). Нулевой угол  $v$  состоит формально из 2х частей  $v = +\delta - \delta = 0$  (см. рис. 4). Формально сумма углов этого треугольника всегда есть  $(\gamma + \lambda + \delta)$ . Далее:

$$\left. \begin{aligned} 0 \leq |\operatorname{sh} \gamma| &= 1/g \cdot |\operatorname{minimod} \langle a, b \rangle| \equiv |\operatorname{tg} \varphi| = |\operatorname{ctg} \xi| \equiv |\operatorname{cosh} \lambda| \leq +\infty, \\ +1 \leq \operatorname{ch} \gamma &= 1/g \cdot |\operatorname{maximod} \langle a, b \rangle| \equiv \operatorname{sec} \varphi = |\operatorname{cosec} \xi| \equiv |\operatorname{cth} \lambda| \leq +\infty, \\ -1 \leq \operatorname{th} \gamma &= \operatorname{minimod} \langle a, b \rangle / \operatorname{maximod} \langle a, b \rangle = \sin \varphi = \pm \cos \xi = \pm \operatorname{sech} \lambda \leq +1. \end{aligned} \right\} (358)$$

(для *особого* треугольника  $\operatorname{cosech} \lambda \equiv \operatorname{sh} \omega = 1 = \operatorname{sh} \lambda \rightarrow \gamma = \omega = \lambda$  !)

Синус-тангенсная аналогия устанавливает взаимно-однозначное соответствие между этими тремя углами в  $\tilde{E}_1$  (см. также в § 11.2.). Например:

$$\text{th } \gamma \equiv \sin \varphi, \text{ ch } \gamma \equiv \sec \varphi \leftrightarrow \{\gamma \rightarrow \varphi(\gamma), \lambda + \delta \rightarrow \xi, \delta \rightarrow d = \pi/2\}, \quad (359)$$

$$(\gamma \text{ или } \lambda = 0 \leftrightarrow \lambda \text{ или } \gamma = \pm \infty) \leftrightarrow (\varphi \text{ или } \xi = 0 \leftrightarrow \xi \text{ или } \varphi = \pm \pi/2);$$

$$-1 < \text{th}(\gamma + \lambda) \equiv \sin \sigma < +1 \leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} -\pi/2 = -d < \sigma < +d = +\pi/2, \\ -\infty = -\delta < \gamma + \lambda < +\delta = +\infty. \end{array} \right\} \quad (360)$$

Следствие: сумма гиперболических углов  $\gamma$  и  $\lambda$  треугольника меньше  $\delta$ .

$$\text{sh}(\gamma, \lambda) \equiv \text{cosech}(\lambda, \gamma), \quad \text{ch}(\gamma, \lambda) \equiv \text{cth}(\pm \lambda, \gamma), \quad \text{th}(\pm \gamma, \lambda) \equiv \text{sech}(\lambda, \gamma);$$

$$\text{ch}^2(\gamma, \lambda) - \text{sh}^2(\gamma, \lambda) = 1 = \text{cth}^2(\lambda, \gamma) - \text{cosech}^2(\lambda, \gamma);$$

$$\text{th}^2(\gamma, \lambda) + \text{sech}^2(\gamma, \lambda) = 1 = \text{sech}^2(\lambda, \gamma) + \text{th}^2(\lambda, \gamma); \quad \text{где: } -\delta < \gamma + \lambda < +\delta.$$

При допустимых преобразованиях базисов эти углы отображаются в них.

### § 6.5. Элементарные тензорные гиперболические тригонометрические функции

Сферическо-гиперболическую аналогию обоих типов (абстрактную и конкретную) можно использовать для упрощённого вычисления матриц элементарных структур в квартовом круге (341) – как моторных, так и рефлексивных, если уже известна структура для какой-либо матрицы из круга. Например, аналогично ранее найденным структурам (313), (314) устанавливаются структуры деформационных матриц:

$$\{\text{def}(\pm \Phi)\}_{3 \times 3}$$

$1 + (\sec \varphi - 1) \cdot \cos^2 \alpha_1$	$(\sec \varphi - 1) \cdot \cos \alpha_1 \cdot \cos \alpha_2$	$\pm \text{tg } \varphi \cdot \cos \alpha_1$
$(\sec \varphi - 1) \cdot \cos \alpha_1 \cdot \cos \alpha_2$	$1 + (\sec \varphi - 1) \cdot \cos^2 \alpha_2$	$\pm \text{tg } \varphi \cdot \cos \alpha_2$
$\pm \text{tg } \varphi \cdot \cos \alpha_1$	$\pm \text{tg } \varphi \cdot \cos \alpha_2$	$\sec \varphi$

$$, \quad (361)$$

$$\{\text{def}(\pm \Phi)\}_{(n+1) \times (n+1)}$$

$I_{n \times n} + (\sec \varphi - 1) \cdot \{\mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{e}'_\alpha\}$ $(\mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{e}'_\alpha = \overleftarrow{\mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{e}'_\alpha})$	$\pm \text{tg } \varphi \cdot \mathbf{e}_\alpha$
$\pm \text{tg } \varphi \cdot \mathbf{e}'_\alpha$	$\sec \varphi$

$$. \quad (362)$$

Эти структуры как элементарные, подобно структурам (313), (314), выводятся из исходной  $2 \times 2$ -клетки (292) по тем же схемам модальных преобразований (315), (317), (318). И далее из полученных структур деформационных и ротационных сферических матриц-функций по синус-тангенсной аналогии выводятся родственные структуры ротационных и деформационных гиперболических матриц-функций:

$$\{\text{roth}(\pm \Gamma)\}_{4 \times 4}$$

$1 + (\text{ch } \gamma - 1) \cdot \cos^2 \alpha_1$	$(\text{ch } \gamma - 1) \cdot \cos \alpha_1 \cdot \cos \alpha_2$	$(\text{ch } \gamma - 1) \cdot \cos \alpha_1 \cdot \cos \alpha_3$	$\pm \text{sh } \gamma \cdot \cos \alpha_1$
$(\text{ch } \gamma - 1) \cdot \cos \alpha_1 \cdot \cos \alpha_2$	$1 + (\text{ch } \gamma - 1) \cdot \cos^2 \alpha_2$	$(\text{ch } \gamma - 1) \cdot \cos \alpha_2 \cdot \cos \alpha_3$	$\pm \text{sh } \gamma \cdot \cos \alpha_2$
$(\text{ch } \gamma - 1) \cdot \cos \alpha_1 \cdot \cos \alpha_3$	$(\text{ch } \gamma - 1) \cdot \cos \alpha_2 \cdot \cos \alpha_3$	$1 + (\text{ch } \gamma - 1) \cdot \cos^2 \alpha_3$	$\pm \text{sh } \gamma \cdot \cos \alpha_3$
$\pm \text{sh } \gamma \cdot \cos \alpha_1$	$\pm \text{sh } \gamma \cdot \cos \alpha_2$	$\pm \text{sh } \gamma \cdot \cos \alpha_3$	$\text{ch } \gamma$

(363)

$$\{\text{roth}(\pm \Gamma)\}_{(n+1) \times (n+1)}$$

$I_{n \times n} + (\text{ch } \gamma - 1) \cdot \{\mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{e}_\alpha'\}$ $(\mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{e}_\alpha' = \overleftarrow{\mathbf{e}_\alpha} \cdot \mathbf{e}_\alpha')$	$\pm \text{sh } \gamma \cdot \mathbf{e}_\alpha$
$\pm \text{sh } \gamma \cdot \mathbf{e}_\alpha'$	$\text{ch } \gamma$

(364)

$$\{\text{defh}(\pm \Gamma)\}_{4 \times 4}$$

$1 - (1 - \text{sech } \gamma) \cdot \cos^2 \alpha_1$	$-(1 - \text{sech } \gamma) \cdot \cos \alpha_1 \cdot \cos \alpha_2$	$-(1 - \text{sech } \gamma) \cdot \cos \alpha_1 \cdot \cos \alpha_3$	$\mp \text{th } \gamma \cdot \cos \alpha_1$
$-(1 - \text{sech } \gamma) \cdot \cos \alpha_1 \cdot \cos \alpha_2$	$1 - (1 - \text{sech } \gamma) \cdot \cos^2 \alpha_2$	$-(1 - \text{sech } \gamma) \cdot \cos \alpha_2 \cdot \cos \alpha_3$	$\mp \text{th } \gamma \cdot \cos \alpha_2$
$-(1 - \text{sech } \gamma) \cdot \cos \alpha_1 \cdot \cos \alpha_3$	$-(1 - \text{sech } \gamma) \cdot \cos \alpha_2 \cdot \cos \alpha_3$	$1 - (1 - \text{sech } \gamma) \cdot \cos^2 \alpha_3$	$\mp \text{th } \gamma \cdot \cos \alpha_3$
$\pm \text{th } \gamma \cdot \cos \alpha_1$	$\pm \text{th } \gamma \cdot \cos \alpha_2$	$\pm \text{th } \gamma \cdot \cos \alpha_3$	$\text{sech } \gamma$

(365)

Кроме того, та же гиперболическая ротационная матрица-функция выводится из сферической по аналогии абстрактного типа. А именно по схеме (322) вещественный синус в ротационной матрице  $\{\text{rot } \Phi\}_{\text{can}}$  в (315) преобразуется в мнимый (284) и далее в гиперболический. Отсюда же видно, что обращение ротационных и деформационных матриц сводится к простой операции:  $\mathbf{e}_\alpha \rightarrow (-\mathbf{e}_\alpha)$ , или  $\text{rot } \pi \cdot \mathbf{e}_\alpha = -\mathbf{e}_\alpha$ . В общем случае при ротации в другой универсальный базис  $\tilde{\mathbf{E}}_{1u} = \text{rot } \Theta \cdot \tilde{\mathbf{E}}_1$  в указанных тригонометрических матрицах изменяются только координаты вектора направляющих косинусов:  $\text{rot}' \Theta_{n \times n} \cdot \mathbf{e}_\alpha = \text{rot}(-\Theta)_{n \times n} \cdot \mathbf{e}_\alpha = \mathbf{e}_\alpha$  в пределах того же евклидова подпространства.

Матрицы (313), (314) представляют особый интерес для изучения движений в 2-х и n-мерной сферической геометрии. Матрицы (363), (364) представляют интерес для изучения движений в 3-х и n-мерной гиперболической геометрии. Матрицы (363), (365) представляют интерес для изучения преобразований в псевдоевклидовом пространстве-времени Минковского, связанных с физическим движением как в плоскости, так и в пространстве. Все они применимы в неевклидовых геометриях!

# Глава 7. Тригонометрическая природа коммутативности и антикоммутативности

## § 7.1. Коммутативность простых матриц

Биортогональные матрицы коммутативны и антикоммутативны:  $B_1 \cdot B_2 = B_2 \cdot B_1 = -B_2 B_1 = Z$ . Они обязательно сингулярные:  $r_1 + r_2 \leq n$ . Простые биортогональные матрицы приводятся к диагональной форме в некотором общем базисе, причём  $D_1 \cdot D_2 = Z$ . Отсюда достаточно рассмотреть с тригонометрической точки зрения отношения мультипликативности для несингулярных простых матриц, то есть без их биортогональных блоков. *Коммутативные* простые матрицы, как известно, приводятся к диагональной форме в некотором общем базисе:

$$\begin{array}{|c|c|} \hline D\{P_1\} \\ \hline a_j & 0 \\ \hline 0 & a_k \\ \hline \end{array}, \quad \begin{array}{|c|c|} \hline D\{P_2\} \\ \hline b_j & 0 \\ \hline 0 & b_k \\ \hline \end{array}, \quad D\{P\} = V_{\text{col}}^{-1} \cdot P \cdot V_{\text{col}}.$$

Диагональность этих форм, а следовательно, и коммутативность обеих матриц сохраняются при воздействии на любую из них в форме  $2 \times 2$ -клеток, например  $(j, k)$ , согласованных с ними *простейших* модальных преобразований нижеуказанных трёх типов в аффинных W-формах:

$$\begin{array}{|c|c|} \hline W_1 \\ \hline \pm c & 0 \\ \hline 0 & \mp c \\ \hline \end{array}, \quad \begin{array}{|c|c|} \hline W_2 \\ \hline 0 & \mp d \\ \hline \pm d^{-1} & 0 \\ \hline \end{array}, \quad \begin{array}{|c|c|} \hline W_3 \\ \hline 0 & \pm \iota d \\ \hline \pm \iota d^{-1} & 0 \\ \hline \end{array}.$$

1-е преобразование как рефлексия изменяет *попарно* направления осей координат (с деформацией), 2-е и 3-е преобразования как ротации дают *попарно* перестановки D-элементов и осей координат (с сжатием-растяжением). Произведения этих простейших аффинных преобразований в сочетаниях, обусловленных размером матриц, образуют полное множество модальных матриц по отношению к данной D-форме как инвариантной структуре. Предполагается, что все собственные значения обеих матриц различны.

В противном случае, указанное множество расширяется за счёт таких преобразований, которые изменяют базис в пределах пересечения собственных подпространств  $P_1$  и  $P_2$ . Ввиду того, что коммутативные матрицы  $P$  с изменением базиса преобразуются как двухвалентные тензоры, указанные типы модальных матриц в простейших формах сводятся к трём типам тригонометрических преобразований в  $\langle \mathcal{E}^n \rangle$  – рефлексивному и двум ротационным в общих  $W$ -формах (т. е. при  $d = 1$ ):

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Ref} & \text{Rot} (\pm \pi/2) & \text{Roth} (\pm i\pi/2) \\
 \begin{array}{|c|c|} \hline \pm 1 & 0 \\ \hline 0 & \mp 1 \\ \hline \end{array} & , & \begin{array}{|c|c|} \hline 0 & \mp 1 \\ \hline \pm 1 & 0 \\ \hline \end{array} & , & \begin{array}{|c|c|} \hline 0 & \pm i \\ \hline \pm i & 0 \\ \hline \end{array} .
 \end{array} \tag{366}$$

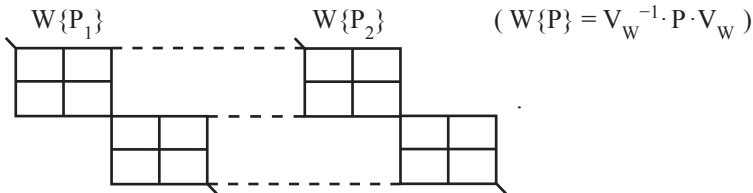
Следовательно, базисы  $D$ -форм коммутативных  $P_1$  и  $P_2$  совпадают или различаются с точностью до этих модальных согласованных рефлексий и ротаций на тензорные углы  $\pm k \cdot \pi/2$  (сферические) или  $\pm k \cdot i\pi/2$  (псевдогиперболические), где  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ . Более того, обе ротационные модальные матрицы с применением конкретной аналогии (§ 6.1) могут, в принципе, заменяться на две деформационные матрицы – гиперболическую и псевдосферическую с бесконечными углами-аргументами соответственно  $\pm \Delta$  и  $\pm i\Delta$  (без периодичности углов!).

### § 7.2. Антисимметричность пары простых матриц

Из антисимметричности пары простых матриц  $P_1$  и  $P_2$  следуют доолнительные соотношения:

$$P_1^2 \cdot P_2 = P_2 \cdot P_1^2, \quad P_1 \cdot P_2^2 = P_2^2 \cdot P_1, \quad P_1^2 \cdot P_2^2 = P_2^2 \cdot P_1^2.$$

В соответствии с принципом бинарности (§ 5.7) антисимметричные простые матрицы (без биортогональных блоков, у которых произведение  $D$ -фрагментов суть нулевое, – см. выше) приводятся к согласованным бинарным клеточным  $W$ -формам в некотором общем базисе:



Размерность таких несингулярных матриц тут обязательно чётная. Далее выполним общее модальное преобразование для обеих матриц  $P_1$  и  $P_2$  – причём такое, чтобы  $P_1$  стала диагональной. Тогда в новом общем базисе антисимметричность этих простых матриц алгебраически возможна тогда и только тогда, когда согласованные  $2 \times 2$ -клетки имеют общий вид:

$$\begin{array}{|c|c|} \hline W(P_1) & \\ \hline +a_j & 0 \\ \hline 0 & -a_j \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline W(P_2) & \\ \hline 0 & b_{1j} \\ \hline b_{2j} & 0 \\ \hline \end{array} . \tag{367}$$

Если же наоборот диагонализировать  $P_2$ , то

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 0 & a_{1j} \\ \hline a_{2j} & 0 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline +b_j & 0 \\ \hline 0 & -b_j \\ \hline \end{array} , \tag{368}$$

где дополнительно следуют соотношения:  $a = \sqrt{a_1 \cdot a_2}$ ,  $b = \sqrt{b_1 \cdot b_2}$ .

Ковариантная модальная матрица столбцов, приводящая контрадиагональную форму в (367) и (368) к диагональной, вычисляется, например, с использованием результатов § 2.2. Модальное преобразование для самого общего случая представляется в *аффинной тригонометрической форме* следующим образом:

$$\begin{array}{|c|c|} \hline W_{col}^{-1} & \\ \hline \frac{\sqrt{2}}{2} & +\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{\frac{b_1}{b_2}} \\ \hline -\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{\frac{b_2}{b_1}} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|c|} \hline W(P_2) & \\ \hline 0 & b_1 \\ \hline b_2 & 0 \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|c|} \hline W_{col} & \\ \hline \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{\frac{b_1}{b_2}} \\ \hline +\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{\frac{b_2}{b_1}} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline D\{P_2\} & \\ \hline +\sqrt{b_1 \cdot b_2} & 0 \\ \hline 0 & -\sqrt{b_1 \cdot b_2} \\ \hline \end{array} , \tag{369}$$

$$W_{col} = \{Rot \pi/4\}_{af} = W^{-1} \cdot Rot \pi/4 \cdot W , \tag{370}$$

$$D\{P\} = W_{col}^{-1} \cdot W(P) \cdot W_{col} = W_{col}^{-1} \cdot V_w^{-1} \cdot P \cdot V_w \cdot W_{col} = V^{-1} \cdot P \cdot V , \tag{371}$$

где  $\det \{Rot \pi/4\}_{af} = \det \{Rot \pi/4\} = +1$  ( $\mu_{1,2} = \cos \pi/4 \pm i \cdot \sin \pi/4$ ).

То есть (370) ротационная сферическая матрица, но выраженная тут в некотором *аффинном* базисе. В частности, в вещественном декартовом базисе это  $Rot \pi/4$ , в комплексном бинарном декартовом базисе (271) это  $Roth(-i\pi/4)$ . Кроме того, с учётом (366)–(368) диагональные и контрадиагональные формы как структуры повторяются после поворота базиса на согласованные прямые тензорные углы или кратные им, а также после согласованных с ними рефлексий в  $W$ -формах (366). Ввиду изложенного сформулируем основной результат.

*Пара несингулярных простых матриц  $P_1$  и  $P_2$  антикоммутативна тогда и только тогда, когда базисы диагональных форм связаны в общем случае аффинной ротацией или рефлексией на согласованный тензорный угол  $\pm \pi/4$  и/или  $\pm i\pi/4$ . Антикоммутативные несингулярные простые матрицы имеют обязательно чётный размер. Антикоммутативные сингулярные простые матрицы имеют необходимо согласованные биортогональные блоки, приводимые к биортогональным диагональным формам в общем базисе. В гиперболической трактовке углам  $\pm \pi/4$  и  $\pm i\pi/4$  отвечает углы  $\pm \omega$  и  $\pm i\omega$ , но в деформационных модальных матрицах.*

Ниже, исходя, например, из (367), рассмотрены характерные частные случаи, имеющие отношение к тензорной тригонометрии. Имеем:

$$b_{2j} = \pm b_{1j}, a_{2j} = \pm a_{1j}, V_W = R_W;$$

$P_1 = M_1, P_2 = M_2$  – антикоммутативные вещественные *нормальные* матрицы или комплексные *адекватно нормальные* матрицы (§ 4.2). Причём они либо симметричны, либо кососимметричны, что отвечает четырём вариантам пар  $S_1$  и  $S_2, S_1$  и  $K_1, S_2$  и  $K_2, K_1$  и  $K_2$  как указано.

а)  $b_{2j} = + b_{1j} = + b_j, a_j = a_{2j} = a_{1j}; a_j^2 + b_j^2 = 1;$

$P_1 = S_1, P_2 = S_2; S_1 \cdot S_2 = - S_2 \cdot S_1, S_1^2 + S_2^2 = I$ . Это соответствует (183).

$$V_{col} = R_W \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ +\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} = \{Rot \pi/4\}_{E_1} \cdot R_W.$$

б)  $b_{2j} = - b_{1j} = + b_j/i, a_j = a_{2j} = a_{1j}; a_j^2 - b_{1j}^2 = 1;$

$P_1 = S_1, P_2 = K_1; S \cdot K = - K \cdot S, S^2 - K^2 = I$ . Этот соответствует (209).

$$V_{col} = R_W \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2i \\ -\sqrt{2}/2i & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} = \{Roth i\pi/4\}_{E_1} \cdot R_W, \text{ см. схему перехода (322).}$$

Аналогично,  $\cos \tilde{\Phi} \cdot \sin \Phi = (\cos \tilde{\Phi} \cdot \sin \Phi)' = \sin' \Phi \cdot \cos \tilde{\Phi} = -\sin \Phi \cdot \cos \tilde{\Phi}$ .

в) исходно  $b_{2j} = - b_{1j} = + b_j/i, a_{2j} = a_{1j}$ ; затем применяем к базису  $Rot \pi/4$ . В итоге:  $a_{2j} = a_{1j} = a_j$ ; но  $W(P_2)$  - инвариант для данной ротации, поэтому по-прежнему  $b_{2j} = - b_{1j} = b_j/i$ . Обе матрицы оказались в 2х разных контрадиагональных формах:  $P_1 = S_2, P_2 = K_2; S \cdot K = - K \cdot S$ . Это, например, соответствует в (204) паре проективных синуса и тангенса.

г)  $a_j = \pm i \cdot c_j, b_{2j} = - b_{1j} = + b_j/i; K_1 \cdot K_2 = - K_2 \cdot K_1 (-c_j^2 - b_{1j}^2 = 1, -K_1^2 - K_2^2 = I)$ .

Дополнительно рассмотрим отвечающие им примеры исходно комплексных *эрмитово нормальных* пар антикоммутативных матриц  $N_1$  и  $N_2$ . Имеем:

$$b_1 = \rho_1 \cdot (\cos \beta_1 + i \sin \beta_1), \quad \rho > 0,$$

$$b_2 = \rho_2 \cdot (\cos \beta_2 + i \sin \beta_2), \quad \beta = 0 \div 2\pi,$$

$$b = \sqrt{b_1 \cdot b_2} = \sqrt{\rho_1 \cdot \rho_2} \cdot \exp [i(\beta_1 + \beta_2)/2],$$

$$\sqrt{b_2/b_1} = \sqrt{\rho_2/\rho_1} \cdot \exp (i\beta_{12}), \quad \sqrt{b_1/b_2} = \sqrt{\rho_1/\rho_2} \cdot \exp (-i\beta_{12}); \quad \beta_{12} = \beta_2 - \beta_1.$$

По прежнему имеем:  $b_{1j} = \pm b_{2j} \leftrightarrow a_{1j} = \pm a_{2j}, V_W = R_W$ .

В более сложных случаях  $|b_{1j}| = |b_{2j}| = \rho_b, |a_{1j}| = |a_{2j}| = \rho_a; V_W = U_W$ .

Тогда  $P_1 = N_1, P_2 = N_2$  – комплексные *эрмитово нормальные* матрицы.



В частности,  $P_1$  и  $P_2$  могут быть эрмитовыми и косоэрмитовыми, что соответствует антикоммутативным парам  $H_1, H_2; H, Q; Q_1, Q_2$ .  $V_{col}$  есть:

$$\begin{array}{|c|c|} \hline \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \cdot \exp(-i\beta_{12}) \\ \hline +\sqrt{2}/2 \cdot \exp(i\beta_{12}) & \sqrt{2}/2 \\ \hline \end{array} = \{\text{Exp}(-i\beta_{12}/2) \cdot \text{Rot } \pi/4 \cdot \text{Exp}(i\beta_{12}/2)\}, \quad (372)$$

где  $\beta_{12} = \beta_2 - \beta_1$ ,  $\text{Exp } i\beta_{12}/2 = U_W \cdot \begin{array}{|c|c|} \hline \exp(i\beta_{12}) & 0 \\ \hline 0 & \exp(-i\beta_{12}) \\ \hline \end{array} \cdot U_W^*$ .

Ротационная матрица (372) есть частный случай (370). В том числе, при  $\beta = \pi/4$  имеем модальную матрицу Roth ( $-i\pi/4$ ), соответствующую комплексному бинарному декартову базису. Более общо:  $\{\text{Exp}(-i\pi/4) \cdot \text{Rot } \Phi \cdot \text{Exp } i\pi/4\} = \text{Roth}(-i\Phi)$ , что тождественно по результату рефлективному преобразованию (271). В самом же общем случае формула (372) выражает  $\text{Rot } \pi/4$  в эрмитово ортогональном базисе с углом комплексного сдвига  $\beta_{12}$ . В вариантах (367), (368) имеем:

$$\begin{array}{|c|c|} \hline N_1 & N_2 \\ \hline +\rho_a \cdot \exp\left[i \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}\right] & 0 \\ \hline 0 & -\rho_a \cdot \exp\left[i \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}\right] \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 0 & \rho_b \cdot \exp(i\beta_1) \\ \hline \rho_b \cdot \exp(i\beta_2) & 0 \\ \hline \end{array},$$

$$\begin{array}{|c|c|} \hline N_1 & N_2 \\ \hline 0 & \rho_a \cdot \exp(i\alpha_1) \\ \hline \rho_a \cdot \exp(i\alpha_2) & 0 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline +\rho_b \cdot \exp\left[i \frac{\beta_1 + \beta_2}{2}\right] & 0 \\ \hline 0 & -\rho_b \cdot \exp\left[i \frac{\beta_1 + \beta_2}{2}\right] \\ \hline \end{array}.$$

а)  $\beta_{1j} + \beta_{2j} = \alpha_{1j} + \alpha_{2j} = 0$ ;

$P_1 = H_1, P_2 = H_2$  – антикоммутативная пара эрмитовых матриц. В случае  $\alpha_j^2 + \beta_{1j}^2 = 1$  это суть эрмитизированные проективные косинус и синус (для которых  $H_{12}^2 + H_{22}^2 = I$ ).

б)  $\beta_{1j} + \beta_{2j} = \pi, \alpha_{1j} + \alpha_{2j} = 0$ ;

$P_1 = H, P_2 = Q$  – антикоммутативная пара из эрмитовой и косоэрмитовой матриц. В случае  $\alpha_j^2 - \beta_{1j}^2 = 1$  это суть эрмитизированные проективные секанс и тангенс (для которых  $H^2 - Q^2 = I$ ).

в)  $\beta_{1j} + \beta_{2j} = \alpha_{1j} + \alpha_{2j} = \pi; P_1 = Q_1, P_2 = Q_2$  (для которых  $-Q_1^2 - Q_2^2 = I$ ).

В итоге выявлены все основные типы антикоммутативных пар простых матриц, имеющих отношение к тензорной тригонометрии.

## Глава 8. Тригонометрические спектры и неравенства

### § 8.1. Тригонометрический спектр нуль-простой матрицы

Матричные характеристические коэффициенты высшего порядка, как и проекторы, суть простые сингулярные матрицы с единственным ненулевым собственным значением (гл. 1 и 2). Представим высший матричный коэффициент второго рода для *нуль-простой* матрицы (§ 1.6) сначала в форме *алгебраической ортогональной суммы* по собственным тригонометрическим подпространствам, а затем в форме соответствующей ей *прямой ортогональной суммы* по собственным тригонометрическим клеткам, используя *принцип бинарности* (§ 5.6):

$$K_2(B,r) = \sum_{i=1}^{r-v'} \vec{S}_i \cdot K_2(B,r) \cdot \vec{S}_i + \vec{S}_m \cdot K_2(B,r) \cdot \vec{S}_m, \quad (373)$$

где  $\vec{S}_i = \overrightarrow{\{\cos^2 \tilde{\Phi}_B - \cos^2 \varphi_i \cdot I\}}$  проецирует ортогонально на  $i$ -ю собственную тригонометрическую плоскость  $\langle \mathcal{P}_i \rangle$  (см. (240);

$\vec{S}_m = \overrightarrow{\{\cos \tilde{\Phi}_B - I\}}$  проецирует ортогонально на подпространство  $\langle \mathcal{P}_m \rangle \equiv \langle \text{im } B \cap \text{im } B' \rangle$  размерности  $v'$  (см. рис.2). Причём здесь  $v'' = 0$  ввиду того, что  $B$  – нуль-простая матрица. Собственные ортопроекторы составляют полную сумму:

$$\sum_{i=1}^{r-v'} \vec{S}_i + \vec{S}_m + \vec{S}_q = I,$$

где  $\vec{S}_q = \overrightarrow{\{\cos \tilde{\Phi}_B + I\}}$  проецирует ортогонально на подпространство  $\langle \mathcal{P}_q \rangle \equiv \langle \ker B \cap \ker B' \rangle$  размерности  $n - 2r + v'$  (см. рис.2).

Общая размерность пространства, как и должно быть, составляет:  $2 \cdot (r - v') + v' + (n - 2r + v') = n$ . На подпространстве  $\langle \mathcal{P}_i \rangle$  коэффициент  $K_2(B,r)$  формально проявляет себя как сингулярная матрица ранга 1; её размер в прямой сумме есть  $2 \times 2$ . На  $\langle \mathcal{P}_m \rangle$  он формально проявляет себя как несингулярная матрица; её размер в прямой сумме есть  $v' \times v'$ . На  $\langle \mathcal{P}_q \rangle$  он формально проявляет себя как нулевая матрица; её размер в прямой сумме есть  $(n - 2r + v') \times (n - 2r + v')$ . В прямой сумме имеем:

$$K_2(B, r) = \sum_{i=1}^{r-v'} \oplus B_i^{2 \times 2} \oplus \det B_m^{v' \times v'} \cdot I^{v' \times v'} \oplus Z^{(n-2r+v') \times (n-2r+v')}, \quad (374)$$

где знак  $\oplus$  обозначает *ортогональное прямое суммирование*. Здесь как  $(r - v')$ , так и  $(n - 2r + v')$  – неотрицательные числа. Поэтому имеет место неравенство:

$$2r - n \leq v' \leq r. \quad (375)$$

В частности, для *нуль-нормальной* матрицы (§ 2.4) формула (374) приобретает простейший вид:

$$K_2(B, r) = \det B_m^{r \times r} \cdot I^{r \times r} \oplus Z^{(n-r) \times (n-r)}.$$

В формуле (374) применены специальные обозначения матриц:  $B_i^{2 \times 2}$  –  $2 \times 2$ -матрица ранга 1; для неё, согласно (29), высший матричный коэффициент совпадает с самой матрицей, а высший скалярный коэффициент совпадает с её следом;

$B_m^{v' \times v'}$  –  $v' \times v'$ -матрица ранга  $v'$ ; для неё, согласно (29), высший матричный коэффициент равен  $\det B_m^{v' \times v'} \cdot I^{v' \times v'}$ , а высший скалярный коэффициент совпадает с её детерминантом;

$Z^{(n-2r+v') \times (n-2r+v')}$  – часть нулевого блока, неотносящаяся к  $B_i^{2 \times 2}$ .

Общая сингулярность  $B$ , как и должно быть, составляет:

$$(r - v') + (n - 2r + v') = n - r.$$

Если в формуле (374) каждое слагаемое  $B_i^{2 \times 2}$  поделить на его след, а несингулярное слагаемое поделить на его детерминант, то тогда она преобразуется в *прямой* тригонометрический спектр косопроектора:

$$\overleftarrow{B} = \frac{K_2(B, r)}{k(B, r)} = \sum_{i=1}^{r-v'} \oplus \frac{B_i^{2 \times 2}}{\text{tr } B_i^{2 \times 2}} \oplus I^{v' \times v'} \oplus Z^{(n-2r+v') \times (n-2r+v')}. \quad (376)$$

При данном преобразовании применяется формула (62) для  $\Gamma = 2$  и  $r = n$ . Аналогичные тригонометрические спектры с использованием принципа бинарности выводятся для *мультипликативных* матриц:

$$K_2(BB', r) = \sum_{i=1}^{r-v'} \vec{S}_i \cdot K_2(BB', r) \cdot \vec{S}_i + \vec{S}_m \cdot K_2(BB', r) \cdot \vec{S}_m, \quad (377)$$

$$K_2(BB', r) = \sum_{i=1}^{r-v'} \oplus B_i^{2 \times 2} \cdot B_i'^{2 \times 2} \oplus \det^2 B_m^{v' \times v'} \cdot I^{v' \times v'} \oplus Z^{(n-2r+v') \times (n-2r+v')}, \quad (378)$$

$$\overleftarrow{BB'} = \frac{K_2(BB', r)}{k(BB', r)} = \sum_{i=1}^{r-v'} \oplus \frac{B_i^{2 \times 2} \cdot B_i'^{2 \times 2}}{\text{tr } \{B_i^{2 \times 2} \cdot B_i'^{2 \times 2}\}} \oplus I^{v' \times v'} \oplus Z^{(n-2r+v') \times (n-2r+v')}. \quad (379)$$

Из (374), (376) и (378), (379) получаем прямые произведения для высших скалярных коэффициентов:

$$k(B,r) = \prod_{i=1}^{r-v'} \text{tr } B_i^{2 \times 2} \cdot \det B_m^{v' \times v'} = k(B',r), \quad (380)$$

$$k(BB',r) = \prod_{i=1}^{r-v'} \text{tr } \{B_i^{2 \times 2} \cdot B_i'^{2 \times 2}\} \cdot \det^2 B_m^{v' \times v'} = k(B'B,r). \quad (381)$$

### § 8.2. Генеральное косинусное неравенство

Для нуль-простых  $B$ :  $\text{rang } \{\cos \tilde{\Phi}_B\} = n (v'' = 0)$ . Согласно (186) и (194),  
 $\overleftarrow{BB'} = \overleftarrow{B} \cdot \overleftarrow{B'} \cdot \cos^2 \tilde{\Phi}_B = (\overleftarrow{B} \cdot \cos \tilde{\Phi}_B) \cdot (\overleftarrow{B'} \cdot \cos \tilde{\Phi}_B)'$ . (382)

Подставив в первую часть соотношения все матрицы в форме прямых спектров, получаем собственные косинусные неравенства для каждой его тригонометрической клетки:

$$0 \leq \cos^2 \varphi_i = \frac{\text{tr}^2 B_i^{2 \times 2}}{\text{tr } \{B_i^{2 \times 2} \cdot B_i'^{2 \times 2}\}} \leq 1. \quad (383)$$

Из (380), (381) и (383) следует *генеральное косинусное неравенство* для квадратной матрицы в *нормализованной форме* ( $0 \leq \varphi_i \leq \pi/2$ ), то есть для косинусного отношения (137), и *косинусная норма* для  $\tilde{\Phi}_B$ , а именно:

$$0 \leq \prod_{i=1}^{r-v'} \cos^2 \varphi_i = |\{B\}|_{\cos}^2 = |\det \cos \tilde{\Phi}_B| = \frac{k^2(B,r)}{k(BB',r)} \leq 1. \quad (384)$$

Здесь  $|\{B\}|_{\cos}$  определяет косинусную норму  $\tilde{\Phi}_B$  и  $\Phi_B$ . В крайних случаях:

$|\{B\}|_{\cos} = 0$  – для нуль-дефектной матрицы,

$|\{B\}|_{\cos} = 1$  – для нуль-нормальной матрицы.

Используя ранее введённые характеристики матрицы – *диааналь* и *минорант* (гл. 3), придадим косинусному неравенству вид:

$$0 \leq \frac{|\mathcal{D}(r) B|}{\mathcal{M}(r) B} = |\{B\}|_{\cos} = \frac{|\mathcal{D}(r) B|}{\sqrt{|\mathcal{D}(r) BB'|}} \leq 1.$$

Воспользовавшись 2-й частью формулы (382), получаем аналогичные косинусные неравенства, но в *знаковой форме* ( $0 \leq \varphi_i \leq \pi$ ):

$$-1 \leq \cos \varphi_i = \frac{\text{tr } B_i^{2 \times 2}}{\sqrt{\text{tr } \{B_i^{2 \times 2} \cdot B_i'^{2 \times 2}\}}} \leq +1. \quad (385)$$

В случае косинусного отношения (138) имеем для  $\tilde{\Phi}_B$ :

$$-1 \leq \prod_{i=1}^{r-v'} \cos \varphi_i = \{B\}_{\cos} = \frac{k(B,r)}{\sqrt{k(BB',r)}} \leq +1, \quad (386)$$

или

$$-1 \leq \frac{\mathcal{D}(r) B}{\mathcal{M}^+(r) B} = \{B\}_{\cos} = \frac{\mathcal{D}(r) B}{\sqrt{\mathcal{D}(r) BB'}} \leq +1.$$

Крайние варианты здесь соответствуют нуль-нормальным матрицам с отрицательной и положительной диааналью

$$\mathcal{D}(r) B = k(B,r) = \prod_{j=2}^q \mu_j^{s_j'} - \text{см. § 1.5.}$$

Нетрудно также видеть, что в вышеуказанных формулах частный угол  $0 \leq \varphi_i \leq \pi$  отличается от собственного угла  $0 \leq \varphi_i \leq \pi/2$  также, как угол между двумя направленными векторами отличается от угла между двумя ненаправленными векторами или прямыми. Соответственно  $\{B\}_{\cos}$  есть косинусное отношение для планаров  $\langle \text{im } B \rangle$ ,  $\langle \text{im } B' \rangle$  и для планаров  $\langle \ker B \rangle$ ,  $\langle \ker B' \rangle$ ; а  $\{B\}_{\cos}$  есть косинусное отношение для *линеоров*, заданных матрицами  $B$  и  $B'$ .

Заметим также, что для простой составляющей  $P_B$  от *нуль-простой матрицы*  $B$ , согласно (22) и (76), тригонометрия и спектры тождественны таковым для самой исходной матрицы:

$$\left. \begin{array}{l} \xrightarrow{\approx} \\ P_B = B, \\ \xleftrightarrow{\approx} \\ P_B \cdot P_B' = BB', \end{array} \right\} (B \in \langle \text{Vp} \rangle).$$

Для тензорного угла между планарами ранга 1, т. е. прямыми, и ранга  $(n-1)$ , т. е. гиперплоскостями, возможна только тригонометрическая клетка, отвечающая одной собственной тригонометрической плоскости.

Из вышеизложенного следует основной вывод. *Тригонометрический смысл собственных углов  $\varphi_i$  для сферических функций тензорного угла заключается в том, что это суть скалярные углы между планарами ранга 1 –  $\langle \text{im } B_i^{2 \times 2} \rangle$  и  $\langle \text{im } B_i'^{2 \times 2} \rangle$  в прямых тригонометрических спектрах собственных ортопроекторов  $B$  и  $B'$ .*

Аналогичный указанному тригонометрический смысл имеют собственные скалярные углы  $\varphi_i$  в клетках, когда бинарный тензорный угол задаётся эквиванговыми линеорами  $A_1$  и  $A_2$  или планарами  $\langle \text{im } A_1 \rangle$  и  $\langle \text{im } A_2 \rangle$ . Пусть выполняется условие (224) при  $B = A_1 A_2'$  и поэтому имеет место взаимно-однозначное соответствие (226) между ортопроекторами. Для полно не ортогональных друг другу линеоров:  $\text{rang}\{\cos \tilde{\Phi}_{12}\} = n$  ( $v'' = 0$ ). Тригонометрические спектры для внешних мультипликаций линеоров  $A_1$  и  $A_2$  имеют вид:

$$\begin{aligned} K_2(AA', r) &= \sum_{i=1}^{r-v'} \vec{S}_i \cdot K_2(AA', r) \cdot \vec{S}_i + \vec{S}_m \cdot K_2(AA', r) \cdot \vec{S}_m \equiv \\ &\equiv \sum_{i=1}^{r-v'} \oplus [AA']_i^{2 \times 2} \oplus \det [AA']^{v' \times v'} \cdot I^{v' \times v'} \oplus Z^{(n-2r+v') \times (n-2r+v')}, \end{aligned} \quad (387)$$

$$\begin{aligned} K_2(A_1A_2', r) &= \sum_{i=1}^{r-v'} \vec{S}_i \cdot K_2(A_1A_2', r) \cdot \vec{S}_i + \vec{S}_m \cdot K_2(A_1A_2', r) \cdot \vec{S}_m \equiv \\ &\equiv \sum_{i=1}^{r-v'} \oplus [A_1A_2']_i^{2 \times 2} \oplus \det [A_1A_2']^{v' \times v'} \cdot I^{v' \times v'} \oplus Z^{(n-2r+v') \times (n-2r+v')}; \end{aligned} \quad (388)$$

$$\overleftarrow{AA'} = \frac{K_2(AA', r)}{k(AA', r)} = \sum_{i=1}^{r-v'} \oplus \frac{[AA']_i^{2 \times 2}}{\text{tr} [AA']_i^{2 \times 2}} \oplus I^{v' \times v'} \oplus Z^{(n-2r+v') \times (n-2r+v')}, \quad (389)$$

$$\overleftarrow{A_1A_2'} = \frac{K_2(A_1A_2', r)}{k(A_1A_2', r)} = \sum_{i=1}^{r-v'} \oplus \frac{[A_1A_2']_i^{2 \times 2}}{\text{tr} [A_1A_2']_i^{2 \times 2}} \oplus I^{v' \times v'} \oplus Z^{(n-2r+v') \times (n-2r+v')}; \quad (390)$$

$$k(AA', r) = \prod_{i=1}^{r-v'} \text{tr} [AA']_i^{2 \times 2} \cdot \det [AA']^{v' \times v'} = \det A'A, \quad (391)$$

$$k(A_1A_2', r) = \prod_{i=1}^{r-v'} \text{tr} [A_1A_2']_i^{2 \times 2} \cdot \det [A_1A_2']^{v' \times v'} = \det A_1'A_2'. \quad (392)$$

Причём, согласно (132),  $\det^2 [A_1A_2']^{v' \times v'} = \det [A_1A_1']^{v' \times v'} \cdot \det [A_2A_2']^{v' \times v'}$ . В свою очередь, согласно (186), (196) и (226), имеем:

$$\overleftarrow{A_1A_1'} \cdot \overleftarrow{A_2A_2'} = \overleftarrow{A_1A_2'} \cdot \cos^2 \tilde{\Phi}_{12} = (\overleftarrow{A_1A_2'} \cdot \cos \tilde{\Phi}_{12}) \cdot (\overleftarrow{A_2A_1'} \cdot \cos \tilde{\Phi}_{12}). \quad (393)$$

Отсюда же для  $2 \times 2$ -клеток ранга 1 устанавливаются вспомогательные соотношения, согласно (68) в варианте  $n = 2$ :

$$[A_1A_2']_i^{2 \times 2} \cdot [A_1A_2']_i^{2 \times 2} = \text{tr} [A_1A_2']_i^{2 \times 2} \cdot [A_1A_2']_i^{2 \times 2} = [A_1A_1']_i^{2 \times 2} \cdot [A_2A_2']_i^{2 \times 2}. \quad (394)$$

Первое из них есть частный случай (68). Подставив в формулу (393) матрицы в виде прямых спектров и используя (394) по клеткам, получаем собственные косинусные неравенства и затем генеральное косинусное неравенство для эквиранговых линейоров  $A_1$  и  $A_2$ :

$$0 \leq \cos^2 \varphi_i = \text{tr}^2 [A_1A_2']_i^{2 \times 2} / \text{tr} [A_1A_1']_i^{2 \times 2} \cdot \text{tr} [A_2A_2']_i^{2 \times 2} \leq 1, \quad (395)$$

$$0 \leq \prod_{i=1}^{r-v'} \cos^2 \varphi_i = |\{A_1A_2'\}_{\cos}|_{\cos}^2 = |\det \cos \tilde{\Phi}_{12}| = \frac{\mathcal{M}^2(r) \{A_1A_2'\}}{\mathcal{M}^2(r) A_1 \cdot \mathcal{M}^2(r) A_2} \leq 1, \quad (396)$$

где  $\varphi_i$  – собственные скалярные углы между планарами первого ранга  $\langle \text{im} [A_1A_1']_i^{2 \times 2} \rangle$  и  $\langle \text{im} [A_2A_2']_i^{2 \times 2} \rangle$  ( $0 \leq \varphi_i \leq \pi/2$ ). В крайних случаях:

$|\{A_1A_2'\}_{\cos}|_{\cos} = 1$  – для полно параллельных линейоров,

$|\{A_1A_2'\}_{\cos}|_{\cos} = 0$  – для ортогональных, в том числе частично, линейоров.

Соответствующие косинусные неравенства в знаковой форме:

$$-1 \leq \cos \varphi_i = \text{tr} [A_1 A_2']_i^{2 \times 2} / \sqrt{\text{tr} [A_1 A_1']_i^{2 \times 2} \cdot \text{tr} [A_2 A_2']_i^{2 \times 2}} \leq +1, \quad (397)$$

$$-1 \leq \prod_{i=1}^{r-v'} \cos \varphi_i = \{A_1 A_2'\}_{\cos} = \frac{\mathcal{D}l(r) \{A_1 A_2'\}}{\mathcal{M}t(r) A_1 \cdot \mathcal{M}t(r) A_2} \leq +1. \quad (398)$$

Здесь ( $0 \leq \varphi_i \leq \pi$ ). Заметим, что в (384) и (396) числители и знаменатели тождественны (где  $B = A_1 A_2'$ ). Это соответствует той же формуле (132). При  $r_1 \neq r_2$  косинусное отношение формально нулевое.

### § 8.3. Спектрально-клеточное представление тензорных тригонометрических функций

Теперь можно взглянуть более детально на структуру проективного косинуса и синуса на уровне тригонометрической  $2 \times 2$ -клетки. Как было показано ранее (гл. 5), собственные тригонометрические плоскости, относящиеся к  $2 \times 2$ -клеткам, для тензорных углов проективного и моторного типа тождественны. Поэтому на основании левой части (301) и спектра (389) имеем:

$$\begin{array}{|c|c|} \hline \cos \varphi_i & -\sin \varphi_i \\ \hline \sin \varphi_i & \cos \varphi_i \\ \hline \end{array} \cdot \frac{[A_1 A_1']_i^{2 \times 2}}{\text{tr} [A_1 A_1']_i^{2 \times 2}} \cdot \begin{array}{|c|c|} \hline \cos \varphi_i & \sin \varphi_i \\ \hline -\sin \varphi_i & \cos \varphi_i \\ \hline \end{array} = \frac{[A_2 A_2']_i^{2 \times 2}}{\text{tr} [A_2 A_2']_i^{2 \times 2}}.$$

В свою очередь,  $2 \times 2$ -клетку проектора  $[AA']_i^{2 \times 2}$  ранга 1 можно представить как внешнюю мультипликацию единичного  $2 \times 1$ -вектора  $\mathbf{e}_i$ , задающего  $i$ -ю базисную линию планара  $\langle \text{im } A \rangle$  на  $i$ -й собственной тригонометрической плоскости бинарного тензорного угла:

$$[AA']_i^{2 \times 2} = \frac{[AA']_i^{2 \times 2}}{\text{tr} [AA']_i^{2 \times 2}} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_i' = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_i'.$$

Соответственно две стороны тензорного угла, образуемого планарами  $\langle \text{im } A_1 \rangle$  и  $\langle \text{im } A_2 \rangle$  ранга  $r$ , на уровне  $2 \times 2$ -клетки можно представить в виде двух собственных единичных векторов или прямых, которые преобразуются друг в друга посредством ротационного или рефлексивного преобразования, согласно (301). Выразим декартовы координаты указанных единичных векторов для обоих планаров на  $i$ -й тригонометрической плоскости через прилежащие углы:

$$\mathbf{e}_1 = \begin{vmatrix} \cos \varphi_1 \\ \sin \varphi_1 \end{vmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{vmatrix} \cos \varphi_2 \\ \sin \varphi_2 \end{vmatrix}.$$

Тогда при ротационном преобразовании планаров имеем:

$$\mathbf{e}_2 = \begin{array}{|c|c|} \hline \cos \varphi_{12} & -\sin \varphi_{12} \\ \hline \sin \varphi_{12} & \cos \varphi_{12} \\ \hline \end{array} \cdot \mathbf{e}_1 \quad (\varphi_{12} = \varphi_2 - \varphi_1).$$

(Если представить 1-й вектор в форме суммы его двух ортопроекций, то видно, что каждая из проекций поворачивается на тот же угол, что и вектор.) Согласно (171), косинус для  $2 \times 2$ -клетки имеет вид:

$$[\cos \tilde{\Phi}_{12}]^{2 \times 2} = \overleftarrow{\mathbf{e}}_1 \cdot \overleftarrow{\mathbf{e}}_1' + \overleftarrow{\mathbf{e}}_2 \cdot \overleftarrow{\mathbf{e}}_2' - I^{2 \times 2} = \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1' + \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2' - I^{2 \times 2}.$$

После тригонометрических преобразований получаем

$$[\cos \tilde{\Phi}_{12}]^{2 \times 2} = \cos \varphi_{12} \cdot \begin{array}{|c|c|} \hline \cos(\varphi_1 + \varphi_2) & \sin(\varphi_1 + \varphi_2) \\ \hline \sin(\varphi_1 + \varphi_2) & -\cos(\varphi_1 + \varphi_2) \\ \hline \end{array} \left| \begin{array}{l} \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \cdot \cos(\varphi_2 + \varphi_1) = \\ = \cos^2 \varphi_1 + \cos^2 \varphi_2 - 1, \quad (399) \\ \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \cdot \sin(\varphi_2 + \varphi_1) = \\ = \cos \varphi_1 \cdot \sin \varphi_1 + \cos \varphi_2 \cdot \sin \varphi_2. \end{array} \right.$$

Согласно (163), синус для  $2 \times 2$ -клетки имеет вид:

$$[\sin \tilde{\Phi}_{12}]^{2 \times 2} = \overleftarrow{\mathbf{e}}_2 \cdot \overleftarrow{\mathbf{e}}_2' - \overleftarrow{\mathbf{e}}_1 \cdot \overleftarrow{\mathbf{e}}_1' = \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2' - \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1'.$$

После тригонометрических преобразований получаем

$$[\sin \tilde{\Phi}_{12}]^{2 \times 2} = \sin \varphi_{12} \cdot \begin{array}{|c|c|} \hline -\sin(\varphi_1 + \varphi_2) & \cos(\varphi_1 + \varphi_2) \\ \hline \cos(\varphi_1 + \varphi_2) & \sin(\varphi_1 + \varphi_2) \\ \hline \end{array} \left| \begin{array}{l} \sin(\varphi_2 - \varphi_1) \cdot \sin(\varphi_2 + \varphi_1) = \\ = \sin^2 \varphi_2 - \sin^2 \varphi_1, \quad (400) \\ \sin(\varphi_2 - \varphi_1) \cdot \cos(\varphi_2 + \varphi_1) = \\ = \cos \varphi_2 \cdot \sin \varphi_2 - \cos \varphi_1 \cdot \sin \varphi_1. \end{array} \right.$$

Условие  $(\varphi_2 + \varphi_1) = 0$  или в тензорной форме  $(\tilde{\Phi}_1 + \tilde{\Phi}_2) = Z$  отвечает базису диагонального косинуса, или тригонометрическому базису. При том же условии все проективные тригонометрические функции и углы, а также все рефлекторы имеют ранее установленные канонические формы (§ 5.5). Зеркало срединного рефлектора (253) есть срединное подпространство тензорного угла, что наглядно видно на уровне рассмотренной  $2 \times 2$ -клетки. Аналогично представляются проективные секанс и тангенс.

## § 8.4. Генеральное синусное неравенство

Генеральное косинусное неравенство (396) для пары эквиранговых линейоров  $A_1$  и  $A_2$  служит далее определению *косинусных* тригонометрических норм. При  $r = 1$  оно есть геометрическое неравенство Коши в *модульной форме* для парной совокупности чисел. Последнее используется в аналитической геометрии с целью нормирования косинуса угла между двумя векторами в интервале  $[0 \div \pi/2]$ . В *знаковой* форме типа (141) неравенство Коши определяет косинусную меру угла между двумя направленными векторами в интервале  $[0 \div \pi]$ . Оно является частным случаем генерального косинусного неравенства (398). Изначально неравенство Коши имело чисто алгебраический характер.



Но тот же характер можно придать и вышеуказанным генеральным неравенствам (384), (386) и (396), (398), если их отнести непосредственно к скалярным элементам матриц. Генеральные косинусные неравенства суть произведения собственных неравенств Коши, согласно тригонометрическим спектрам в прямой сумме. В соответствии с (229), (230) для пары эквиванговых  $n \times \Gamma$ -линеоров имеет место *критерий внутренней мультипликации для констатации их хотя бы частичной ортогональности*:

$$\det C_{12} = \det (A_1' A_2) = 0 \leftrightarrow \{A_1 A_2'\}_{\cos} = 0. \quad (401)$$

С другой стороны, для определения тригонометрических норм *синусного* характера может применяться синусное отношение (135). Оно ненулевое для пары полно линейно независимых линеоров. В соответствии с (227), (228) для пары  $n \times \Gamma_1$ - и  $n \times \Gamma_2$ -линеоров имеет место *критерий внутренней мультипликации для констатации их хотя бы частичной параллельности, или частичной линейной зависимости* (аналог определителя Грама для набора векторов):

$$\det G_{1,2} = \det [(A_1|A_2)' \cdot (A_1|A_2)] = 0 \leftrightarrow \{|A_1|A_2\}_{\sin} = 0. \quad (402)$$

Конечно, тот же самый критерий можно применять к планарам  $\langle \text{im } A_1 \rangle$  и  $\langle \text{im } A_2 \rangle$  для констатации их хотя бы частичной параллельности. Синусное отношение (135) невырождено только для *полно линейно независимых линеоров*. Оно представляется аналогично косинусному в форме прямого произведения собственных синусных отношений (124), согласно соответствующему тригонометрическому спектру. Матрица-суперпозиция линеоров  $(A_1|A_2)$ , когда последние полно линейно независимы, имеет ранг  $(r_1 + r_2)$ . Её внешняя гомумультипликация есть симметричная положительно (полу)определённая  $n \times n$ -матрица  $B_{1,2} = [(A_1|A_2)' \cdot (A_1|A_2)']$ . С учётом (120) и (402) имеем:

$$k [B_{1,2}, (r_1 + r_2)] = \det G_{1,2} \geq 0. \quad (403)$$

Согласно (135), получаем:

$$\{|A_1|A_2\}_{\sin}^2 = \frac{k [B_{1,2}, (r_1 + r_2)]}{k (A_1 A_1', r_1) \cdot k (A_2 A_2', r_2)}. \quad (404)$$

С другой стороны, согласно (62), (159) и (163), для пары полно линейно независимых линеоров на подпространстве ненулевого  $\sin \tilde{\Phi}_{12}$  имеем:

$$\overleftarrow{\sin \tilde{\Phi}_{12}} = \overleftarrow{B}_{1,2} = \frac{K_2 [B_{1,2}, (r_1 + r_2)]}{k [B_{1,2}, (r_1 + r_2)]}, \quad (v' = 0 \rightarrow \text{rang} \{\sin \tilde{\Phi}_B\} = r_1 + r_2 \leq n.) \quad (405)$$

Тригонометрический спектр высшего матричного коэффициента 2-го рода (в числителе дроби) выражается ниже как в алгебраической сумме, так и в прямой сумме с использованием принципа бинарности (где  $v' = 0$ ).

$$K_2[B_{1,2}, (r_1 + r_2)] = \sum_{i=1}^{r_1 - v''} \vec{S}_i \cdot K_2[B_{1,2}, (r_1 + r_2)] \cdot \vec{S}_i + \vec{S}_d \cdot K_2[B_{1,2}, (r_1 + r_2)] \cdot \vec{S}_d. \quad (406)$$

Здесь проектор  $\vec{S}_d = \overrightarrow{\cos \Phi_{12}}$  проецирует ортогонально на дефектное подпространство пересечений:

$\langle \mathcal{P}_d \rangle \equiv \langle \langle \text{im } A_2 \cap \ker A_1 \rangle \cup \langle \text{im } A_1 \cap \ker A_2 \rangle \rangle$  размерности  $(r_2 - r_1 + 2v'')$ .

$$K_2[B_{1,2}, (r_1 + r_2)] = \sum_{i=1}^{r_1 - v''} \oplus \det [(A_1|A_2) \cdot (A_1|A_2)']_i^{2 \times 2} \cdot I_i^{2 \times 2} \oplus \quad (407)$$

$$\oplus \det [A_1 A_1']^{v'' \times v''} \cdot I^{v'' \times v''} \oplus \det [A_2 A_2']^{(r_2 - r_1 + v'') \times (r_2 - r_1 + v'')} \cdot I^{(r_2 - r_1 + v'') \times (r_2 - r_1 + v'')} \oplus$$

$$\oplus Z^{(n - r_1 - r_2) \times (n - r_1 - r_2)}.$$

Поясним некоторые выражения в формуле (407):

$[(A_1|A_2) \cdot (A_1|A_2)']_i^{2 \times 2}$  –  $2 \times 2$ -матрица ранга 2 (несингулярная), соответствующая  $i$ -ой тригонометрической клетке; для неё высший матричный коэффициент 2-го рода определяется, согласно (29), а высший скалярный коэффициент совпадает с детерминантом;

$[A_1 A_1']^{v'' \times v''}$  и  $[A_2 A_2']^{(r_2 - r_1 + v'') \times (r_2 - r_1 + v'')}$  – несингулярные матрицы, соответствующие в спектре подпространствам  $\langle \text{im } A_1 \cap \ker A_2 \rangle$  и  $\langle \text{im } A_2 \cap \ker A_1 \rangle$ ; для них высшие коэффициенты определяются аналогично;

$Z^{(n - r_1 - r_2) \times (n - r_1 - r_2)}$  – нулевой блок.

Ортопроектор на образ гомомультпликации  $B_{1,2}$  в прямой сумме имеет вид:

$$\overleftarrow{B}_{1,2} = \sum_{i=1}^{r_1 - v''} \oplus I_i^{2 \times 2} \oplus I^{(r_2 - r_1 + 2v'') \times (r_2 - r_1 + 2v'')} \oplus Z^{(n - r_1 - r_2) \times (n - r_1 - r_2)}. \quad (408)$$

Далее принято, что  $r_2 \geq r_1$ , как указано на рис. 2. Отметим, что для полно линейно независимых линеоров  $(r_1 + r_2) \leq n$  и  $v' = 0$ . Для  $i$ -й тригонометрической клетки, согласно (124), имеем:

$$0 \leq \sin^2 \varphi_i = \det [(A_1|A_2) \cdot (A_1|A_2)']_i^{2 \times 2} / \text{tr} [A_1 A_1']_i^{2 \times 2} \cdot \text{tr} [A_2 A_2']_i^{2 \times 2} \leq 1, \quad (409)$$

где  $\varphi_i$  – угол между планарами первого ранга  $\langle \text{im} [A_1 A_1']_i^{2 \times 2} \rangle$  и  $\langle \text{im} [A_2 A_2']_i^{2 \times 2} \rangle$ , как и в косинусном варианте (395).

Для установления генерального синусного неравенства остаётся, как и ранее, вычислить высший скалярный коэффициент. Он находится с учётом (407) и (409) в форме прямого произведения по тригонометрическим подпространствам:

$$\begin{aligned}
 k [B_{1,2}, (r_1 + r_2)] &= & (410) \\
 &= \prod_{i=1}^{r_1-v''} \det [(A_1|A_2) \cdot (A_1|A_2)]_i^{2 \times 2} \cdot \det [A_1 A_1']^{v'' \times v''} \cdot \det [A_2 A_2']^{(r_2-r_1+v'') \times (r_2-r_1+v'')} = \\
 &= \prod_{i=1}^{r_1-v''} \{\sin^2 \varphi_i \cdot \text{tr}[A_1 A_1']_i^{2 \times 2} \cdot \text{tr}[A_2 A_2']_i^{2 \times 2}\} \cdot \det[A_1 A_1']^{v'' \times v''} \cdot \det[A_2 A_2']^{(r_2-r_1+v'') \times (r_2-r_1+v'')} = \\
 &= \prod_{i=1}^{r_1-v''} \sin^2 \varphi_i \cdot k(A_1 A_1', r_1) \cdot k(A_2 A_2', r_2).
 \end{aligned}$$

(В этом произведении опускаются  $v''$  значений  $\sin^2 \varphi_i = 1$  при  $i > r_1 - v''$ .)

И, наконец, из (404) и (410) выводим *генеральное синусное неравенство* для пары  $n \times r_1$ - и  $n \times r_2$ -линеоров, причём при  $n > 2$  исключительно в *нормализованной* форме:

$$\begin{aligned}
 0 \leq \prod_{i=1}^{r_1-v''} \sin^2 \varphi_i = |\{A_1|A_2\}|_{\sin}^2 &= \frac{\mathcal{M}^2(r_1 + r_2) \{A_1 A_2'\}}{\mathcal{M}^2(r) A_1 \cdot \mathcal{M}^2(r) A_2} = \\
 &= |\mathcal{N}(r_1 + r_2) \sin \tilde{\Phi}_{12}| \leq 1. & (411)
 \end{aligned}$$

Здесь в крайних случаях:

$|\{A_1|A_2\}|_{\sin} = 0$  – для хотя бы частично параллельных линеоров,  
 $|\{A_1|A_2\}|_{\sin} = 1$  – для полно ортогональных линеоров.

Для пары эквиванговых линеоров и соответственно для тензорного угла между ними генеральные неравенства (396) и (411) можно объединить в парное тригонометрическое неравенство:

$$0 \leq \sqrt{|\{A_1 \cdot A_2\}|_{\cos}^2} + \sqrt{|\{A_1 \cdot A_2\}|_{\sin}^2} \leq 1. \quad (412)$$

Оно получается путём применения алгебраического неравенства Коши для средних арифметического и геометрического к квадратам собственных значений косинуса и синуса и суммирования обоих неравенств. Косинусное отношение может быть ненулевым только при исходном условии  $r_1 = r_2 = r$ . Синусное отношение может быть ненулевым только при  $2r \leq n$ . При этом знак равенства справа в (412) имеет место тогда и только тогда, когда  $|\varphi_i| = \text{const}$  ( $i = 1, \dots, r$ ). При  $r = 1$  (то есть для угла между двумя векторами или прямыми) соотношение (412) трансформируется в обычное равенство:  $\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1$ .

Пусть дана прямоугольная  $n \times r$ -матрица ранга  $r$ . Представим её путём произвольной разбивки в форме совокупности блок-столбцов:

$$A \equiv \{A_1 | A_2 | \dots | A_j\}.$$

Такой форме матрицы  $A$  соответствует некоторый полигранный тензорный угол, задаваемый гранями – линейорами  $A_1, A_2, \dots, A_j$ . В частности, это есть полирёберный угол, если разбивка осуществляется до вектор-столбцов. Последовательно применив к указанной форме матрицы  $A$  генеральное синусное неравенство, получаем в итоге

$$\text{Mt}(r) A \leq \text{Mt}(r_1) A_1 \cdot \text{Mt}(r_2) A_2 \cdot \dots \cdot \text{Mt}(r_j) A_j. \quad (413)$$

Причём знак равенства отвечает варианту взаимно-ортогональных линейоров (векторов). Соотношение (413) наиболее полно обобщает синусное неравенство Адамара. Кроме того, его частным случаем, применительно к теории решения линейного уравнения  $Ax = a$ , является тригонометрическая формула (122).

Все рассмотренные неравенства в исконной сферической трактовке имеют геометрический смысл применительно к евклидову или квазиевклидову пространству. С другой стороны, в псевдоевклидовом пространстве, используя сферическо-гиперболическую синус-тангенсную аналогию (§ 6.2), получаем секансные и тангенсные генеральные неравенства гиперболического типа для матричных объектов, заданных в универсальном базисе  $\tilde{E}_1$ . В свою очередь, обращая секансное неравенство, получаем неравенство-перевёртыш гиперболического типа косинусной природы. Далее эти неравенства из базиса  $\tilde{E}_1$  логично обобщаются на любые псевдодекартовы базисы с применением фундаментального рефлектор-тензора.

## Глава 9. Геометрические нормы матричных объектов

### § 9.1. Квадратичные нормы матричных объектов евклидова (квазиевклидова) пространства

Для любых принятых *геометрических* норм матриц или матричных объектов требуется, прежде всего, инвариантность по отношению к допускаемым геометрическим преобразованиям пространства. Например, последние в  $\langle Q^{n+q} \rangle$  задаются рефлектор-тензором. С другой стороны, в  $\langle \mathcal{E}^n \rangle$  подобной согласованности для этих преобразований не требуется, так как в нём рефлектор-тензор формально есть обычная единичная матрица. Поскольку оба пространства имеют одну и ту же *евклидову* метрику, то геометрические нормы, определённые в  $\langle \mathcal{E}^n \rangle$ , могут затем применяться и в  $\langle Q^{n+q} \rangle$ . В таких арифметических пространствах, например, для объектов ранга 1 вполне естественно применяется евклидова норма длины или протяжённости. В бинарных *тригонометрических* отношениях для объектов ранга 1 применяются евклидовы нормы косинуса и синуса, вытекающие из неравенств Коши и Адамара. Но для объектов большего ранга евклидова норма (или норма Фробениуса) имеет *первый порядок*, выделяющий её на *множестве* геометрических норм. Поэтому для объектов ранга  $g$  представляет особый интерес определить аналогичные нормы более высоких порядков – вплоть до ранга  $g$ . Выбор геометрических норм для  $g \times n$ -матрицы  $A$  или линеора возможен, в принципе, двумя способами.

По *первому способу* сначала вычисляют промежуточную норму для гомомультипликации  $A'A$  (в случае исходной симметричной матрицы – для квадрата  $S^2$ ). Она увязывается с её собственными значениями  $\sigma_i^2 > 0$ . Следовательно, чтобы далее произвести норму, относящуюся непосредственно к исходной матрице  $A$ , нужно из промежуточной нормы дополнительно извлечь положительный квадратный корень. По *второму способу* норму можно было бы сразу увязать с собственными значениями  $\sigma_i > 0$  матричного арифметического корня  $\sqrt{A'A}$  (для неотрицательной симметричной матрицы такой корень тождествен исходной матрице  $S$ ). Однако в общем случае вычисление матричного арифметического корня – довольно сложный и трудоёмкий процесс.

С учётом этого обстоятельства в данной работе применяется именно первый способ. Определяемые им геометрические нормы именуются как *квадратичные* ввиду того, что они теоретически базируются на совокупности собственных значений  $\sigma_i^2$  (хотя и опосредованно).

Так, для знакоопределённых симметричных матриц-функций  $\cos \Phi$ ,  $\sin \Phi$ ,  $\operatorname{tg} \Phi$  и  $\operatorname{sec} \Phi$  все тригонометрические квадратичные нормы теоретически увязывают с собственными значениями их квадратов  $\cos^2 \varphi_i$ ,  $\sin^2 \varphi_i$ ,  $\operatorname{tg}^2 \varphi_i$  и  $\operatorname{sec}^2 \varphi_i$ . Они же при таком квадратичном подходе одинаковы для тензорных тригонометрических функций проективного и моторного типа.

Предпосылками для корректного определения всех *квадратичных норм* являются ранее установленные геометрические аналогии типа (125), (127) – см. § 3.1, а также *генеральное неравенство средних величин* в части цепи (11) для средних алгебраических – см. § 1.2. Ранее анализ соотношений (125) и (127) показал, что коэффициенты Виета для гомомультипликаций матриц имеют вполне ясную геометрическую трактовку. Кроме того, получаемые из коэффициентов Виета малые медианы, согласно цепи (11) генерального неравенства средних величин, укладываются в некоторую иерархическую последовательность от порядка  $t$ . (Медианы, как средние величины, отмечаются чертой сверху.) С учётом этого определим *квадратичные геометрические нормы*  $r \times n$ -матриц порядка  $t$  и степени  $h$  через внутренние гомомультипликации как характеристики 2-х типов – *параметрические* и *иерархические*:

$$\|A\|_t^h = [\sqrt[t]{k(A'A,t)}]^h > 0, \tag{414}$$

$$\overline{\|A\|_t^h} = [\sqrt[t]{k(A'A,t)/C_r^t}]^h > 0. \tag{415}$$

В частности,

$$\|B\|_n^n = \sqrt{\det(B'B)} = |\det B| = \overline{\|B\|_n^n},$$

$$\|B\|_t^t = \sqrt{k(B'B,t)}, \quad \overline{\|B\|_t^t} = \sqrt{k(B'B,t)/C_r^t},$$

$$\|A\|_r^r = \sqrt{\det(A'A)} = \mathcal{M}_r(r) A = \overline{\|A\|_r^r}.$$

Параметрические нормы выражают геометрические параметры объектов. *Генеральная норма*, по определению, имеет порядок  $r$ , равный рангу матрицы. Она при  $h = r$  – *минорант* матрицы (параметр объёма – § 3.1.) *Генеральные тригонометрические нормы* в степени 1 для тензорного косинуса и синуса (проективных и моторных) определяются аналогично:

$$0 \leq \|\cos \Phi_{12}\|_n^1 = \sqrt[2n]{\det \cos^2 \Phi_{12}} = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{r-v'} \cos^2 \varphi_i} = \sqrt[n]{\{A_1 \cdot A_2\}_{\cos}^2} \leq 1, \tag{416}$$

$$\begin{aligned}
 0 \leq \|\sin \Phi_{12}\|_{r_1+r_2}^1 &= {}^{2(r_1+r_2)}\sqrt{\mathcal{D}(r_1+r_2) \sin^2 \Phi_{12}} = \sqrt{\prod_{i=1}^{(r_1+r_2)} \sin^2 \varphi_i} = \\
 &= {}^{(r_1+r_2)}\sqrt{\{A_1 \cdot A_2\}_{\sin}^2} \leq 1.
 \end{aligned} \tag{417}$$

Они также имеют максимальный порядок – ранги тензорных косинуса и синуса. Эти нормы характеризуют бинарные тензорные углы  $\Phi_{12}$  и  $\Phi_{12}$  (проективный и моторный) между линейорами  $A_1$  и  $A_2$  или между планарами  $\langle \text{im } A_1 \rangle$  и  $\langle \text{im } A_2 \rangle$  (дополняемый по определению между планарами  $\langle \ker A_1' \rangle$  и  $\langle \ker A_2' \rangle$ ). В свою очередь, скалярная характеристика:

$$0 \leq \|\cos \Phi_B\|_n^1 = \sqrt{\{B\}_{\cos}^2} \leq 1 \tag{418}$$

есть генеральная тригонометрическая норма в степени 1 для косинуса бинарных тензорных углов  $\Phi_B$  и  $\Phi_B$  (проективного и моторного) между между планарами  $\langle \text{im } B \rangle$  и  $\langle \text{im } B' \rangle$  (дополняемый по определению между планарами  $\langle \ker B \rangle$  и  $\langle \ker B' \rangle$ ).

Все вышеуказанные геометрические нормы формально при порядке  $t > \text{rang}\{\dots\}$  суть нулевые, а при порядке  $t = 0$  суть единичные.

Согласно рекуррентной формуле Варинга – Леверье прямого типа или системе уравнений Ньютона (§ 1.1), имеется только  $\Gamma$  независимых геометрических норм. Именно все нормы типа (414) и (415) полностью охарактеризовывают геометрические свойства линейного матричного объекта ранга  $\Gamma$ , согласно *полному* набору его геометрических инвариантов. Параметрическая геометрическая норма порядка 1 и степени 1 есть норма Фробениуса, характеризующая параметр протяжённости):

$$\|A\|_1^1 = \sqrt{\text{tr}(A'A)} = \sqrt{\sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^r a_{jk}^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^r \sigma_i^2} = \|A\|_F > 0. \tag{419}$$

(То же справедливо для евклидовой нормы векторов.)

С другой стороны, отметим, что если бы нормы определялись, согласно второму способу (см. выше), из собственных значений  $\sqrt{A'A}$ , то тогда нормы Фробениуса и Евклида являлись *степенными* нормами порядка  $\theta = 2$ :

$$\sqrt[\theta]{S_\theta(\sigma_i)} = \sqrt[\theta]{\sum_{i=1}^r \sigma_i^\theta} \quad (\theta = \overline{1, r}).$$

Соответствующий им полный набор *алгебраических* норм тогда бы имел вид:

$$\|\sqrt{A'A}\|_t^1 = \sqrt[t]{s_t(\sigma_i)} = \sqrt[t]{k(\sqrt{A'A}, t)} \quad (t = \overline{1, r}).$$

Тождественность обоих способов определения норм (при одних и тех же их параметрах) имеет место только для норм высшего порядка, то есть для генеральных норм:

$$\|A\|_r^1 = {}^{2r}\sqrt{s_r(\sigma_i^2)} = {}^{2r}\sqrt{\det(A'A)} = {}^r\sqrt{\text{Мт}(r)A} = {}^r\sqrt{s_r(\sigma_i)} = {}^r\sqrt{\det \sqrt{A'A}}.$$

(В частности, это имеет место для евклидовой нормы при  $r = 1$ .) Однако в общем случае при  $t \leq r$  для вычисления норм по второму способу, как уже указывалось, потребовалось бы сначала найти матричный арифметический корень через  $\sigma_i$ . По первому способу нормы вычисляются *опосредствованно* через скалярные характеристические коэффициенты той же внутренней гомомultiпликации  $A'A$ . В этом суть различия обоих подходов и, как отмечалось ранее, – причина выбора именно первого способа определения геометрических норм.

Норма Фробениуса, или норма порядка 1 и степени 1 есть инвариант длины. Генеральная норма – минорант, или норма порядка  $r$  и степени  $r$  есть инвариант объёма ранга  $r$ . Характеристика  $\|A\|_r^1 = \|\sqrt{A}\|_r^1$  есть инвариант степени 1 этого объёма, или генеральная иерархическая норма – малая медиана (§ 1.1). Геометрические нормы  $\|\sqrt{A}\|_r^1$  – малые медианы находятся в иерархии, соответствующей цепи (11) генерального неравенства средних величин. Геометрическая сущность вышеуказанных общих норм трактуется исходя из соотношений (127) как характеристика  $t$ -мерных объёмов и, в частности, при  $t = 1$  как характеристика длины, а генеральной нормы – из соотношения (125) как характеристика  $r$ -мерного объёма. *Иерархические квадратичные тригонометрические* нормы порядка 1 определяются аналогичным образом:

$$\overline{\|\cos \Phi\|_1^1} = \sqrt{\frac{\text{tr} \cos^2 \Phi}{n}}, \quad \overline{\|\sin \Phi\|_1^1} = \sqrt{\frac{\text{tr} \sin^2 \Phi}{n}}.$$

С учётом (182), (261) и (208), (264) имеем:

$$\overline{\|\cos \Phi\|_1^2} + \overline{\|\sin \Phi\|_1^2} = 1 = \overline{\|\sec \Phi\|_1^2} - \overline{\|\text{tg} \Phi\|_1^2}. \quad (420)$$

Квадратичные тригонометрические нормы *высшего* порядка выражаются формулами (416), (417). Если цепь (11) генерального неравенства средних величин состоит из усреднённых инвариантов какой-либо тензорной тригонометрической функции, то тогда его же цепь (12) содержит обращённые усреднённые инварианты мультипликативно обратной тригонометрической функции. Очевидно, что иерархические инварианты косинуса и синуса заключены в интервале  $[0 \div 1]$ , а секанса и тангенса в интервалах:  $[1 \div \infty]$  и  $[0 \div \infty]$ .



## § 9.2. Определение абсолютных и относительных геометрических норм

Рассмотрим определение и имманентные свойства разнообразных геометрических норм матричных объектов. Пусть  $A$  есть комплексная  $n \times m$ -матрица, представляющая алгебраически либо одновалентный тензор в пространстве  $\langle \mathcal{A}^n \rangle$  при  $m \leq n$ , либо двухвалентный тензор в пространстве  $\langle \mathcal{A}^{n \times n} \rangle$  при  $m = n$  как некие геометрические объекты. Дадим следующее определение.

*Вещественная скалярная функциональная характеристика  $\|A\|_t^h$  от элементов матрицы  $A$  ранга  $r$  есть определённая абсолютная геометрическая норма порядка  $t$  и степени  $h$ , если она удовлетворяет следующим условиям ( $0 \leq t \leq m$ ):*

- (a)  $\|A\|_t^h = [ \|A\|_t^1 ]^h > 0$  при  $1 \leq t \leq r$ ,
- (a')  $\|A\|_0^h = 1$  при  $t = 0$ ,
- (a'')  $\|A\|_t^h = 0$  при  $t > r$ ;
- (b)  $\|c \cdot A\|_t^h = |c|^h \cdot \|A\|_t^h$ ,
- (c)  $\|A\|_t^h = \|U_1 \cdot A \cdot U_2\|_t^h$ ,
- (d)  $\|A\|_t^h = \|A^*\|_t^h$ .

Данному определению отвечают *определённые* нормы (414) – (419). Если же в условии (a) знак  $>$  заменить на знак  $\geq$ , то тогда аналогичная функциональная числовая характеристика есть *полуопределённая* абсолютная геометрическая норма порядка  $t$  и степени  $h$ . Последняя применяется исключительно для квадратных матриц  $B$ , представляющих алгебраически 2-валентный тензор, в т. ч. как мультипликацию линейоров. Полуопределённые нормы обозначаются  $\{|B\}|_t^h$ . Приведём примеры:

$$\{|B\}|_t^t = |k(B, t)| \geq 0. \quad (421)$$

$$\{|B\}|_r^r = |k(B, r)| \geq 0, \quad \{|B\}|_n^n = |\det B|, \quad \{|B\}|_1^1 = |\operatorname{tr} B|.$$

В свою очередь, *относительная норма* того же порядка и степени образуется через отношение полуопределённой и определённой абсолютных геометрических норм. Она применяется также для квадратных матриц и имеет *тригонометрическую природу*, являясь при этом всегда безразмерной характеристикой. Например, это может быть косинусное и синусное отношения матриц, введённые ранее в гл. 3. Однако пока что порядок относительных норм отвечал только рангу матриц. В общем виде эти нормы определяются как генеральные ( $t = r$ ) и частные ( $t < r$ ).

### § 9.3. Геометрический смысл частных квадратичных норм

Далее на примере косинусного отношения рассматриваются относительные нормы *частных* порядков и их связь с абсолютными нормами. Генеральные косинусные неравенства (396), (398) и соответствующие им косинусные отношения имеют обобщённые квазианалоги для порядков  $t < r$ . Пусть даны  $n \times r$ -линеоры  $A_1$  и  $A_2$ . Выделим в каждом из них взаимные субматрицы столбцов размера  $n \times t$  с одним и тем же набором номеров столбцов:  $\{A_1\}_j$  и  $\{A_2\}_j$ , где  $j = 1, \dots, C_r^t$ . Далее расположим вертикально и по порядку эти взаимные субматрицы отдельно для линеоров  $A_1$  и  $A_2$ . При этом исходные  $A_1$  и  $A_2$  преобразуются в пару *ранжированных* линеоров размера  $n \cdot C_r^t \times t$  и ранга  $t$ . Для каждой пары взаимных субматриц столбцов имеют место косинусные неравенства типа (396), (398):

$$-1 \leq \det \{A_1'A_2\}_j / \sqrt{\det (A_1'A_1)_j} \cdot \sqrt{\det (A_2'A_2)_j} \leq +1,$$

где в числителе представлен один из диагональных миноров матрицы  $\{A_1'A_2\}$  порядка  $t$ , соответствующий внутренней мультипликации взаимных субматриц столбцов  $\{A_1\}_j$  и  $\{A_2\}_j$ . Отсюда, суммируя числители и знаменатели всех частных неравенств, получаем объединённое частное неравенство:

$$-1 \leq \frac{\sum_{j=1}^{C_r^t} \det \{A_1'A_2\}_j}{\sum_{j=1}^{C_r^t} \sqrt{\det (A_1'A_1)_j} \cdot \sqrt{\det (A_2'A_2)_j}} \leq +1.$$

Положительный знаменатель преобразуется далее без его уменьшения с использованием геометрического неравенства Коши для парной совокупности положительных чисел:

$$-1 \leq \frac{\sum_{j=1}^{C_r^t} \det \{A_1'A_2\}_j}{\sqrt{\sum_{j=1}^{C_r^t} \det (A_1'A_1)_j} \cdot \sqrt{\sum_{j=1}^{C_r^t} \det (A_2'A_2)_j}} \leq +1.$$

Используя (120) и (121), отсюда получаем *частное квазикосинусное неравенство* в знаковой форме:

$$-1 \leq \frac{k(A_1'A_2, t)}{\sqrt{k(A_1'A_1, t)} \cdot \sqrt{k(A_2'A_2, t)}} = \frac{k(A_1A_2', t)}{\sqrt{k(A_1A_1', t)} \cdot \sqrt{k(A_2A_2', t)}} \leq +1. \quad (422)$$

В свою очередь, квазикосинусное неравенство в незнаковой форме задаёт относительную норму:

$$0 \leq \frac{|\{A_1 \cdot A_2'\}_t|^t}{\|A_1\|_t^t \cdot \|A_2\|_t^t} \leq 1. \quad (423)$$

Тригонометрическая сущность квазикосинусного отношения как нормы порядка  $t < \gamma$  устанавливается, согласно схеме его вывода, и относится непосредственно к ранжированным линеорам. Для 1-го порядка имеют место частные неравенства:

$$-1 \leq \frac{\text{tr}(A_1' A_2)}{\sqrt{\text{tr}(A_1' A_1)} \cdot \sqrt{\text{tr}(A_2' A_2)}} = \frac{\text{tr}(A_1 A_2')}{\sqrt{\text{tr}(A_1 A_1')} \cdot \sqrt{\text{tr}(A_2 A_2')}} \leq +1, \quad (424)$$

$$0 \leq \frac{|\{A_1 \cdot A_2'\}_1|^1}{\|A_1\|_1^1 \cdot \|A_2\|_1^1} \leq 1. \quad (425)$$

Именно отсюда для нормы Фробениуса, применительно к паре исходных  $n \times \gamma$ -линеоров, следуют классические неравенства параллелограмма и треугольника:

$$\left| \|A_1\|_1^1 - \|A_2\|_1^1 \right| \leq \|A_1 \pm A_2\|_1^1 \leq \|A_1\|_1^1 + \|A_2\|_1^1, \quad (426)$$

$$\|A_1 + A_2\|_1^1 \leq \|A_1\|_1^1 + \|A_2\|_1^1. \quad (427)$$

Эти неравенства имеют линейный характер. Они демонстрируют природу нормы Фробениуса для линеоров как инварианта протяжённости. Но, строго говоря, частные косинусные характеристики (424), (425), неравенства (426), (427) и сами нормы Фробениуса относятся к линеорам  $A_1$  и  $A_2$  при  $\gamma > 1$  только опосредовано – через пару ранжированных  $n \times \gamma$ - векторов  $\mathbf{a}_1$  и  $\mathbf{a}_2$ :

$$\|A_1\|_1^1 = \|\mathbf{a}_1\|_E, \quad \|A_2\|_1^1 = \|\mathbf{a}_2\|_E, \quad \|A_1 \pm A_2\|_1^1 = \|\mathbf{a}_1 \pm \mathbf{a}_2\|_E;$$

$$\text{tr}(A_1' \cdot A_2) = \text{tr}(A_1 \cdot A_2') = \mathbf{a}_1' \cdot \mathbf{a}_2.$$

В частности, теорема Пифагора для норм Фробениуса имеет место тогда и только тогда, когда ортогональны именно ранжированные векторы:

$$\left. \begin{aligned} \|A_1 \pm A_2\|_1^2 &= \|A_1\|_1^2 + \|A_2\|_1^2, \\ \text{tr}(A_1' \cdot A_2) &= 0 = \mathbf{a}_1' \cdot \mathbf{a}_2. \end{aligned} \right\} \quad (428)$$

Аналогичным образом, частные квазикосинусные отношения (422), (423) как относительные нормы применяются к линеорам  $A_1$  и  $A_2$  только опосредовано – через пару ранжированных линеоров (с точки зрения их тригонометрического смысла).

### § 9.4. Линеоры специальных видов и простейшие линеорные фигуры

Выявим в *евклидовом линеорном пространстве* специальные множества централизованных эквиранговых линеоров. Согласно (130), линеор представляется в форме квазиполярного разложения:

$$A = Rq \cdot |A|,$$

где  $|A| = \sqrt{A'A}$  – матричный евклидов модуль линеора. Здесь имеется аналогия с таким же представлением вектора:  $\mathbf{a} = \mathbf{e} \cdot |\mathbf{a}|$ , где  $|\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a}' \cdot \mathbf{a}} = \|\mathbf{a}\|_E$ . Матричный модуль линеора играет ту же роль, что и скалярный модуль вектора, но для набора единичных векторов  $\{\mathbf{e}_i\} = Rq$ . Последние задают приведённые базисные ортогональные оси линеора.

$$\overleftarrow{AA'} = \overleftarrow{Rq \cdot Rq'} = Rq \cdot Rq', \quad Rq' \cdot Rq = I, \quad Rq' = Rq^+;$$

$$\overleftarrow{A_2 A_1'} = \overleftarrow{Rq_2 Rq_1'} = \sec \tilde{\Phi}_{12} \cdot Rq_1 Rq_1' = Rq_2 Rq_2' \cdot \sec \tilde{\Phi}_{12} =$$

$$= Rq_2 Rq_2' \cdot \sec^2 \Phi_{12} \cdot Rq_1 Rq_1' \text{ – см. также формулы (133), (186), (187).}$$

Каждый линеор формально принадлежит собственному базисному плану:  $A \in \langle \text{im } A \rangle$ . Эквиранговые линеоры, имеющие один и тот же базисный планар  $\langle \text{im } A \rangle$ , образуют полное множество *колпланарных линеоров* (по отношению к плану  $\langle \text{im } A \rangle$ ). В частности, при  $r = 1$  это есть множество *коллинеарных векторов*. Колпланарность для пары эквиранговых линеоров определяется условием (153). Полное множество эквиранговых *колпланарных линеоров* задаётся параметрически через свободную  $r \times r$ -матрицу  $C$  ( $\det C \neq 0$ ) исходя из тождества:

$$\overleftrightarrow{(AC)} \cdot \overleftrightarrow{(AC)'} = \overleftrightarrow{AA'}. \quad (429)$$

В частности, на этом множестве всегда имеется *квази-ортогональный* линеор  $Rq \in \langle \text{im } A \rangle$ . (Заметим, что выполнение более “широкого” условия (154) соответствовало бы множеству *колпланарных линеоров* относительно планара  $\langle \text{im } A_1 \rangle$ .) Для колпланарных линеоров имеет место определяющее инвариантное соотношение:

$$Rq \cdot Rq' = \text{Const} = \overleftarrow{AA'}.$$

Выявим на множестве колпланарных линеоров подмножество эквиранговых *коаксиальных линеоров* исходя из более строгого определяющего соотношения  $Rq = \text{Const} = \{\mathbf{e}_i\}$ , то есть:

$$Rq_1 = Rq_2 = \dots = Rq \rightarrow \overleftarrow{A_1 A_1'} = \overleftarrow{A_2 A_2'} = \dots = \overleftarrow{AA'}.$$

Они отличаются только матричным модулем. Для пары коаксиальных линейоров имеют место простые модульные соотношения:

$$|A_1 \pm A_2|^2 = [|A_1| \pm |A_2|]^2,$$

$$A_1' \cdot A_2 = |A_1| \cdot |A_2| = (A_2' \cdot A_1)'.$$

Ротационная сферическая матрица  $\text{Rot } \Phi_{12}$ , в т. ч. получаемая из (245), транслирует линейор  $A_1$  в линейор  $A_2$ . Причём оба линейора задают собственные множества колпланарных линейоров:

$$\text{Rot } \Phi_{12} \cdot A_1 = A_2; \quad A_1 \in \langle \text{im } A_1 C \rangle, \quad A_2 \in \langle \text{im } A_2 C \rangle.$$

где  $\Phi_{12}$  – моторный сферический угол между планарами  $\langle \text{im } A_1 \rangle$  и  $\langle \text{im } A_2 \rangle$  ранга  $r$ . Следовательно, с учётом (429) и (301) любая пара эквивалентных линейоров из этих множеств связана соотношениями типа:

$$A_{2'} = \text{Rot } \Phi_{12} \cdot A_{1'} \cdot C_1, \quad A_{2'} \cdot C_2 = \text{Rot } \Phi_{12} \cdot A_{1'}, \quad (430)$$

где внутреннее линейное преобразование  $C$  вычисляется после внешней ротации  $\text{Rot } \Phi_{12}$ . Далее на этой основе определим *сферически ротационно конгруэнтные между собой линейоры*  $A_1$  и  $A_2$ :

$$A_2 = \text{Rot } \Phi_{12} \cdot A_1 \rightarrow |A_1| = |A_2|. \quad (431)$$

Для пары таких линейоров имеем модульные соотношения:

$$|A_1 \pm A_2|^2 = 4 \cdot A_1' \cdot \frac{1 \pm \cos \Phi_{12}}{2} \cdot A_1, \text{ или}$$

$$|A_1 + A_2|^2 = 4 \cdot A_1' \cdot \sin^2 \frac{\Phi_{12}}{2} \cdot A_1,$$

$$|A_1 - A_2|^2 = 4 \cdot A_1' \cdot \cos^2 \frac{\Phi_{12}}{2} \cdot A_1.$$

Эта пара образует  $2r$ -мерный линейорный ромб сферического типа. В т. ч. центральные эквимодульные векторы всегда сферически конгруэнтны. Если  $\Phi_{12} = \pi/2$ , то пара линейоров образует линейорный квадрат:

$$|A_1 + A_2| = \sqrt{2} \cdot |A_1| = \sqrt{2} \cdot |A_2|.$$

В свою очередь, сферически ортогональный рефлексор  $\{\sqrt{1}\}_S$ , получаемый из (247), согласно (301), тоже транслирует линейор  $A_1$  во множество линейоров, колпланарных на  $\langle \text{im } A_2 \rangle$ . Причём оба линейора задают те же собственные множества колпланарных линейоров.

$$\{\sqrt{1}\}_S \cdot A_1 \in \langle \text{im } A_2 \rangle.$$

Следовательно, с учётом (429) и (301) любая пара эквианговых линеоров из вышеуказанных множеств связана соотношением типа

$$A_{2'} = \{\sqrt{I}\}_S \cdot A_{1'} \cdot C_1, \quad A_{2'} \cdot C_2 = \{\sqrt{I}\}_S \cdot A_{1'}, \quad (432)$$

где внутреннее линеорное преобразование  $C$  вычисляется после внешней рефлексии  $\{\sqrt{I}\}_S$ . Аналогично определим *сферически зеркально конгруэнтные между собой линеоры*  $A_1$  и  $A_2$ :

$$A_2 = \{\sqrt{I}\}_S \cdot A_1 \rightarrow |A_1| = |A_2|. \quad (433)$$

Для пары таких линеоров имеет место модульное соотношение

$$|A_1 \pm A_2|^2 = 4 \cdot A_1' \cdot \frac{I \pm \{\sqrt{I}\}_S}{2} \cdot A_1.$$

Здесь, в частности, можно использовать собственные *ортoprojectоры*, согласно формулам (253).

Таким образом, из эквианговых линеоров, как и из векторов, формально возможно составлять разнообразные геометрические фигуры, обладающие теми или иными свойствами. Линеорное евклидово или квазиевклидово пространство, как и векторное, имеет валентность 1.

Нетрудно также определить псевдоевклидовы (гиперболические) аналоги вышерассмотренных линеоров специального вида и простейших линеорных геометрических фигур, используя при этом рефлектор-тензор и гиперболические варианты тензорных тригонометрических функций и рефлекторов. В свою очередь, псевдоевклидовы модули – матричные и скалярные геометрических объектов определяются с применением во внутренних мультипликациях линеоров фундаментального рефлектор-тензора пространства.

## Глава 10. Варианты комплексификации тензорной тригонометрии

### § 10.1. Адекватный вариант

Комплексные *сферические* углы вообще, то есть в *проективном* и в *моторном* вариантах, выражаются через сферические и гиперболические вещественные углы в виде:

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\Psi} &= \tilde{\Phi} + i\tilde{\Gamma}, \\ \Psi &= \Phi + i\Gamma, \end{aligned} \right\} (\psi_j = \varphi_j + i\gamma_j). \quad (434)$$

В *комплексном евклидовом пространстве* тензорная тригонометрия воплощается в результате адекватной комплексификации (§ 4.2). *Проективный* тензорный угол в транспонированной форме выражается как  $\tilde{\Psi}' = \tilde{\Phi} - i\tilde{\Gamma}$  (так как  $\tilde{\Phi}' = \tilde{\Phi}$ ,  $\tilde{\Gamma}' = -\tilde{\Gamma}$ ). *Моторный* тензорный угол в транспонированной форме выражается как  $\Psi' = -\Phi + i\Gamma$  (так как  $\Phi' = -\Phi$ ,  $\Gamma' = \Gamma$ ). Все геометрические понятия и формулы, кроме норм и неравенств, сохраняют свой прежний вид и значение. В частности, при вычислении миноранта и тензорного модуля используется простое транспонирование. Адекватный модуль для комплексных чисел  $\pm c$  одинаков и вычисляется через их квадрат с использованием формулы Муавра (то есть вполне универсальным способом):

$$\begin{aligned} \pm c &= \pm \rho \cdot (\cos \alpha + i \cdot \sin \alpha), \text{ где } 0 \leq \alpha < \pi; \\ (\pm c)^2 &= c^2 = \rho^2 \cdot (\cos 2\alpha + i \cdot \sin 2\alpha) = \rho^2 \cdot (\cos \beta + i \cdot \sin \beta), \text{ где } 0 \leq \beta < 2\pi; \\ |\pm c| &= |c| = \rho \cdot (\cos \beta/2 + i \cdot \sin \beta/2) = \rho \cdot (\cos \alpha + i \cdot \sin \alpha). \end{aligned} \quad (435)$$

В частности, отсюда видно, что сохраняется соотношение  $|c|^2 = c^2$ . Адекватный матричный евклидов модуль  $|A| = \sqrt{A'A}$  для матрицы  $A$  (§ 9.4) вычисляются через промежуточную диагонализацию её внутренней гомомultiпликации посредством комплексного ортогонального модального преобразования:

$$R'A'A'R = D\{A'A\} = \{\sigma_j^2\}, \text{ где } \sigma_j^2 = \rho_j^2 \cdot (\cos \beta_j + i \cdot \sin \beta_j) = |\sigma_j|^2, \\ \text{где } 0 \leq \beta_j < 2\pi.$$

Откуда через формулу Муавра имеем:

$$|\sigma_j| = \rho_j \cdot (\cos \beta_j / 2 + i \cdot \sin \beta_j / 2), \quad |A| = R \cdot \{|\sigma_j|\} \cdot R'.$$

В частности, сохраняется соотношение  $|A|^2 = A'A$ . В адекватном варианте все геометрические характеристики, в том числе углы и их функции, распадаются на вещественную и мнимую составляющие, хотя конечные (целевые) характеристики представляются в наиболее удобной форме. Адекватный вариант в простейшем случае применяется в комплексной евклидовой геометрии на плоскости, включая скалярную тригонометрию. Комплексное тождество (142) – скалярный аналог синусно-косинусного тождества Лагранжа для пары векторов сохраняет форму.

### § 10.2. Эрмитов вариант

В эрмитовом пространстве осуществляется эрмитова комплексификация вещественной евклидовой геометрии (§ 4.3). *Проективный сферический* тензорный угол – эрмитова матрица  $\tilde{\mathbf{E}} = \tilde{\Phi} + i\tilde{\Gamma} = \tilde{\mathbf{E}}^*$ . Её собственные значения суть вещественные сферические скалярные углы  $\varepsilon_j$ . Напротив, *моторный сферический* тензорный угол – косо-эрмитова матрица  $\mathbf{E} = \Phi + i\Gamma = -\mathbf{E}^*$ . Модуль и евклидова норма в эрмитовом варианте тождественны. Тригонометрические неравенства (гл. 8) и нормы матричных объектов (гл. 9) сохраняют свое значение в эрмитизированных вариантах. Заметим также, что *принцип бинарности* (§ 5.6) остаётся в силе как при адекватной, так и при эрмитовой комплексификации, поскольку все необходимые предпосылки для него в комплексной тензорной тригонометрии сохраняются.

Эрмитовы анало-ги клеточных формул (399), (400) получаются через соответствующие преобразования комплексных единичных векторов:

$$\mathbf{u}_1 = \begin{vmatrix} \cos \alpha_1 \\ \sin \alpha_1 \end{vmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{vmatrix} \cos \alpha_2 \\ \sin \alpha_2 \end{vmatrix}.$$

Здесь  $\cos \alpha \cdot \overline{\cos \alpha} + \sin \alpha \cdot \overline{\sin \alpha} = 1$ ;

$$\cos \alpha = \cos \varepsilon \cdot \exp(i\beta_c), \quad \sin \alpha = \sin \varepsilon \cdot \exp(i\beta_s),$$

$$\cos \alpha \cdot \overline{\cos \alpha} = \cos^2 \varepsilon, \quad \sin \alpha \cdot \overline{\sin \alpha} = \sin^2 \varepsilon.$$

$$[\cos \tilde{\mathbf{E}}_{12}]^{2 \times 2} = \overleftarrow{\mathbf{u}}_1 \cdot \mathbf{u}_1^* + \overleftarrow{\mathbf{u}}_2 \cdot \mathbf{u}_2^* - I^{2 \times 2} = \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1^* + \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_2^* - I^{2 \times 2} =$$

$$= \begin{vmatrix} \cos \alpha_1 \cdot \overline{\cos \alpha_1} + \cos \alpha_2 \cdot \overline{\cos \alpha_2} - 1 & \cos \alpha_1 \cdot \overline{\sin \alpha_1} + \cos \alpha_2 \cdot \overline{\sin \alpha_2} \\ \overline{\cos \alpha_1} \cdot \sin \alpha_1 + \overline{\cos \alpha_2} \cdot \sin \alpha_2 & \overline{\sin \alpha_1} \cdot \sin \alpha_1 + \overline{\sin \alpha_2} \cdot \sin \alpha_2 - 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} +|c_1| & \overline{s_1} \\ s_1 & -|c_1| \end{vmatrix},$$



$$-\det [\cos \tilde{\mathcal{E}}_{12}]^{2 \times 2} = |c_1|^2 + s_1 \cdot \bar{s}_1 = \cos^2 (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) - \Delta = \cos^2 \varepsilon_{12},$$

$$\Delta = 1/2 \sin 2\varepsilon_1 \cdot \sin 2\varepsilon_2 \cdot (1 - \cos \beta_{c_1} \cdot \cos \beta_{c_2} \cdot \cos \beta_{s_1} \cdot \cos \beta_{s_2}).$$

$$[\sin \tilde{\mathcal{E}}_{12}]^{2 \times 2} = \overleftarrow{\mathbf{u}}_2 \cdot \mathbf{u}_2^* - \overleftarrow{\mathbf{u}}_1 \cdot \mathbf{u}_1^* = \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_2^* - \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1^* =$$

$$= \frac{\cos \alpha_2 \cdot \overline{\cos \alpha_2} - \cos \alpha_1 \cdot \overline{\cos \alpha_1}}{\cos \alpha_2 \cdot \sin \alpha_2 - \overline{\cos \alpha_1} \cdot \sin \alpha_1} \cdot \frac{\cos \alpha_2 \cdot \overline{\sin \alpha_2} - \cos \alpha_1 \cdot \overline{\sin \alpha_1}}{\overline{\sin \alpha_2} \cdot \sin \alpha_2 - \overline{\sin \alpha_1} \cdot \sin \alpha_1} = \frac{-|s_2|}{c_2} \cdot \frac{\bar{c}_2}{+|s_2|},$$

$$-\det [\sin \tilde{\mathcal{E}}_{12}]^{2 \times 2} = |s_2|^2 + c_2 \cdot \bar{c}_2 = \sin^2 (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) + \Delta = \sin^2 \varepsilon_{12},$$

$$\Delta = 0 \leftrightarrow \cos \beta_{c_1} \cdot \cos \beta_{c_2} \cdot \cos \beta_{s_1} \cdot \cos \beta_{s_2} = 1 \leftrightarrow \varepsilon_{12} = \varepsilon_2 - \varepsilon_1, \Delta \neq 0 \leftrightarrow \varepsilon_{12} \neq \varepsilon_2 - \varepsilon_1. \quad (436)$$

В тригонометрическом базисе имеем клеточные формы:

$$[\cos \tilde{\mathcal{E}}_{12}]^{2 \times 2} = \cos \varepsilon_{12} \cdot \begin{bmatrix} +1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad [\sin \tilde{\mathcal{E}}_{12}]^{2 \times 2} = \sin \varepsilon_{12} \cdot \begin{bmatrix} 0 & +1 \\ +1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (437), (438)$$

В эрмитовом варианте все канонические W-формы в тригонометрическом базисе вещественны и сохраняют свой прежний вид. Преобразование к каноническим W-формам осуществляет унитарная модальная матрица  $U_W$ . На эрмитовой плоскости в базисе диагонального косинуса допускается эрмитово угловое смещение между парными функциями (косинус-синус, секанс-тангенс) с фазовым углом  $\beta$ :

$$\begin{array}{c} \text{Exp}(-i\beta/2) \quad \text{Ref}\{B^* \cdot B\}_r \quad \text{Exp}(+i\beta/2) \quad \text{Ref}\{B^* \cdot B\}_c \\ \begin{bmatrix} \exp(-\frac{i\beta}{2}) & 0 \\ 0 & \exp(\frac{i\beta}{2}) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} +\cos \varepsilon & \sin \varepsilon \\ \sin \varepsilon & -\cos \varepsilon \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \exp(\frac{i\beta}{2}) & 0 \\ 0 & \exp(-\frac{i\beta}{2}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +\cos \varepsilon & \sin \varepsilon \cdot \exp(-i\beta) \\ \sin \varepsilon \cdot \exp(i\beta) & -\cos \varepsilon \end{bmatrix} \end{array} \quad (439)$$

$$\begin{array}{c} \text{Exp}(-i\beta/2) \quad \text{Rot}\{\mathcal{E}\}_r \quad \text{Exp}(+i\beta/2) \quad \text{Rot}\{\mathcal{E}\}_c \\ \begin{bmatrix} \exp(-\frac{i\beta}{2}) & 0 \\ 0 & \exp(\frac{i\beta}{2}) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos \varepsilon & -\sin \varepsilon \\ +\sin \varepsilon & \cos \varepsilon \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \exp(\frac{i\beta}{2}) & 0 \\ 0 & \exp(-\frac{i\beta}{2}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varepsilon & -\sin \varepsilon \cdot \exp(-i\beta) \\ +\sin \varepsilon \cdot \exp(i\beta) & \cos \varepsilon \end{bmatrix} \end{array} \quad (440)$$

Поэтому эрмитов тригонометрический базис, помимо диагональности косинуса (как прежде), должен обеспечивать ещё и вещественность W-формы. Эрмитово угловое смещение с фазовым углом  $\beta$ , на каждой собственной эрмитовой плоскости устраняется специальным эрмитово ортогональным (унитарным) модальным преобразованием  $\text{Exp } i\beta/2$  с приведением в итоге тригонометрических функций к вещественным каноническим формам.

Эрмитовы аналоги неравенств Коши и Адамара (косинусной и синусной природы) и синусно-косинусное тождество (142) реализуются для координат пары векторов в эрмитовом пространстве с заменой простого транспонирования на эрмитово (с симметризацией скалярного произведения). Эрмитов сферический угол вообще есть весьма сложная функция координат объектов. Но при переводе в тригонометрический базис он приобретает вещественную каноническую форму.

### § 10.3. Псевдоизация в бинарных комплексных пространствах

Далее особое значение имеет псевдоизация (гл. 4). Пусть изначально задано *бинарное комплексное аффинное пространство с индексом q*. Оно обозначается как  $\langle \mathcal{A}^{n+q} \rangle_c$ . В конкретном базисе аффинное пространство может рассматриваться как линейное. В частности,  $\langle \mathcal{A}^{n+q} \rangle_c$  в некотором псевдоединичном базисе  $\tilde{E}_0$  представляется прямой суммой, состоящей из n-мерного вещественного и q-мерного мнимого линейных подпространств (см. ранее в §§ 5.9 и 6.1 для евклидовых пространств):

$$\langle \mathcal{A}^{n+q} \rangle_c \equiv \langle \mathcal{A}^n \rangle \oplus \langle i\mathcal{A}^q \rangle \equiv \text{CONST.} \quad (441)$$

Здесь постоянны, во-первых, суммарное пространство и, во-вторых, размерности слагаемых подпространств. В  $\langle \mathcal{A}^{n+q} \rangle_c$  допускаются такие линейные преобразования V, которые сохраняют бинарную структуру:

$$\begin{matrix} & V & & \tilde{E}_0 & & \tilde{E} \\ \begin{matrix} V_{11} & i \cdot V_{12} \\ i \cdot V_{21} & V_{22} \end{matrix} & \cdot & \begin{matrix} I^{n \times n} & Z^{n \times q} \\ Z^{q \times n} & \pm i \cdot I^{q \times q} \end{matrix} & = & \begin{matrix} V_{11} & \pm V_{12} \\ i \cdot V_{21} & \pm i \cdot V_{22} \end{matrix} & (\det V_{jk} \neq 0). \end{matrix} \quad (442)$$

Первые n столбцов матриц базисов задают  $\langle \mathcal{A}^n \rangle$ , остальные q столбцов задают  $\langle i\mathcal{A}^q \rangle$ . Соответственно модальная матрица  $V^{-1}$  (с той же матричной структурой) приводит какой-либо бинарный базис  $\tilde{E}$  к простейшей диагональной (псевдоединичной) форме  $\tilde{E}_0$ . Кроме того, она осуществляет *пассивное* модальное преобразование координат линейного элемента:  $\mathbf{z}\{\tilde{E}\} = V \cdot \mathbf{z}\{\tilde{E}_0\}$ .

*Бинарные комплексные базисы* во взаимных тригонометрических формах представляется псевдоединичными матрицами как *правый* и *левый*:

$$\tilde{E}_{01} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \cdot \tilde{E}_1 = R_{c1} \cdot \{I\}, \quad \tilde{E}_{02} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \cdot \tilde{E}_1 = R_{c2} \cdot \{I\} = R_{c1}^{-1} \cdot \{I\}. \quad (443), (444)$$

В любом бинарном комплексном базисе  $\tilde{E}$  линейный элемент пространства, как и само пространство в целом, представляется прямой суммой, состоящей из вещественной и мнимой аффинных проекций:

$$\mathbf{z} = \mathbf{x} \oplus i\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ i\mathbf{y} \end{bmatrix}. \quad (445)$$

Ввиду аффинности пространства  $\langle \mathcal{A}^{n+q} \rangle_{\mathbb{C}}$  в нём допускается операция трансляции на линейный элемент (445). Применение правого начального базиса  $\tilde{\mathbf{E}}_{01}$  в (443) целесообразно для представления канонических форм тригонометрических матриц (§ 5.9) в *псевдогиперболическом* варианте тензорной тригонометрии с собственными углами  $-i\varphi_j$ . Он же тождествен базису в (271). Левый начальный базис  $\tilde{\mathbf{E}}_{02}$  в (444) формально представляет канонические формы тригонометрических матриц в *псевдосферическом* варианте тензорной тригонометрии с собственными углами  $+i\gamma_j$ . Он же тождествен базису, обратному (271). Оба базиса суть взаимные. Имеем для обоих вариантов модальные преобразования:

$$\sqrt{\mathbf{I}^{\oplus}}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos \varphi_j & -\sin \varphi_j \\ \sin \varphi_j & \cos \varphi_j \end{bmatrix} \cdot \sqrt{\mathbf{I}^{\oplus}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \operatorname{ch}(-i\varphi_j) & \operatorname{sh}(-i\varphi_j) \\ \operatorname{sh}(-i\varphi_j) & \operatorname{ch}(-i\varphi_j) \end{bmatrix},$$

что отвечает преобразованию (322) из  $\tilde{\mathbf{E}}_1 = \{\mathbf{I}\}$ ;

$$\sqrt{\mathbf{I}^{\oplus}} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \operatorname{ch} \gamma_j & \operatorname{sh} \gamma_j \\ \operatorname{sh} \gamma_j & \operatorname{ch} \gamma_j \end{bmatrix} \cdot \sqrt{\mathbf{I}^{\oplus}}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos i\gamma_j & -\sin i\gamma_j \\ \sin i\gamma_j & \cos i\gamma_j \end{bmatrix},$$

что отвечает преобразованию (323) из  $\tilde{\mathbf{E}}_1 = \{\mathbf{I}\}$ .

Кроме того, базис (444) целесообразен, как исходный, для изложения псевдоевклидовой геометрии, но в форме *комплексного* квазиевклидова изоморфизма. А именно, введём для комплексных линейных элементов (445) бинарного аффинного пространства  $\langle \mathcal{A}^{n+q} \rangle_{\mathbb{C}}$ , выраженных в базисе (444), скалярное произведение с единичным метрическим тензором:

$$\mathbf{z}_1' \cdot \mathbf{z}_2 = \mathbf{x}_1' \cdot \mathbf{x}_2 - \mathbf{y}_1' \cdot \mathbf{y}_2.$$

Пространство трансформируется в *комплексное квазиевклидово* индекса  $q$ , соосно-ориентированное и как бы с *евклидовой метрикой*, что в двумерном варианте впервые осуществил Пуанкаре в геометрической версии СТО [39]! Как бинарное, оно представляется прямой и сферически ортогональной суммой вещественного и мнимого евклидовых подпространств:

$$\langle \mathcal{Q}^{n+q} \rangle_{\mathbb{C}} \equiv \langle \mathcal{E}^n \rangle \oplus \langle i\mathcal{E}^q \rangle \equiv \text{CONST}, \quad (446)$$

где знак  $\oplus$  обозначает здесь как бы *сферически ортогональную сумму*.

Пространство задают рефлектор-тензор  $\Gamma^{\oplus}$ , определяющий допустимые преобразования, и как бы *евклидова метрика* – комплексно-бинарная!

## Глава 11. Тригонометрия общих псевдоевклидовых пространств

### § 11.1. Овеществление бинарного евклидова пространства

Далее применим к бинарному комплексному квазиевклидову пространству с бинарной евклидовой метрикой  $\langle Q^{n+q} \rangle_c$  (§§ 6.1 и 10.3) модальное преобразование (443), т. е. эквивалентное (271) и обратное к (444), овеществляющее преобразование, в том числе его комплексного единичного базиса опять в вещественный единичный базис  $\tilde{E}_1 = \{I\}$ :

$$\sqrt{I^{\oplus}} \cdot \tilde{E}_{02} = \tilde{E}_1 = \{I\}. \quad (\mathbf{z}_{02} = \sqrt{I^{\oplus}} \cdot \mathbf{u}) \quad (447)$$

Оно выходит за пределы множества допустимых ортогональных модальных преобразований исходного квазиевклидова пространства, так как  $\sqrt{I^{\oplus}} \cdot \sqrt{I^{\oplus}} \neq I$ . Но пространство преобразуется изометрично! Результат – переход в вещественное псевдоевклидово пространство  $\langle P^{n+q} \rangle$  индекса  $q$  и с рефлектор-тензором и он же метрический тензор  $I$ . Скалярное произведение элементов после преобразования сохраняется:

$$\mathbf{z}_{02}' \cdot \mathbf{z}_{02} = (\sqrt{I^{\oplus}} \cdot \mathbf{u})' \cdot (\sqrt{I^{\oplus}} \cdot \mathbf{u}) = \mathbf{u}' \cdot I^{\oplus} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{u}' \cdot (I^{\oplus})^{-1} \cdot \mathbf{u} = \text{const}. \quad (448)$$

Исходный линейный элемент сначала выражен в псевдодеклартовом базисе  $\tilde{E}_1 = \{I\}$  и обозначается как « $\mathbf{u}$ ». Если новый базис  $\tilde{E}$  связан с  $\tilde{E}_1$  каким-то линейным преобразованием  $V$ , заданным тоже в  $\{I\}$ , но не согласованным тригонометрически (см. § 5.6) с рефлектор-тензором  $I^{\oplus}$ , то имеем:

$$\tilde{E}_1 = \sqrt{I^{\oplus}} \cdot \tilde{E}_{02}, \quad \tilde{E} = V \cdot \tilde{E}_1, \quad (449)$$

$$\mathbf{w} = V^{-1} \cdot \mathbf{u} = V^{-1} \cdot \sqrt{I^{\oplus}}^{-1} \cdot \mathbf{z}_{02} = \{\sqrt{I^{\oplus}} \cdot V\}^{-1} \cdot \mathbf{z}_{02}. \quad (450)$$

Матрицы  $2 \times 2$  пассивных преобразований идут в *прямом* порядке, как это осуществляется при последовательных модальных преобразованиях, заданных исходно в единичном базисе. Скалярное произведение в базисе  $\tilde{E}$  в этом случае то же, но для этого метрический тензор в нём изменяется

$$\mathbf{z}_{02}' \cdot \mathbf{z}_{02} = [\sqrt{I^{\oplus}} \cdot V \cdot \mathbf{w}]' \cdot [\sqrt{I^{\oplus}} \cdot V \cdot \mathbf{w}] = \mathbf{w}' \cdot \{V' \cdot I^{\oplus} \cdot V\} \cdot \mathbf{w}. \quad (451)$$

Тот же линейный элемент  $\mathbf{z}_{02}$  выражен в  $\tilde{E}$  и обозначается как « $\mathbf{w}$ ». В скобках осуществляется пассивное преобразование его координат. Ввиду несогласованности преобразования  $V$  с метрическим тензором  $I^{\oplus}$  последний претерпевает общее конгруэнтное преобразование:

$$G^{\oplus} = V' \cdot I^{\oplus} \cdot V = G^{\oplus}'. \quad (452)$$

Такой метрический тензор и он же рефлектор-тензор формально действует в криволинейных координатах *некоторого пространства с переменной метрикой* как функцией  $G^{\oplus}(\mathbf{w})$  от его точечного элемента. *Оригинальное базовое  $\langle P^{n+q} \rangle$  здесь сохраняется!* Взаимный метрический тензор выражается в виде:

$$\hat{G}^{\oplus} = V^{-1} \cdot I^{\oplus} \cdot V^{-1'} = \{G^{\oplus}\}^{-1}. \quad (453)$$

В свою очередь, геометрия с *постоянным* метрическим тензором (452) изометрична псевдоевклидовой геометрии с теми же параметрами размерностей  $n$  и  $q$ . Она по сути есть линейное отображение последней во множестве допустимых аффинных базисов:

$$\langle \tilde{E}_{af} \rangle \equiv \langle T_{af} \rangle \cdot \tilde{E}, \quad (454)$$

где формально действует метрический тензор  $G^{\oplus}$ .

$$T'_{af} \cdot V' \cdot I^{\oplus} \cdot V \cdot T_{af} = T'_{af} \cdot G^{\oplus} \cdot T_{af} = G^{\oplus}. \quad (455)$$

Из (455) следует, что  $\det T_{af} = \pm 1$ . Исходя из последнего, зададим далее *группу аффинных непрерывных тригонометрических преобразований*  $\langle T_{af} \rangle$  (без рефлексий), соответствующую тензору  $G^{\oplus}$ , в виде условий:

$$T'_{af} \cdot G^{\oplus} \cdot T_{af} = G^{\oplus} = \text{Const}, \quad (\det T_{af} = +1). \quad (456)$$

Как видно из (448),  $I^{\oplus}$  тождествен *взаимному* аналогу, что говорит о тождестве в  $\langle P^{n+q} \rangle$  контравариантных и ковариантных координат. Общее условие для этого:  $G = G' = G^{-1} \leftrightarrow G = \{\sqrt{|I|}\}_S$ .

## § 11.2. Группа псевдоевклидовых ротаций

Положим в (452)  $V = R$  – сферически ортогональное преобразование, тоже *не согласованное тригонометрически* (см. §§ 5.6 и 6.3) с рефлектор-тензором  $I^{\oplus}$ . Согласно (247) и (330), *оно обратно по смыслу*  $R_w$ . Имеем :

$$R' \cdot I^{\oplus} \cdot R = \{\sqrt{|I|}\}_S, \quad [R_w = (R)^{-1}] = R' \quad (457)$$

где  $\{\sqrt{|I|}\}_S = \{\sqrt{|I|}\}_S^{-1}$  обозначает (см. § 6.3) по сути рефлектор-тензор *не соосно ориентированного* пространства (а также метрический тензор псевдоевклидова пространства).

Группа *ротационных* тригонометрических преобразований  $\langle T \rangle$  в нём задаётся с учётом (456) в виде условий:

$$\left. \begin{aligned} T' \cdot \{\sqrt{I}\}_S \cdot T = \{\sqrt{I}\}_S = T \cdot \{\sqrt{I}\}_S \cdot T' \text{ Const,} \\ \det T = +1. \end{aligned} \right\} \quad (458)$$

Тензор (457) является упрощённым случаем метрического тензора псевдориманова пространства, обеспечивающим именно квадратичную метрику (без линейных искажений). Так, (457) формально действует в не соосно ориентированном псевдоевклидовом пространстве, задаваемом срединным рефлектором угла  $\tilde{\Gamma}$ , если  $R = R'_w$ ,  $\tilde{E} = R'_w \cdot \tilde{E}_1 = \{R'_w\}'_{\tilde{E}_1}$ . В этом пространстве осуществляется гиперболическая интерпретация косогональных проекторов из § 2.1. Допустимые тригонометрические преобразования в псевдоевклидовом пространстве задаются равнозначно внутренней и внешней мультипликацией, что эквивалентно тождественности конравариантных и ковариантных координат:

$$\left. \begin{aligned} T' \cdot \{\sqrt{I}\}_S \cdot T = \{\sqrt{I}\}_S &\leftrightarrow \\ T' \cdot \{\sqrt{I}\}_S \cdot T \cdot \{\sqrt{I}\}_S = I &\leftrightarrow \\ T' \cdot \{\sqrt{I}\}_S \cdot T \cdot \{\sqrt{I}\}_S \cdot T' = T' &\leftrightarrow \\ \{\sqrt{I}\}_S \cdot T \cdot \{\sqrt{I}\}_S \cdot T' = I &\leftrightarrow \\ T \cdot \{\sqrt{I}\}_S \cdot T' = \{\sqrt{I}\}_S. & \end{aligned} \right\} \quad (459)$$

(Соответствующий аналог в евклидовом пространстве:  $R' \cdot R = R \cdot R' = I$ .)

Положив в (452)  $V = I$ , возвращаемся в соосно-ориентированное псевдоевклидово пространство с метрическим рефлектор-тензором  $I^{\oplus}$ . Группа ротационных тригонометрических преобразований  $\langle T \rangle$  в нём задаётся с учётом (458), (459) в виде условий:

$$\left. \begin{aligned} T' \cdot I^{\oplus} \cdot T = I^{\oplus} = T \cdot I^{\oplus} \cdot T' = \text{Const,} \\ \det T = +1. \end{aligned} \right\} \quad (460)$$

Она известна как группа однородных непрерывных преобразований Лоренца. Установим изоморфную связь между группами аффинных  $\langle T_{af} \rangle$  и ротационных  $\langle T \rangle$  тригонометрических преобразований:

$$\begin{aligned} (V^{-1} \cdot T \cdot V)' \cdot \{V' \cdot I^{\oplus} \cdot V\} \cdot (V^{-1} \cdot T \cdot V) = \{V' \cdot I^{\oplus} \cdot V\}, \\ T_{af} = V^{-1} \cdot T \cdot V. \end{aligned} \quad (461)$$

Эта формула показывает, что обе группы подобны. Группа  $\langle T \rangle$  является трансляцией  $\langle T_{af} \rangle$  из аффинных базисов  $\{T_{af}\}$  в псевдодекартовы базисы  $\{T\}$ . Квази-евклидовым аналогом  $\langle T_{af} \rangle$  – см. (350) является группа:

$\langle T_{af} \rangle \equiv \langle V^{-1} \cdot [\text{Rot } \Phi \cdot \text{Rot } \Theta] \cdot V \rangle$  в квазиевклидовой тригонометрии (§ 5).

(Тригонометрические функции в ней выражаются в аффинной форме.)

Общее псевдоевклидово пространство в конкретном псевдодекартовом базисе (любом) представляется *гиперболически ортогональной суммой*, состоящей из двух вещественных евклидовых подпространств:

$$\langle P^{n+q} \rangle \equiv \langle \mathcal{E}^n \rangle \oplus \langle \mathcal{E}^q \rangle \equiv \text{CONST} . \quad (462)$$

Здесь и далее знак  $\oplus$  обозначает гиперболически ортогональное суммирование по отношению к базису и метрическому рефлексор-тензору. Например,  $\langle \text{im } B_p \oplus \ker B_p \rangle \equiv \langle P^{r+(n-r)} \rangle$  по отношению к тензору  $\text{Ref} \{ \cos \tilde{\Phi}_{B_p} \}^{\ominus} = \text{Ref} \{ \text{ch } \tilde{\Gamma}_{B_p} \}^{\ominus}$ . Согласно (462), псевдоевклидово пространство имеет бинарную структуру, задаваемую  $I^{\ominus}$  и конкретным псевдодекартовым базисом. Одновалентный тензор в этом пространстве расщепляется на две гиперболически ортогональные проекции – на  $\langle \mathcal{E}^n \rangle$  и на  $\langle \mathcal{E}^q \rangle$ . Двухвалентные тензоры расщепляются на пару однородных проекций  $n \times n$  (бипроекция на  $\langle \mathcal{E}^n \rangle$ ) и  $q \times q$  (бипроекция на  $\langle \mathcal{E}^q \rangle$ ) и пару смешанных проекций  $n \times q$  и  $q \times n$ . В частности, при  $q = 1$  это суть  $n \times n$ -тензор, скаляр и пара векторов. Для одновалентных тензоров определяются внутренняя и внешняя мультипликации:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{a}_1' \cdot I^{\ominus} \cdot \mathbf{a}_2 = c_{12}, \\ A_1' \cdot I^{\ominus} \cdot A_2 = C_{12}. \end{aligned} \right\} \quad (463)$$

$$\left. \begin{aligned} \sqrt{I^{\ominus}} \cdot T \cdot \{ \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2' \} \cdot T' \cdot \sqrt{I^{\ominus}} = B_{12}, \\ \sqrt{I^{\ominus}} \cdot T \cdot \{ A_1 A_2' \} \cdot T' \cdot \sqrt{I^{\ominus}} = B_{12}. \end{aligned} \right\} \quad (464)$$

Как тут видно, указанные мультипликации транслируются именно в исходное бинарное комплексное евклидово пространство (446). Вследствие этого они применимы в формулах евклидовой геометрии, включая её тензорную тригонометрию. В частности, применяя к этим мультипликациям соотношения (120), (121), получаем псевдоаналоги данных формул:

$$\left. \begin{aligned} c_{12} = \text{tr } B_{12}, \quad \mathbf{a}' \cdot I^{\ominus} \cdot \mathbf{a} = \text{tr} \{ \sqrt{I^{\ominus}} \cdot T \cdot \{ \mathbf{a} \mathbf{a}' \} \cdot T' \cdot \sqrt{I^{\ominus}} \}, \\ k(C_{12}, t) = k(B_{12}, t), \quad k[(A' \cdot I^{\ominus} \cdot A), t] = k\{ (\sqrt{I^{\ominus}} \cdot T \cdot A A' \cdot T' \cdot \sqrt{I^{\ominus}}), t \}. \end{aligned} \right\} \quad (465)$$

Для допустимых бинарных векторных и линейных объектов в псевдоевклидовом пространстве все указанные скалярные характеристики являются по сути соответствующими псевдонормами.

При  $t = r$  определяются псевдоминорант и псевдодианаль:

$$\mathcal{M}_r^2(r) A = k\{ (\sqrt{I^{\ominus}} \cdot T \cdot A A' \cdot T' \cdot \sqrt{I^{\ominus}}), r \} = \det(A' \cdot I^{\ominus} \cdot A), \quad (466)$$

$$\mathcal{M}(r) B_{12} = k(B_{12}, r) = \det C_{12}.$$

Одновалентные тензорные объекты *псевдоортогональны*, если  $C_{12} = Z$  ( $c_{12} = 0$ ), – по аналогии с (155) – и хотя бы частично псевдоортогональны, если  $\det C_{12} = 0$ , – по аналогии с (229). Сферическая ортогональность может иметь место между объектами, находящимися оба в  $\langle \mathcal{E}^n \rangle$  или оба в  $\langle \mathcal{E}^q \rangle$ . Гиперболическая ортогональность может иметь место между объектами, находящимися порознь в  $\langle \mathcal{E}^n \rangle$  и в  $\langle \mathcal{E}^q \rangle$ . Множество *универсальных базисов* (352) тождественно множеству согласованных с тензором  $I^{\oplus}$  ортосферических ротационных матриц:

$$\left. \begin{aligned} \langle \tilde{E}_{1u} \rangle &\equiv \langle \text{Rot } \Theta \rangle \cdot \{I\} \equiv \langle \{\text{Rot } \Theta\} \rangle, \\ \text{Rot}' \Theta \cdot I^{\oplus} \cdot \text{Rot } \Theta &= I^{\oplus} = \text{Rot } \Theta \cdot I^{\oplus} \cdot \text{Rot}' \Theta. \end{aligned} \right\} \quad (467)$$

Любые согласованные с метрическим рефлектор-тензором ротации и рефлекторы не изменяют ни внутренние мультипликации (463), ни собственные углы между линейными объектами (векторами, линеорами, планарами). Заметим, что рефлекторы в  $\langle P^{n+q} \rangle$  могут быть сферически, гиперболически и псевдоевклидово ортогональными (как и ротации).

Линейное централизованное, относительно, например, базиса  $\tilde{E}_1$ , псевдоевклидово пространство по отношению к метрике распадается на 3 характеристических подпространства. Первое из них – разделительная коническая гиперповерхность, или *изотропный* конус 2-го порядка:

$$\rho^2 = \sum_{s=1}^n x_s^2 - \sum_{t=1}^q y_t^2 = \mathbf{u}' \cdot I^{\oplus} \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (\text{для тензора } I^{\oplus}),$$

$$\rho^2 = \mathbf{u}' \cdot G^{\oplus} \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (\text{для тензора } G^{\oplus} = \text{Const}).$$

Тут  $\rho^2$  есть данный квадратичный метрический инвариант. Как отсюда видно, на конусе метрика везде нулевая. Вершина изотропного конуса находится в начале координат. Его образующие – центральные прямые срединные лучи. В свою очередь, изотропный конус как гиперповерхность разделяет пространство на две части (примем далее, что  $n \geq q$ ). Это изотропная внешняя полость конуса, где  $\rho^2 > 0$ . (Внешняя полость – объединённое множество всех  $\langle \mathcal{E}^{n(k)} \rangle$ .) И это изотропная внутренняя полость конуса, где  $\rho^2 < 0$ . (Внутренняя полость – объединённое множество всех  $\langle \mathcal{E}^{q(k)} \rangle$ .) Отсюда  $\langle P^{n+q} \rangle$  в целом изотропно.

При  $q = 1$ , а именно в пространстве Минковского, внутренняя полость как геометрический объект распадается ещё на 2 части. Как принято в СТО, это верхняя внутренняя полость, или конус будущего – с положительным направлением оси  $\vec{y}$  и это нижняя внутренняя полость, или конус прошлого – с отрицательным направлением оси  $\vec{y}$ . В данном случае линейное подпространство  $\langle \mathcal{E}^q \rangle$  вырождается в направленную ось  $\vec{y}$  (в СТО – стрела времени). Кроме того, во внешней



и внутренней полостях могут содержаться множества задаваемых пар из одно- и дву- полостных гиперboloидов Минковского I и II – радиусов  $\rho$  и  $i\rho$  и соответственно с конкретными инвариантами  $\rho^2 > 0$  и  $\rho^2 < 0$ .

В псевдоевклидовом пространстве метрические инварианты первой степени (гл. 9) и метрика, либо вещественные (вне конуса), либо мнимые (внутри конуса), либо нулевые (на конусе). При  $q = 1$  вещественные инварианты определяются также как *пространству подобные*; мнимые инварианты определяются также как *времени подобные* (как принято в СТО). Если пространство в целом мнимонизировать, то в итоге получим антипсевдоевклидово пространство с изоморфизмом обоих пространств.

Собственные углы в ротациях (460), в их W-формах, или аналогичные углы между линейными объектами – вещественные величины, но либо сферические ( $\theta_k$ ), либо гиперболические ( $\gamma_j$ ). Покажем это, исходя из ротационных матриц (460) самой простой структуры, согласованной с знакопостоянными и знакопеременными частями рефлектор-тензора  $I^{\oplus}$ . В диагональных формах обеих ротаций таких нетривиальных структур нет. Однако в W-формах таковыми структурами являются только два чистых ротационных тригонометрических типа, изученные ранее в гл. 5 и 6:

$$T = \{\text{Rot}(\pm \Theta)\}_{\text{can}} \longleftrightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline \cos \theta_k & \mp \sin \theta_k \\ \hline \pm \sin \theta_k & \cos \theta_k \\ \hline \end{array} \longleftrightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline \pm 1 & 0 \\ \hline 0 & \pm 1 \\ \hline \end{array}, \quad (468)$$

$$T = \{\text{Roth}(\pm \Gamma)\}_{\text{can}} \longleftrightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline \text{ch } \gamma_j & \pm \text{sh } \gamma_j \\ \hline \pm \text{sh } \gamma_j & \text{ch } \gamma_j \\ \hline \end{array} \longleftrightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline \pm 1 & 0 \\ \hline 0 & \mp 1 \\ \hline \end{array}. \quad (469)$$

Из этих прародительских структур с модальным преобразованием  $R'_W$  порождаются два *чистых* типа ротационных матриц T, выражаемых в базисе своего задания, – ортосферические и гиперболические, см. (349)–(352), например, с рефлектор-тензором  $\sqrt{I}_S$ , как в (458):

$$\left. \begin{array}{l} R'_W \cdot \{\text{Rot } \Theta\}_{\text{can}} \cdot R'_W = \text{Rot } \Theta = T_{(1)}, \\ T_{(1)}' \cdot T_{(1)} = I = T_{(1)} \cdot T_{(1)}', \quad \det T_{(1)} = +1; \end{array} \right\} \quad (470)$$

$$\left. \begin{array}{l} R'_W \cdot \{\text{Roth } \Gamma\}_{\text{can}} \cdot R'_W = \text{Roth } \Gamma = T_{(2)}, \\ T_{(2)} = T_{(2)}', \quad \det T_{(2)} = +1. \end{array} \right\} \quad (471)$$

Заметим, что применение тут модальной матрицы, несогласованной с тензором  $I^{\oplus}$ , приводит к изменению последнего, т.е. к нарушению (460), и

возврату к (458). Следовательно, группа  $\langle T \rangle$  включает как чистые типы две существующие разновидности, но теперь уже общих ротационных матриц бинарной тригонометрической структуры:  $\text{Rot } \Theta$  и  $\text{Roth } \Gamma$  (гл. 6). Формально матрицы в преобразовании  $T$  могут образовывать какую-либо последовательность из частных сферических и гиперболических ротаций, выраженных в своём единичном базисе:

$$T = \dots \cdot \text{Rot } \Theta_{(t-1)t} \cdot \text{Roth } \Gamma_{(t-1)t} \cdot \dots \quad (472)$$

Однако все частные ротации *на уровне своих W-форм* должны быть тригонометрически согласованы с тензором  $I^{\oplus}$ . Данное согласование, имея ввиду структуры ротационных матриц (или тензорных объектов), означает следующее. Ортосферические ротации, согласно (468), должны отвечать либо положительной, либо отрицательной единичным частям тензора, либо быть необходимо коммутативным произведением обеих:

$\text{Rot } \Theta$		-----	$I^{\oplus}$		
$\text{Rot } \Theta^{n \times n}$	$Z^{n \times q}$		$I^{n \times n}$	$Z^{n \times q}$	
$Z^{q \times n}$	$\text{Rot } \Theta^{q \times q}$		$Z^{q \times n}$	$-I^{q \times q}$	(473)

Гиперболические ротации, согласно (469), своими тригонометрическими клетками должны отвечать двум равным блокам, взятым из положительной и отрицательной единичных частей рефлектор-тензора. В частности, при  $q = 1$  они имеют элементарные формы (363), (364).

### § 11.3. Полярное представление псевдоевклидовых ротаций

Любое линейное *непрерывное* геометрическое преобразование-ротация в пределах одной из вышеуказанных полостей изотропного конуса всегда сводится к какому-то тригонометрическому преобразованию из группы ротаций  $\langle T \rangle$ . При этом в универсальном базисе общее преобразование (460) через *полярное представление* сводится к произведению одной гиперболической и одной ортосферической ротационных матриц:

$$T = \text{Roth } \Gamma \cdot \text{Rot } \Theta = \text{Rot } \Theta \cdot \text{Roth } \bar{\Gamma}, \quad (474), (475)$$

где  $\text{Roth } \Gamma = \sqrt{TT'} = \sqrt{\text{Roth } 2 \Gamma} = \text{Roth}' \Gamma == \text{Roth}^{-1}(-\Gamma),$

$$\text{Roth } \bar{\Gamma} = \sqrt{T'T} = \sqrt{\text{Roth } 2 \bar{\Gamma}},$$

$$\text{Rot } \Theta = \sqrt{TT'}^{-1} \cdot T = \text{Roth}(-\Gamma) \cdot T = T \cdot \sqrt{T'T}^{-1} = T \cdot \text{Roth}(-\bar{\Gamma}) = \text{Rot}'(-\Theta),$$

$$\text{Roth } \bar{\Gamma} = \text{Rot}' \Theta \cdot \text{Roth } \Gamma \cdot \text{Rot } \Theta = \text{Rot}(-\Theta) \cdot \text{Roth } \Gamma \cdot \text{Rot } \Theta. \quad (476)$$

*Полярное представление соответствует определению  $\langle P^{n+q} \rangle$  в (351)!*

Полярное представление выводится в двух взаимосвязанных формах:

$$T = S \cdot R \rightarrow TT' = S^2, T' T = R' \cdot S^2 \cdot R = R' \cdot TT' \cdot R \rightarrow T = \sqrt{TT'} \cdot R = R \cdot \sqrt{T' T}$$

$$(T' T = R' \cdot TT' \cdot R \rightarrow \sqrt{T' T} = R' \cdot \sqrt{TT'} \cdot R), \det T = +1 \rightarrow \det R = +1 \rightarrow R = \text{Rot } \Theta;$$

$$(460), (267), (325) \rightarrow (TT') \cdot I^{\oplus} \cdot (TT') = I^{\oplus} = (T' T) \cdot I^{\oplus} \cdot (T' T) \rightarrow (471) \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} \rightarrow TT' = \text{Roth } 2\Gamma, \sqrt{TT'} = \text{Roth } \Gamma (\det S = +1) \rightarrow (474). \\ \rightarrow T' T = \text{Roth } 2\bar{\Gamma}, \sqrt{T' T} = \text{Roth } \bar{\Gamma} \rightarrow (475) \rightarrow (476), \end{cases}$$

где квадратные корни *тригонометрические*, или здесь арифметические (§ 5.6).

Отметим, что в силу (476),  $\Gamma$  и  $\bar{\Gamma}$  имеют один и тот же спектр  $\langle \gamma_j \rangle$ . Далее полярное представление–произведение общего ротационного преобразования применяется для упрощённого описания многоступенчатых гиперболических ротаций и, в частности, таковых релятивистских движений в СТО, а также многоступенчатых движений во внешних и во внутренних сферической и гиперболической геометриях. Заметим, что в полярном представлении модального линейного преобразования  $T$

$$T = \sqrt{TT'} \cdot R = S_1 \cdot R = (S_1 \cdot R \cdot S_1^{-1}) \cdot S_1 = R \cdot \sqrt{T' T} = R \cdot S_2 = (R \cdot S_2 \cdot R') \cdot R \quad (477, 478)$$

матрицы  $S_1$  и  $S_2$  выражены в координатах единичного псевдоевклидова базиса  $\check{E}_1 = \{1\}$ . В этом исходном базисе они являются самостоятельными симметричными преобразованиями. По геометрической сути полярного представления модальные преобразования действуют в своих базисах: симметричное  $S_1$  в базисе  $\check{E}_1 = \{1\}$ , симметричное  $S_2$  в базисе  $\check{E}_{1u} = R \cdot \check{E}_1$ . Поэтому преобразование  $S_2$  нужно также транслировать из координат базиса  $\check{E}_1$  в координаты базиса  $\check{E}_{1u}$ , то есть в преобразование  $S_1$ , что отображается в представлении (478), где матрица  $S_2$  в произведении выражается в базисе своего действия. Если же использовать матрицы преобразований в координатах базиса  $\check{E}_1$ , где они были заданы, то тогда их последовательность в полярном представлении становится *обратной*, отображаемое исходно в (477). В этом заключается различие между этими формами. Тот же смысл наглядно проявляется при *пассивном* преобразовании координат какого-то элемента  $\mathbf{u}^{(1)}$  в базисе  $\check{E}_1$ :

$$\mathbf{u} = T^{-1} \cdot \mathbf{u}^{(1)} = (R \cdot S_2)^{-1} \cdot \mathbf{u}^{(1)} = S_2^{-1} \cdot R^{-1} \cdot \mathbf{u}^{(1)} = (R' \cdot S_1 \cdot R)^{-1} \cdot (R' \cdot \mathbf{u}^{(1)}). \quad (479)$$

где каждое из обратных преобразований действуют в своих базисах.

В линейном псевдоевклидовом пространстве выделим множество равных псевдоевклидовых базисов  $\langle \Gamma \cdot \check{E}_1 \rangle$ . Все они ротационно конгруэнтны. Переход из  $\check{E}_1$  к новому базису  $\check{E}$ , согласно (474), (475), представляется в двух тождественных полярных формах:

$$\tilde{E} = T \cdot \tilde{E}_1 = \text{Roth } \Gamma \cdot \text{Rot } \Theta \cdot \tilde{E}_1 = (\text{Roth } \Gamma \cdot \text{Rot } \Theta \cdot \text{Roth}^{-1} \Gamma) \cdot \text{Roth } \Gamma \cdot \tilde{E}_1, \quad (480)$$

$$\tilde{E} = T \cdot \tilde{E}_1 = \text{Rot } \Theta \cdot \text{Roth } \bar{\Gamma} \cdot \tilde{E}_1 = (\text{Rot } \Theta \cdot \text{Roth } \bar{\Gamma} \cdot \text{Rot}' \Theta) \cdot \text{Rot } \Theta \cdot \tilde{E}_1. \quad (481)$$

Здесь ротационные матрицы  $\text{Roth } \Gamma$  и  $\text{Roth } \bar{\Gamma}$  выражены в координатах того же единичного псевдоевклидова базиса  $\tilde{E}_1 = \{I\}$ . В этом базисе их надо рассматривать как некие гиперболические ротационные преобразования. Однако в полярном представлении они действуют в своих базисах  $\tilde{E}$ : первое в базисе  $\tilde{E}_1 = \{I\}$ , второе в базисе  $\tilde{E}_{1u} = \text{Rot } \Theta \cdot \tilde{E}_1$ . Поэтому второе гиперболическое преобразование надо транслировать из координат базиса  $\tilde{E}_1$  в координаты базиса  $\tilde{E}_{1u}$ , то есть в главное гиперболическое преобразование  $\text{Roth } \Gamma$ , что и отображается в представлении (481), где второе гиперболическое преобразование в произведении выражается в базисе его действия. Если использовать матрицы в координатах  $\tilde{E}_1$ , то тогда их последовательность в полярном представлении становится обратной, что отображается исходно в (480).

В матрице любого псевдоевклидова базиса  $\tilde{E}_1$  первые  $n$  столбцов задают собственное  $\langle \mathcal{E}^n \rangle^{(k)}$ , остальные  $q$  столбцов задают собственное  $\langle \mathcal{E}^q \rangle^{(k)}$  метрического тензора  $I^\oplus$  в сумме (462). С учётом структуры (473) для матрицы  $\text{Rot } \Theta$  при преобразовании из любого универсального базиса (467) новые собственные подпространства  $\langle \mathcal{E}^n \rangle$  и  $\langle \mathcal{E}^q \rangle$  задаются тождественно столбцами любой из матриц:  $\tilde{E}$ ,  $T$  и  $\text{Roth } \Gamma$ . Например, из (480) имеем тождества для  $2x$  подмножеств подпространств в  $\langle P^{n+q} \rangle$ :

$$\left. \begin{aligned} \langle \mathcal{E}^n \rangle &\equiv \langle \text{im } \tilde{E}^{(n+q) \times n} \rangle \equiv \langle \text{im } \langle T^{(n+q) \times n} \rangle \equiv \langle \text{im } \{ \text{Roth } \Gamma \}^{(n+q) \times n} \rangle, \\ \langle \mathcal{E}^q \rangle &\equiv \langle \text{im } \tilde{E}^{(n+q) \times n} \rangle \equiv \langle \text{im } \langle T^{(n+q) \times n} \rangle \equiv \langle \text{im } \{ \text{Roth } \Gamma \}^{(n+q) \times n} \rangle, \end{aligned} \right\} \quad (482)$$

где в скобках взяты либо первые  $n$ , либо остальные  $q$  столбцов.

Смысл сказанного состоит в том, что любое тригонометрическое преобразование (460), применительно к собственным евклидовым подпространствам  $\langle \mathcal{E}^n \rangle$  и  $\langle \mathcal{E}^q \rangle$  в целом как множествам точечных элементов, в исходном универсальном базисе сводится к их чисто гиперболической ротации, взятой из представления (474). В частности, в пространстве Минковского  $\langle P^{n+1} \rangle$  при преобразовании из универсального базиса новые  $\langle \mathcal{E}^n \rangle$  и ось  $\vec{y}$  задаются по отдельности тождественно  $n$  и  $1$  столбцами матриц  $\tilde{E}$ ,  $T$  и  $\text{Roth } \Gamma$ , так как они в целом являются относительными подпространствами тензора  $I^\oplus$ . Последняя матрица как элементарная имеет структуру (363), (364). Следовательно, используя полярное представление (474), любое ротационное тригонометрическое преобразование  $T$  универсального базиса, например многоступенчатое, для собственных подпространств метрического тензора сводится к их в целом гиперболической ротации  $\text{Roth } \Gamma = \sqrt{TT'}$ .

Матрицы псевдоевклидовых базисов (которые, в частности, задают собственные евклидовы подпространства метрического рефлектор-тензора) выражаются исходно также в оригинальном единичном базисе  $\tilde{E}_1 = \{I\}$ , но далее действуют в своих базисах.

В универсальных координатных базисах  $\tilde{E}_{1u}$  в СТО описываются мировые события (процессы и фиксации) именно с точки зрения относительно неподвижного наблюдателя. Среди них  $\tilde{E}_1 = \{I\}$  – простейший по форме исходный базис. В частности, в универсальных базисах реализуется сферическо-гиперболическая аналогия любого конкретного типа, например синус-тангенсная (§ 6. 2).

Кроме того, заметим, что при  $q = 1$  матрица  $\text{Rot } \Theta^{q \times q}$  в (473) вырождается в единицу. Поэтому в  $\langle P^{n+1} \rangle$  непрерывное преобразование Лоренца любой точки на оси  $\vec{y}$ , независимо от исходного базиса, сводится к её чисто гиперболической ротации – либо как тензорного точечного объекта (при пассивном преобразовании координат), либо как производящего точечного элемента (при активном преобразовании координат). Дадим два примера, с *элементарными матрицами* (§ 6. 5), которые представляют интерес в гиперболической геометрии и СТО:

$$\mathbf{u}^{(j)} = T_{1j}^{-1} \cdot \mathbf{u}^{(1)} = (\text{rot}' \Theta_{1j} \cdot \text{roth } \Gamma_{1j} \cdot \text{rot } \Theta_{1j})^{-1} \cdot \text{rot}' \Theta_1 \cdot \mathbf{u}^{(1)} = \{\text{roth } \Gamma_{1j}\}_{E_{1u}}^{-1} \cdot \mathbf{u}^{(1)}, \quad (483)$$

где  $\mathbf{u}^{(1)}$  – точечный объект, выраженный в базисе  $\tilde{E}_1$ , причём  $\mathbf{u}^{(1)} \in \langle \vec{y} \rangle^{(1)}$ ;  $\mathbf{u}^{(j)}$  – тот же точечный объект в базисе  $\tilde{E}_j = T_{1j} \cdot \tilde{E}_1$ , но гиперболически пассивно преобразованный с оси  $\vec{y}^{(1u)}$  в базисе  $\tilde{E}_{1u} = \text{rot } \Theta_{1j} \cdot \tilde{E}_1$ . ( $T_{1j}$  – *пассивное* преобразование координат элемента.)

$$\mathbf{u}_j = T_{1j} \cdot \mathbf{u}_1 = (\text{rot } \Theta_{1j} \cdot \text{roth } \Gamma_{1j} \cdot \text{rot}' \Theta_{1j}) \cdot \text{rot } \Theta_j \cdot \mathbf{u}_1 = \{\text{roth } \Gamma_{1j}\}_{E_{1u}} \cdot \mathbf{u}_1, \quad (484)$$

где  $\mathbf{u}_1$  – производящий точечный элемент, причём  $\mathbf{u}_1 \in \langle \vec{y} \rangle^{(1)}$ ;  $\mathbf{u}_j$  – конечный точечный элемент, как результат гиперболического поворота элемента  $\mathbf{u}_1$  от оси  $\vec{y}^{(1)}$  на угол  $\gamma$ , но под углом  $\theta_{1j}$ . ( $T$  – *активное* преобразование координат элемента.)

Вышеизложенное представление общего тригонометрического преобразования собственных подпространств *в целом* их гиперболической ротацией, вообще говоря, не относится к каким-либо подмножествам этих подпространств, например к координатным осям базиса. Из (481), где матрицы выражены в базисах своего действия, но даны в обратном порядке, следует, что координатные оси последовательно подвергаются ортосферической ротации  $\text{Rot } \Theta$  и гиперболической ротации  $\text{Roth } \Gamma$ .

Матрица преобразования  $T$  может рассматриваться как двух-валентный и псевдоевклидово биортогональный тензор в силу (460). То же относится и к матрице базиса  $\tilde{E} = T \cdot \{I\}$ . Этот тензор расщепляется на пару однородных и пару смешанных тензоров, то есть однородные ( $n \times n$  и  $q \times q$ ) и смешанные ( $n \times q$  и  $q \times n$ ) бипроекции:

$[\tilde{E}]^{n \times n}$  – проекция на исходное  $\langle \mathcal{E}^n \rangle$  пространствуподобных единичных векторов базиса как проекции базиса на новое  $\langle \mathcal{E}^n \rangle$ ;  
 $[\tilde{E}]^{q \times q}$  – проекция на исходное  $\langle \mathcal{E}^q \rangle$  времениподобных единичных векторов базиса как проекции базиса на новое  $\langle \mathcal{E}^q \rangle$ ;  
 $[\tilde{E}]^{n \times q}$  и  $[\tilde{E}]^{q \times n}$  – аналогичные смешанные проекции.

При транспонировании матрицы базиса проекции отражаются зеркально относительно её главной диагонали. Это, например, происходит при изменении последовательности многоступенчатых гиперболических ротаций на противоположную.

### § 11.4. Многоступенчатые гиперболические ротации

Многоступенчатые гиперболические ротации в случае тригонометрической согласованности ротационных матриц между собой (гл. 5, 6) остаются чисто гиперболическими. Это соответствует, например, в ротациях (363), (364) и в СТО для суммируемых движений (скоростей) равенству направляющих косинусов с точностью до общего коэффициента  $\langle \pm 1 \rangle$ . Очевидно, что гиперболические углы в итоговой ротационной матрице суммируются алгебраически, то есть с учётом знака данного коэффициента. Но если частные ротационные матрицы не согласованы тригонометрически между собой (хотя все они согласованы с рефлектор-тензором), то тогда многоступенчатые гиперболические ротации сводятся, как правило, к общему тригонометрическому преобразованию, приводимому к полярным формам (474), (475) в  $\tilde{E}_1 = \{I\}$ .

Пусть в исходном единичном базисе  $\tilde{E}_1 = \{I\}$  заданы матрицы частных гиперболических ротаций в канонической форме (363), (364):

$$\text{Roth } \Gamma_{12}, \text{Roth } \Gamma_{23}, \dots, \text{Roth } \Gamma_{(t-1)t}.$$

Как преобразования они осуществляются последовательно в базисах:

$$\tilde{E}_1 = \{I\}, \tilde{E}_2 = \{\text{Roth } \Gamma_{12}\}_{(\tilde{E}_1)} \cdot \tilde{E}_1, \dots, \tilde{E}_t = \{\text{Roth } \Gamma_{(t-1)t}\}_{(\tilde{E}_{t-1})} \cdot \tilde{E}_{t-1}.$$

После трансляции матриц частных ротаций в  $\tilde{E}_1 = \{I\}$ , они отображают в нём последовательно все эти ротации. В итоге получаем формулу многоступенчатого преобразования, но в исходном базисе  $\tilde{E}_1$ :

$$\tilde{E}_t = \text{Roth } \Gamma_{12} \cdot \text{Roth } \Gamma_{23} \cdot \dots \cdot \text{Roth } \Gamma_{(t-1)t} \cdot \tilde{E}_1. \quad (485)$$

Например, её можно доказать по индукции, начиная с  $t = 3$ :

$$\begin{aligned} \tilde{E}_3 &= \{\text{Roth } \Gamma_{23}\}_{(\tilde{E}_2)} \cdot \tilde{E}_2 = \{\text{Roth } \Gamma_{23}\}_{(\tilde{E}_2)} \cdot \{\text{Roth } \Gamma_{12}\}_{(\tilde{E}_1)} \cdot \tilde{E}_1 = \\ &= \{\text{Roth } \Gamma_{12} \cdot \text{Roth } \Gamma_{23} \cdot \text{Roth}^{-1} \Gamma_{12}\} \cdot \{\text{Roth } \Gamma_{12}\} \cdot \tilde{E}_1 = \text{Roth } \Gamma_{12} \cdot \text{Roth } \Gamma_{23} \cdot \tilde{E}_1. \end{aligned} \quad (486)$$

В формулах имеет место обратный порядок следования частных матриц в форме, как они были заданы канонически в  $\{I\}$  (см. [27, с. 428–429]).

В свою очередь, координаты тензорных объектов преобразуются *пассивно*, но в прямом порядке следования матриц обратных ротаций:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^{(l)} &= \text{Roth}(-\Gamma_{(t-1)t}) \cdot \dots \cdot \text{Roth}(-\Gamma_{23}) \cdot \text{Roth}(-\Gamma_{12}) \cdot \mathbf{u}^{(1)}, & (487) \\ &= \{\text{Roth } \Gamma_{12} \cdot \text{Roth } \Gamma_{23} \cdot \dots \cdot \text{Roth } \Gamma_{(t-1)t}\}^{-1} \cdot \mathbf{u}^{(1)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^{(3)} &= \text{Roth}(-\Gamma_{23}) \cdot \mathbf{u}^{(2)} = \text{Roth}(-\Gamma_{23}) \cdot \text{Roth}(-\Gamma_{12}) \cdot \mathbf{u}^{(1)} = & (488) \\ &= \{\text{Roth } \Gamma_{12} \cdot \text{Roth } \Gamma_{23}\}^{-1} \cdot \mathbf{u}^{(1)}. \end{aligned}$$

Здесь обратные модальные матрицы также выражены в канонической форме, как они были заданы в  $\{I\}$  и действуют в своих базисах.

В псевдоевклидовой геометрии матрица чисто гиперболической ротации – либо симметричная, либо нет, но при этом она всегда простая. Эта матрица симметричная в канонической форме (363) или (364). Но после перевода из координат базиса  $\check{E}_1 = \{I\}$  в много-ступенчатой последовательности модальных матриц преобразованием  $T \notin \langle \text{Rot } \Theta \rangle$  она уже несимметричная. Матрицы  $\text{Roth } \Gamma$  и  $\{T \cdot \text{Roth } \Gamma \cdot T^{-1}\}$  представляют одну и ту же гиперболическую ротацию, но как заданную в базисе  $\check{E}_1$  и как частную, действующую в базисе  $\check{E} = \{T\}$  – смещённой системе.

Простые матрицы гиперболической ротации также принадлежит группе Лоренца с метрическим тензором  $\Gamma^{\oplus}$ . Их  $W$ -формы и собственные углы  $\gamma_j$  – те же, что и у симметричной матрицы. Это выделяет множество чисто гиперболических ротаций с простыми матрицами в однородной группе Лоренца.

Разумеется, аналогичные выводы относятся к ортосферическим ротациям  $\{T \cdot \text{Rot } \Theta \cdot T^{-1}\}$  и  $\text{Rot } \Theta$ . Они, как и гиперболические ротации, могут быть выражены – либо как заданные в  $\check{E}_1$ , либо как частные ортосферические ротации, действующие в базисе  $\check{E} = \{T\}$ .

При *активном* многоступенчатом гиперболическом ротационном преобразовании производящего элемента в  $\check{E}_1$  частные ротационные матрицы образуют обратный порядок как в (485), так как эти матрицы исходно заданы в  $\check{E}_1 = \{I\}$ :

$$\mathbf{u}_t = \text{Roth } \Gamma_{12} \cdot \text{Roth } \Gamma_{23} \cdot \dots \cdot \text{Roth } \Gamma_{(t-1)t} \cdot \mathbf{u}_1, \quad (489)$$

$$\mathbf{u}_3 = \text{Roth } \Gamma_{12} \cdot \text{Roth } \Gamma_{23} \cdot \mathbf{u}_1 = \{\text{Roth } \Gamma_{23}\}_{\check{E}_2} \cdot \mathbf{u}_2. \quad (490)$$

Все вышеуказанные соотношения (485) – (490) выражают частные случаи общего *правила многоступенчатых линейных преобразований*. При любых сложных непрерывных преобразованиях (ротациях) Лоренца с тензором (458) или (460) метрический инвариант  $\rho^2(\mathbf{u}_1) = \mathbf{u}' \cdot I \cdot \mathbf{u} = \text{const}$  сохраняется как при движении по гиперлоидной поверхности с инвариантом  $\rho^2$ .

Для анализа двух- и многоступенчатых гиперболических ротаций далее используется полярное представление (474), (475):

$$\tilde{E}_i = \text{Roth } \Gamma_{1i} \cdot \text{Rot } \Theta_{1i} \cdot \tilde{E}_1 = \text{Rot } \Theta_{1i} \cdot \text{Roth } \tilde{\Gamma}_{1i} \cdot \tilde{E}_1, \quad (491)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{Roth } \Gamma_{13} &= \sqrt{TT'} = \sqrt{\text{Roth } \Gamma_{12} \cdot \text{Roth } 2 \Gamma_{23} \cdot \text{Roth } \Gamma_{12}} = \sqrt{\text{Roth } 2 \Gamma_{13}}, \\ \text{Rot } \Theta_{13} &= \text{Roth } \Gamma_{31} \cdot \text{Roth } \Gamma_{12} \cdot \text{Roth } \Gamma_{23} = \text{Rot}'(-\Theta_{13}) = \text{Rot}^{-1}(-\Theta_{13}), \end{aligned} \right\} (492)$$

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{u}^{(i)} &= (\text{Rot}'\Theta_{1i} \cdot \text{Roth}\Gamma_{1i} \cdot \text{Rot}\Theta_{1i})^{-1} \cdot \text{Rot}'\Theta_{1i} \cdot \mathbf{u}^{(1)} = \{\text{Roth}\Gamma_{1i}\}_{\tilde{E}_{1u}}^{-1} \cdot \mathbf{u}^{(1u)}, \\ A^{(i)} &= (\text{Rot}'\Theta_{1i} \cdot \text{Roth}\Gamma_{1i} \cdot \text{Rot}\Theta_{1i})^{-1} \cdot \text{Rot}'\Theta_{1i} \cdot A^{(1)} = \{\text{Roth}\Gamma_{1i}\}_{\tilde{E}_{1u}}^{-1} \cdot A^{(1u)}. \end{aligned} \right\} (493)$$

Таким образом, двух- и многоступенчатые гиперболические ротации в общем случае разлагаются на две составные ротации чистых типов: гиперболическую и ортосферическую (в (492)).

Согласно (480), в первом главном варианте формулы (491) сначала происходит гиперболическая ротация на угол  $\Gamma$  исходного базиса  $\tilde{E}_1$  совместно с  $\langle \mathcal{E}^n \rangle^{(1)}$  и  $\langle \mathcal{E}^q \rangle^{(1)}$ . На следующем шаге в гиперболически смещённом базисе  $\tilde{E}_{1h} = \text{Roth } \Gamma \cdot \tilde{E}_1$  идёт ортосферическая ротация  $\{\text{Rot}\Theta\}_{\tilde{E}_{1h}}$  совместно с  $\langle \mathcal{E}^n \rangle^{(1h)}$  и  $\langle \mathcal{E}^q \rangle^{(1h)}$  на углы  $\Theta^{n \times n}$  и  $\Theta^{q \times q}$  внутри этих евклидовых подпространств. При этом вышеуказанные собственные подпространства как евклидовы подмножества остаются постоянными. Именно так всё это воспринимается из  $\tilde{E}_1$ .

В формулах (493) выражены соответствующие изменения координат точечного и любого *неточечного* одновалентного тензорного объекта (например, линейного элемента  $\mathbf{u}$  или линеора  $A$ ). Эти изменения в базисе  $\tilde{E}_1$  геометрически воспринимаются так, как если *неточечный* объект сначала был подвергнут сферической ротации на угол  $(-\Theta)$ , а затем гиперболической ротации на угол  $(-\tilde{\Gamma})$ . В пространстве Минковского  $\langle P^{3+1} \rangle$ , как пространстве событий СТО, это изменение первоначальной сферической ориентации неточечного объекта на угол  $\Theta$  в евклидовом подпространстве в результате последовательного сложения скоростей с отличающимися направлениями является тоже релятивистским эффектом (в физической терминологии и во времени как *ортопрецессия*), как и гиперболический характер закона сложения скоростей. В свою очередь, в псевдоевклидовом пространстве  $\langle P^{n+q} \rangle$  изменяется внутренняя сферическая ориентация гиперболических проекций тензорного объекта в  $\langle \mathcal{E}^n \rangle$  (на угол  $\Theta^{n \times n}$ ) и в  $\langle \mathcal{E}^q \rangle$  (на угол  $\Theta^{q \times q}$ ) относительно декартовых осей базиса этих подпространств. При *противоположной последовательности частных ротаций* имеем:

$$\left. \begin{aligned} \tilde{E} &\rightarrow \tilde{E}' \quad (T \rightarrow T'), \\ \Gamma &\rightarrow \tilde{\Gamma}. \end{aligned} \right\} (494)$$

(Последнее объясняет дополнительное обозначение для угла  $\tilde{\Gamma}$ .)



Множество непрерывных преобразований включает в себя тригонометрические ротации  $\langle T \rangle$  и трансляции, как общая группа непрерывных движений в псевдоевклидовой геометрии.

Перемножение ортосферических ротаций даёт опять ортосферическую ротацию, т. е. они образуют собственную подгруппу группы псевдоевклидовых ротаций, аналогичную подгруппе группы квазиевклидовых ротаций (§ 5.6). Их структура отражена в (473). В универсальных базисах обе тождественны.

Многоступенчатые гиперболические ротации точечного элемента (геодезические движения по отрезкам  $\gamma_{jk}$ ) последовательно производят реперные точки (вершины) каких-либо геометрических фигур, например гиперболических (геодезических) многоугольников. Для их реализации необходимое условие – замкнутость цикла гиперболических ротаций:

$$\prod_{k \geq 3} \text{Roth } \Gamma_{(k)} \cdot \mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_1, \text{ где } \mathbf{u}_1 \in \langle \mathcal{E}^n \rangle^{(1)} \text{ или } \langle \mathcal{E}^q \rangle^{(1)}, \rho^2(\mathbf{u}_1) = \text{const},$$

при этом в остатке ортопрецессия  $\text{Rot } \Theta$ , которая является здесь причиной отрицательной угловой девиации Гаусса – Бонне, см. в Приложении гл. 7А.

Гиперболические фигуры с геометрией в  $\langle P^{n+q} \rangle$  реализуются на гиперboloидных поверхностях (псевдосферах) максимальной размерности с инвариантом  $\rho^2$ :

$$\sum_{s=1}^n x_s^2 - \sum_{t=1}^q y_t^2 = \pm \rho^2(\mathbf{u}_1) = \text{const}, \quad (495)$$

$\pm \rho^2(\mathbf{u}_1)$  – квадратичный метрический инвариант. Условие  $\rho = 0$  задаёт для всех таких гиперboloидов с любым  $\rho$  инвариантный изотропный конус с теми же размерностями  $n$  и/или  $q$ . В силу непрерывности частных ротаций централизованные фигуры расположены в одной из полостей изотропного конуса – там, где находится  $\mathbf{u}_1$ ;  $\rho(\mathbf{u}) = \rho(\mathbf{u}_1) = \text{const}$ .

Централизованная гиперповерхность (495) находится или во внешней полости конуса ( $\rho^2 > 0$ ), или во внутренней полости конуса ( $\rho^2 < 0$ ), либо она есть конус ( $\rho = 0$ ). Она как некоторое многообразие, есть функция от метрического инварианта  $\pm \rho$ . Метрика на гиперboloидной (псевдосферической) гиперповерхности – внешняя псевдоевклидова.

Её подмножества – такие же  $m$ -поверхности меньшей размерности и при  $m = 1$  псевдоокружности. С точки зрения топологии в аффинном пространстве они – гиперboloидные поверхности и гиперболы. Каждую из них можно представить как гиперповерхность в некотором своём подпространстве  $\langle P^{n'+q'} \rangle \subset \langle P^{n+q} \rangle$ , где  $1 \leq n' \leq n$ ,  $1 \leq q' \leq q$ . Любая гипербола на гиперповерхности принадлежит своей псевдоплоскости.

В заключение особо отметим, что результат суммирования движений не зависит от того, рассматривать его – либо по изменению базиса  $\tilde{E}$  (то есть активно), либо по пассивному изменению координат объекта. Соответственно используются модальные матрицы: либо  $T$ , либо  $T^{-1}$ !

Мы выбрали именно первый вариант, как более универсальный!

## Глава 12. Тригонометрия псевдоевклидова пространства Минковского

### § 12.1. Проективные тригонометрические модели сопутствующих гиперболических геометрий

В  $\langle P^{n+1} \rangle$  реализуется псевдоевклидова геометрия Минковского. Две псевдосферические гиперповерхности в нём ( $n \geq 2, q = 1$ ), отличающиеся знаком квадратичного инварианта ( $+R^2$  и  $-R^2$ ), в аффинном смысле пара сопутствующих гиперболоидов I и II, – объекты тензорной тригонометрии. Геометрическим способом в  $\tilde{E}_1$  они производятся сферической ротацией относительно направленной оси  $\vec{y}$  ( $dy > 0$ ) с числом степеней свободы  $(n - 1)$  – одной времени подобной гиперболы (например правой) и двух пространству подобных гипербол (верхней и нижней), рис. 3 и 4 ( $\rho^2 = \pm R^2$ ). В метрическом смысле они суть гиперпсевдосферы: I – с *вещественными* радиусами  $\pm R$ , II – с *мнимыми* радиусами  $+iR$  и  $-iR$  (т. е. в  $\langle Q^{n+1} \rangle$ !).

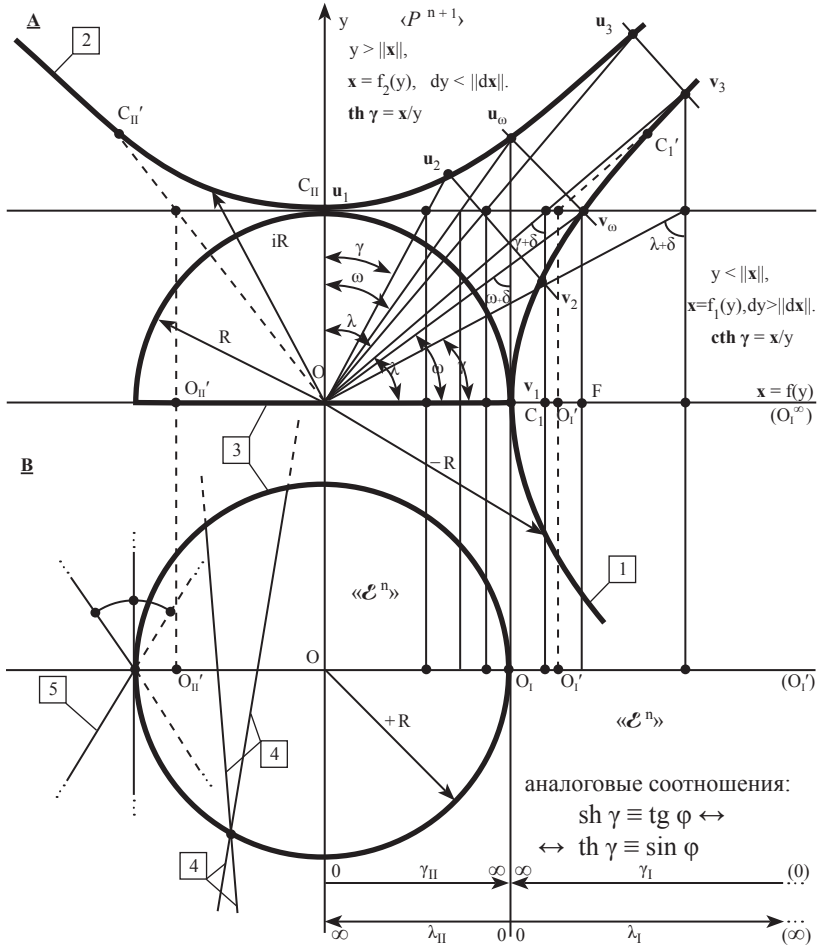
Они именуются как гиперболоиды Минковского I и II. Гиперболоид II топологически *двулопастный* (по форме “две симметричные чаши”) с инвариантом  $\rho^2 = -R^2, \|x\| < u$  расположен внутри изотропного конуса; но для  $x = f_1(y), \|dx\| > dy$  при  $\pm iR$ ! Гиперболоид I топологически *однолопастный* (по форме “песочные часы”) с инвариантом  $\rho^2 = +R^2, \|x\| > u$  расположен вне изотропного конуса; но для  $x = f_2(y), \|dx\| < dy$  при  $\pm R$ ! На этих двух сопутствующих гиперболоидах I и II реализуются *внешние* и *внутренние гиперболические геометрии* с псевдоевклидовой внешней и внутренней мерой длины «а». Гиперболические траектории на этих гиперболоидах – *геодезические линии* (*прямые* в неевклидовом смысле). Изотропный конус есть *инвариант* от  $\rho$  и  $\tilde{E}$  – гиперпсевдосфера нулевого радиуса.

Если гиперболическая траектория проходит по какому-либо гиперболоиду меньшей размерности ( $1 < n' < n$ ) внутри самого гиперболоида Минковского, то она и на данной поверхности остаётся геодезической. При  $n' = 1$ , то есть на собственной секущей псевдоплоскости, остаётся только гипербола, сама по себе. Здесь на псевдоплоскости в координатах  $(y, x)$  легко определяется её псевдоевклидова длина (гл. 6), то есть по внешней мере. Кроме того, на гиперболоидах реализуются окружности, сферы и другие особые геометрические фигуры – в зависимости от  $n$ .

Централизованные геодезические движения активно производящих начальных элементов  $\mathbf{u}_1$  и  $\mathbf{v}_1$  (рис. 4) по гиперблоидам – с инвариантом для II и I осуществляет ротационная матрица-функция  $\text{roth } \Gamma = F(\gamma)$ , согласно структурам (363), (364). *Нецентрализованное* геодезическое движение, например, элемента  $\mathbf{u} = T \cdot \mathbf{u}_1$  по тому же гиперблоиду осуществляет ротационная матрица  $\{\text{roth } \Gamma\}_{\tilde{E}}$ , или  $\{T \cdot \text{roth } \Gamma\}_{\tilde{E}_1} \cdot T^{-1}$ , где  $\tilde{E} = T \cdot \tilde{E}_1$ . Формально  $\gamma$  изменяется непрерывно от 0 до  $+\infty$  ( $dy > 0$ ) или от 0 до  $-\infty$  ( $dy < 0$ ). *Протяжённость геодезической траектории на обоих гиперблоидах внешне и внутренне определяется как псевдоевклидова длина гиперболической дуги  $l_p$*  (см. § 6.4) в пределах псевдоплоскости: как  $l_p = iR \cdot \gamma = i \cdot a$  на гиперблоиде II и как  $l_p = R \cdot \gamma = a$  на гиперблоиде I. (Длина дуги образуется из дифференциалов – мнимых и вещественных, см. выше!) *Угловая мера длины* Ламберта  $\gamma$  принята в неевклидовой геометрии. Мера Ламберта в неевклидовой геометрии  $\gamma = a/R$  [21]. Но она зависит от метрики пространства гиперболической геометрии. А именно, в пространстве Лобачевского – Больяи применяется *натуральная мера*  $a$  или « $a_E$ », в  $\langle P^{n+1} \rangle$  она псевдоевклидова « $a_p$ ».

Для пространства *подобного* двуполостного гиперблоида II всё это объясняется тем, что его гиперболическая геометрия изоморфна в целом (а следовательно, и в малом) внутренней гиперболической геометрии Лобачевского – Больяи при одних и тех же  $n$  и  $R$ . Причём различие геометрий на *верхней* и на *нижней* частях гиперблоида II заключается только в перемене знаков перед гиперболическими углами  $\Gamma$  и  $\gamma$  (обращении ротационной матрицы  $\text{roth } \Gamma$ ) для зеркально симметричных движений на них относительно гиперплоскости « $\mathcal{E}^n$ »<sup>(1)</sup>. Но при этом всегда для этих углов  $\gamma$  при  $dy > 0$  применяется знак «+», а при  $dy < 0$  применяется знак «–». Углы  $\Gamma$  и  $(-\Gamma)$  имеют тождественный вектор направляющих косинусов. *То же относится к двум соответствующим антиподным частям гиперболического пространства Лобачевского – Больяи. Последнее в целом, как и гиперблоид II, по сути двусвязное.*

Изоморфизм в целом внешней геометрии на гиперблоиде II и внутренней геометрии Лобачевского – Больяи с натуральной мерой « $a_E$ » доказывался тем, что они обе приводятся центральными проективными преобразованиями к одной и той же форме – модели Клейна внутри овального абсолюта Кэли [25; 38, ч. II, с. 178 – 193]. Для внешней геометрии на гиперблоиде II модель Клейна (внутри абсолюта) есть её проективное отображение (рис. 4) на *проективный круг радиуса R (без наружной границы)* – в проективной гиперплоскости « $\mathcal{E}^n$ ». Тригонометрически модель в  $\tilde{E}_1$  (внутри абсолюта) по сути есть *тангенсное* отображение ( $\gamma \xrightarrow{\text{th}} \gamma, \cos \alpha_k = \text{const}_k$ ), или тангенсная проекция на проективный круг в « $\mathcal{E}^n$ », где *гиперболы геометрически суть прямые!* Для геометрии Лобачевского – Больяи модель Клейна (внутри абсолюта) – проективное отображение в пределах того же проективного круга в « $\mathcal{E}^n$ ». (Впервые такую модель предложил Бельтрами.) Все эти отображения по отношению к гиперплоскости « $\mathcal{E}^n$ » – двусторонние и двусвязные.



**Рис. 4.** А) Тригонометрические соответствия гиперboloидов I и II, а также гиперсфероиды ( $R = 1$ ) в псевдо- и квазиплоскости ротации. ( $\gamma, \lambda$  – основные,  $\delta$  – бесконечный и  $\omega$  – особый гиперболические углы).

В) Проективные модели гиперboloида II – Клейна (тангенсная –  $th \gamma$ ) и I (котангенсная –  $cth \gamma$ ), относительно овального абсолюта Кэли, на проективной гиперплоскости (с фокусом в точке F, отвечающем углу  $\omega$ ). (1) гиперboloид I,  $\rho = \pm R$ , (2) гиперboloид II,  $\rho = iR$ , (3) абсолюта Кэли, (4) пара параллельных прямых (геодезических) внутри и вне абсолюта, (5) различные варианты соответствий прямых внутри и вне абсолюта.

Проективная гиперплоскость « $\mathcal{E}^n$ » в целом двусторонняя, что делает её топологию гомеоморфной сфере. Предельный переход отображений с одной стороны на другую – по её условной бесконечно удалённой границе.

Общее для моделей то, что меры длины  $a_p$  и  $a_E$  трансформируются в одну вещественную проективную меру в  $\langle \mathcal{E}^n \rangle$ . Кроме того, изоморфизм геометрий в целом, включает одну и ту же топологию геометрических пространств с точностью до их гомеоморфизма. В рассматриваемом случае это – топология внутренней области овального абсолюта Кэли в  $\langle \mathcal{E}^n \rangle$ . Поскольку последняя не включает в себя абсолют, то есть *не имеет границы*, то такая область проективной гиперплоскости  $\langle \mathcal{E}^n \rangle$  топологически эквивалентна  $\langle \mathcal{E}^n \rangle$ . (То же относится к двум антиподным пространствам Лобачевского – Больяи и к обеим частям гиперboloида II.) Все они имеют топологию безграничного аффинного пространства  $\langle \mathcal{A}^n \rangle$ .

Внутри овального абсолюта на проективной гиперплоскости  $\langle \mathcal{E}^n \rangle$  действует проективная мера в тангенсной форме  $\langle R \cdot \text{th } a / R \rangle$ , отождествляемая в  $\langle \mathcal{E}^n \rangle$  с евклидовой мерой. В модели Клейна внутри абсолюта проективная мера ограничена радиусом  $R$ . При  $R \rightarrow \infty$  гиперboloид II (и пространство Лобачевского – Больяи) становится бесконечным  $\langle \mathcal{E}^n \rangle$ . Если  $\gamma = a_p / R \rightarrow 0$ , то есть либо  $a_p \rightarrow 0$ , либо  $R \rightarrow \infty$ ; тогда  $R \cdot \text{th } a_p / R \rightarrow a_p$ ; в 2х вариантах меры длины  $a = R\gamma$  и проективная *совпадают*. **Следствие:** геометрия гиперboloида II инфинитезимально евклидова (см. гл. 7А).

Для времени подобного однополостного гиперboloида I то же самое объясняется тем, что гиперболическая геометрия на нём изоморфна в целом некоторой “внутренней цилиндрической гиперболической геометрии” (см. далее) с натуральной мерой  $\langle a_E \rangle$  при одинаковых  $n$  и  $R$ . Её гиперболическое пространство в целом отличается от пространства Лобачевского-Больяи только в большом, то есть тем, что оно топологически эквивалентно цилиндрическому евклидову пространству  $\langle \mathcal{E}^n \rangle$ .

Обе эти гиперболические геометрии с цилиндрической топологией проективными преобразованиями приводятся к одной и той же форме – специальной модели вне овального абсолюта Кэли. Для внешней геометрии на гиперboloиде I данная модель (вне абсолюта) есть её проективное отображение (рис. 4) на проективное кольцо внутреннего радиуса  $R$  в  $\langle \mathcal{E}^n \rangle$  (где *внутри границы нет*, а *снаружи – граница*  $\langle \mathcal{E}^n \rangle$ ). Её тригонометрическая модель в  $\tilde{E}_1$  (вне абсолюта) по сути есть *котангенсное* отображение ( $\gamma \mapsto \text{cth } \gamma, \cos \alpha_k = \text{const}_k$ ), или котангенсная проекция на проективное кольцо в  $\langle \mathcal{E}^n \rangle$ , где *гиперболы геометрически суть прямые!*

В тангенсной цилиндрической модели тангенсная проекция ( $\gamma \mapsto \text{th } \gamma$ ) гиперboloида I отображается в  $\tilde{E}_1$  на верхнюю и нижнюю часть боковой гиперповерхности гиперцилиндра радиуса  $R$  и высотой  $2R$  вдоль ординаты (с псевдоевклидовой мерой длины  $\langle a_p \rangle$ ) между его двумя основаниями радиуса  $R$ , разделёнными с боковой поверхностью гиперцилиндра двумя овальными абсолютами Кэли в пределах проективной цилиндрической поверхности  $\langle \mathcal{E}^n \rangle$ , причём в центре – с бесконечно удалённой границей, соответствующей поясу гиперboloида I, где  $\gamma_1 = 0$  – рис. 4. (На общих же двух овальных абсолютах Кэли для 2-х гиперboloидов  $\gamma_{I,II} \rightarrow \infty$ .)

Оба этих проективных отображений – двусторонние и односвязные.

Односвязность в данной модели обуславливается непрерывностью отображения гиперboloида  $I$  в целом на обе стороны проективной гиперплоскости « $\mathcal{E}^n$ » в области вне абсолюта Кэли. Топологическая связь между обеими сторонами осуществляется через бесконечно удалённую границу проективной гиперплоскости « $\mathcal{E}^n$ » (пояс гиперboloида). В цилиндрической модели эта же связь осуществляется через её отображение – *центральный пояс* проективного гиперцилиндра радиуса  $R$  ( $\text{th}\gamma_1 = 0$ ) между верхней и нижней частью. Разделение полостей гиперboloида  $\Pi$  от односвязного гиперboloида  $I$  в цилиндрической модели происходит по двум овальным абсолютам – верхнему и нижнему, внутри которых два основания цилиндра – модели Клейна полостей гиперboloида  $\Pi$ . Во всех этих моделях только овалы абсолюты суть  $(n - 1)$ -мерные *автоморфизмы* – две проекции инвариантного изотропного конуса!

Гиперboloид  $I$  и соответствующее цилиндрическое гиперболическое пространство также разделяются, но *не топологически*, на половинные части – с положительным и отрицательным значениями на оси ординат  $\vec{y}$ . Выбор знаков для углов движений  $\Gamma$  и  $\gamma$  осуществляется, согласно вышеуказанной схеме, с учётом направления оси  $\vec{y}$  – по знаку  $dy$ . В указанной модели вне овалы абсолюта на проективной гиперплоскости « $\mathcal{E}^n$ » действует собственная *проективная мера в обратной котангенсной форме* « $R \cdot \text{cth } a_p / R$ », отождествляемая с *натуральной мерой*. При  $R \rightarrow \infty$  гиперboloид  $I$  – топологически цилиндрическое гиперболическое пространство становится бесконечным цилиндрическим пространством « $\mathcal{E}^n$ ». В той же открытой цилиндрической модели на внутренней и внешней поверхностях проективного гиперцилиндра действует проективная мера в тангенсной форме: « $R \cdot \text{th } a_p / R$ », отождествляемая с *натуральной мерой*. Если  $\gamma = a_p / R \rightarrow 0$ , то есть или  $a_p \rightarrow 0$ , или  $R \rightarrow \infty$ ; тогда  $R \cdot \text{th } a_p / R \rightarrow a_p$ ; в 2х вариантах меры длины  $a_p = R\gamma$  и проективная *совпадают*. **Следствие:** *геометрия гиперboloида  $I$  инфинитезимально евклидова* (см. гл. 7А).

Кроме того, *гиперboloид  $I$  и его  $n$ -мерная гиперболическая геометрия в псевдоевклидовом пространстве  $\langle P^{n+1} \rangle$ , с учётом его топологии как цилиндрической поверхности, отображается изометрично на  $n$ -мерную псевдосферу с тем же параметром  $R$  в квазиевклидовом пространстве. Псевдосфера Бельтрами ( $n = 2$ ) – топологически односвязная цилиндрическая поверхность. Гиперболическая геометрия на её 2-х частях тоже увязывается воедино с положительными, нулевым и отрицательными значениями  $\gamma$ . (**Доказательство этого изоморфизма дано в главе 6А.**)*

Отметим, что *изометричность гиперболических геометрий 2-х типов по их равным кривизнам согласуется с теоремой Миндинга* [27, с. 533].

Уравнение овалы абсолюта Кэли в  $\tilde{E}_{1(n)}$  для всех вышеуказанных гиперболических геометрий (2-х внешних и 2-х внутренних) одно и тоже

$$\sum_{k=1}^n x_k^2 = R^2. \text{ Декартова часть универсального бзиса, то есть } \tilde{E}_{1(n)}, \\ \text{ задаёт в «}\mathcal{E}^n\text{» так называемые однородные координаты.}$$

Геометрическая сумма сопутствующих гиперболических пространств и их разделительного конуса, как и геометрическая сумма гиперboloидов Минковского и асимптотического конуса, в суммарной модели отображаются в целом на всю двустороннюю проективную гиперплоскость « $\mathcal{E}^n$ ». В цилиндрической модели они транслируются на боковые поверхности (без разделения), а также на верхнее и нижнее основания проективного гиперцилиндра « $\mathcal{E}^n$ ». Эта полно замкнутая конструкция именно в  $\langle P^{n+1} \rangle$  олицетворяет собой *единое трёхсвязное гиперболическое пространство* с топологией сферы (как “Мир в капле воды”). Обе сопутствующие геометрии с разделительным инвариантным конусом целесообразно трактовать как **единую гиперболическую геометрию** с группой Лоренца, даваемой метрическим рефлектор-тензором в пространстве Минковского!

В обеих моделях сопутствующие гиперболические пространства отображаются проективно внутри и вне абсолюта Кэли радиуса  $R$  на гиперплоскости « $\mathcal{E}^n$ » или на гиперцилиндре « $\mathcal{E}^n$ ». Внешняя односвязная часть суммарного пространства даже может *экзотически* трактоваться как гиперболическое пространство с парой антиподных «чёрных дыр». Их роль выполняют антиподных пространства Лобачевского – Больши, что тождественно его собственной цилиндрической топологии. Простор для фантазий очевиден. Независимо от вариантов воображения топологии всех 3-х составляющих трёхсвязного пространства есть *инварианты*.

Если прямые (то есть геодезические траектории) и их формальные продолжения в двух односторонних тангенсно-котангенсных моделях (внутри и вне абсолюта Кэли) рассматриваются совместно, то тогда их *смежная параллельность* в сопутствующих пространствах обуславливается на проективной гиперплоскости « $\mathcal{E}^n$ » или на проективном гиперцилиндре встречей в какой-либо точке абсолюта (рис. 4).

Гиперболическая траектория (геодезическая) на гиперболоидах I и II представима геометрически как сечение некоторой центральной (и с центром на ней) псевдоплоскостью. Ей тождественна собственная псевдоплоскость тензорного угла  $\Gamma$  в матрице движения  $\{\text{roth } \Gamma\}_{\mathcal{E}}$ , в которой проецируются на  $\langle \mathcal{E}^n \rangle$  тригонометрические функции тангенса и котангенса угла  $\gamma$ . (Именно в этом состоит причина прямолинейности проекций гиперболических геодезических в 2-х проективных моделях!) Гиперболический угол  $\gamma$  в матрице  $\text{roth } \Gamma$  в  $\langle P^{n+1} \rangle$  может быть задан параметрически через *псевдоевклидову длину* « $a_p$ » как  $\gamma = a_p/R$ .

В модели Клейна внутри абсолюта Кэли эта геодезическая – сечение псевдоплоскостью (*в границах сечения*) проецируется в евклидов отрезок прямой, проходящей через круг (2-х мерный вариант) или шар (3-х мерный вариант) в овальном абсолюте. Геодезическая *в целом* отображается соответствующей хордой. Заметим также, что углы между геодезическими в модели Клейна не искажаются при условии, что проективные прямые (для

гиперболоидов II или I) встречаются в центре базиса. Для гиперболоида II это тождественно принадлежности *центрального* элемента  $\mathbf{u}_1$  (рис. 4) пересекающимся геодезическим. В данном случае матрица ротации  $\{\text{roth } \Gamma_{1t}\}_{\tilde{E}_1}$  симметрична и имеет каноническую форму (363), задавая движение элемента  $\mathbf{u}_1$  как исходного по централизованной геодезической.

Для *нецентрального* элемента гиперболоида  $\mathbf{u}_t = \{\text{roth } \Gamma_{1t}\}_{\tilde{E}_1} \cdot \mathbf{u}_1$ . При гиперболическом движении из исходной нецентральной точки  $\mathbf{u}_2$  тогда имеем:  $\mathbf{u}_t = \{\text{roth } \Gamma_{2t}\}_{\tilde{E}_2} \cdot \mathbf{u}_2$ . Ротационная матрица преобразуется, например, координатно активно в общем случае в несимметричную, а именно как  $\{\text{roth } \Gamma_{12} \cdot \text{roth } \Gamma_{2t} \cdot \text{roth}^{-1} \Gamma_{12}\}$  (см. § 11.4.), задавая его движение по произвольной геодезической.

Здесь излагается только общий подход к изучению гиперболических движений в обеих сопутствующих неевклидовых геометриях, а именно как тригонометрической формы однородных преобразований Лоренца с применением тензорной тригонометрии объемлющего псевдоевклидова пространства – подробно об этом в гл. 5А и 7А.

Если центр хорды абсолюта совпадает с центром проектирования О (рис. 4) и является началом отсчёта функции  $\text{th } \gamma < +1$  (условно справа) и  $\text{th } \gamma > -1$  (условно слева), то евклидово расстояние вдоль *внутренней* хорды-геодезической в модели Клейна  $R \cdot \{\text{th } \gamma_{13} - \text{th } \gamma_{12}\}_{\tilde{E}_1} = R \cdot \{\text{th } \gamma_{23}\}_{\tilde{E}_2}$  внутри абсолюта соответствует для  $\tilde{E}_2$  псевдоевклидову  $a_{23} = a_{13} - a_{12}$  и неевклидову расстоянию, выраженному мерой Ламберта  $\gamma_{23} = \gamma_{13} - \gamma_{12}$ , как:

$$a_{23} = a_{13} - a_{12} = R \cdot \gamma_{23} = R \cdot (\gamma_{13} - \gamma_{12}) = R \cdot (\text{arth } \text{th } \gamma_{13} - \text{arth } \text{th } \gamma_{12}) = \\ = 1/2 R \cdot \left[ \ln \frac{1 + \text{th } \gamma_{31}}{1 - \text{th } \gamma_{31}} - \ln \frac{1 + \text{th } \gamma_{21}}{1 - \text{th } \gamma_{21}} \right] = R \cdot \ln \sqrt{\frac{(1 + \text{th } \gamma_{13}) \cdot (1 - \text{th } \gamma_{12})}{(1 - \text{th } \gamma_{13}) \cdot (1 + \text{th } \gamma_{12})}},$$

как и в цилиндрической модели для гиперболоида I (!).

Евклидово расстояние по центральной *внешней* хорде-геодезической в проективной модели вне абсолюта  $R \cdot \{\text{cth } \gamma_{31} - \text{cth } \gamma_{21}\}_{\tilde{E}_1} = R \cdot \{\text{cth } \gamma_{23}\}_{\tilde{E}_2}$  соответствует для  $\tilde{E}_2$  псевдоевклидову и неевклидову расстоянию как:

$$a_{23} = R \cdot \ln \sqrt{\frac{(\text{cth } \gamma_{13} + 1) \cdot (\text{cth } \gamma_{12} - 1)}{(\text{cth } \gamma_{13} - 1) \cdot (\text{cth } \gamma_{12} + 1)}} = R \cdot (\text{archth } \text{th } \gamma_{13} - \text{archth } \text{th } \gamma_{12}).$$

Обе тригонометрические формулы исходят из меры Ламберта и проективного мероопределения Кэли – Клейна. Они отвечают Правилу суммирования коллинеарных гиперболических отрезков – гл. 5А. Для *нецентральных прямых* формулы искажений расстояний и углов см. в гл. 7А.

Идея о возможности реализации полноценной геометрии, в которой не выполняется V-ый постулат Евклида, или справедлива гипотеза острого угла Саккери, на особой поверхности – “какой-нибудь мнимой сфере” (цитата), как известно, впервые была высказана Ламбертом в 1766 г. [21, 24]. Впоследствии было уточнено, что первое её свойство относится к геометрии *в большом*, а второе – к геометрии *в малом*.



(В полноценной геометрии – с полной свободой движения фигур они взаимосвязаны.) Тауринус предложил аналитическую модель такой геометрии на *гипотетической сфере мнимого радиуса* по аналогии с геометрией вещественной сферы. Тем самым он обосновал непротиворечивость её планиметрии. *Интуитивная* геометрия Ламберта–Тауринуса предвосхитила *реальную* геометрию на гиперboloиде II и исторически предшествующий ей вещественный изоморфизм – геометрию Лобачевского – Больяи [7, 24, 31]. Бельтрами показал её реализуемость, но как геометрии в малом, на *особой* (нерегулярной) поверхности евклидова пространства – *псевдосфере* (которую ранее открыл и изучил Миндинг). Проективная модель Бельтрами – Клейна свела проблему её непротиворечивости в целом к таковой для евклидовой геометрии. Гильберт доказал невозможность реализации в трёхмерном евклидовом пространстве двумерной геометрии Лобачевского – Больяи в целом на какой-то вложенной в него *неособой* римановой поверхности, то есть как внутренней геометрии Гаусса [25, 26].

Однако последнее вовсе не означает невозможность её реализации в целом на какой-то седловидной римановой поверхности, вложенной в  $(3+k)$ -мерное евклидово надпространство. Как известно [13], такая поверхность определяется постоянной и отрицательной римановой кривизной. Но если бы удалось описать её как вложение в евклидово надпространство *минимальной* размерности, то именно тогда решение *задачи Бельтрами* [21] было бы доведено в целом до логического конца. (Проблема остаётся для вложения неевклидовых пространств в целом.) Хорошо известно, что определение римановой поверхности и её геометрии оторвано не от объёмлющего евклидова надпространства, а только от его размерности. Апостериори размерность последнего может быть вполне определённой. С другой стороны, имманентная размерность римановой поверхности всегда одна и та же для любого её гомеоморфизма. Она совпадает с размерностью касательного евклидова пространства, обобщившего одномерную касательную к *кривой, самой по себе*. Из напрашивающейся здесь аналогии достаточно указать, что бесконечная регулярная кривая с *постоянной сферической кривизной* не реализуется на плоскости, но зато она реализуется в трёхмерном евклидовом пространстве в виде винтовой линии. Такого же типа кривая, но с *постоянной гиперболической кривизной* легко реализуется на псевдоплоскости в виде гиперболы. Изометричные отображения одной и той же неевклидовой геометрии на различных поверхностях: гиперboloиде II Минковского, плоскости Лобачевского – Больяи, римановой поверхности с постоянной отрицательной кривизной – отличаются весьма значительно по степени сложности и наглядности.

Например, цилиндрическая гиперболическая геометрия реализуется как в псевдоевклидовом пространстве – на гиперboloиде I Минковского, так и в вещественном *квазиевклидовом* пространстве – на псевдосфере Бельтрами как изометрии. Эти гиперболические поверхности имеют одну и ту же постоянную гауссову кривизну  $K_G < 0$  и гомеоморфны.

Суть установления и обоснования их изометрии в целом сводится к следующему. Образующие гиперboloида – гиперболы, продуцирующие его ротацией относительно одномерной оси  $u$ . Далее два преобразования. На 1-м этапе из  $\tilde{E}_1$  в *специальное* квазиевклидово пространство – гиперболы преобразуются в гиперболические косинусоиды, а гиперboloиды в катеноиды I и II; на 2-м этапе косинусоиды преобразуются однозначно развёрткой в трактрисы, а катеноиды при этом в “трактроиды I и II”. Первый из них при  $n = 2$  есть псевдосфера Бельтрами! См. в гл. 6А.

Точечные элементы на гиперboloидах Минковского I и II исходно определяются внешними, псевдоевклидовыми координатами  $\langle x_{\overline{1,n}}, y \rangle$ , например, в  $\tilde{E}_1 = \{\Gamma\}$ . Кроме того, они взаимно-однозначно постоянно определяются специальными угловыми координатами и радиусом  $R$ , но на конкретном гиперboloиде Минковского, где  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{v}$  в  $\tilde{E}_1$  задаются радиус-векторами ( $\mathbf{u} = \{iR\}$  – гиперboloид II,  $\mathbf{v} = \{R\}$  – гиперboloид I). Для элементов гиперboloида II  $\vec{y}$  – реперная ось для отсчёта угла  $\gamma$  («+» на верхней части и «-» на нижней части). Для элементов гиперboloида I  $x_k$  – такая же реперная ось. Внутренние угловые координаты включают в себя параметры:  $\gamma$  (отмеряемый от реперной оси  $\vec{y}$  для гиперboloида II и от реперной оси  $x_k$  в гиперплоскости  $\langle \mathcal{E}^n \rangle$  для гиперboloида I, которая симметрична оси ординат  $\vec{y}$  относительно конуса), а также его направляющие косинусы  $\langle \cos \alpha_{\overline{1,n}} \rangle$  в  $\langle \mathcal{E}^n \rangle$ . Ввиду того что  $\sum_{k=1}^n \cos^2 \alpha_k = 1$ ,

для задания элементов достаточно  $n$  независимых угловых координат!

Между точками *одного и того же* гиперboloида устанавливается парное соответствие из условия равенства их *противолежащих* друг к другу гиперболических углов  $\gamma$  и  $\lambda$ ; и направляющих косинусов (рис.4), а также тригонометрических соотношений (360)  $\text{cth } \gamma \equiv \text{ch } \lambda$ ,  $\text{cosch } \gamma \equiv \text{sh } \lambda$ :  $\mathbf{u}_2 \leftrightarrow \mathbf{u}_3, \mathbf{v}_2 \leftrightarrow \mathbf{v}_3 (\mathbf{u}_\omega, \mathbf{v}_\omega \leftrightarrow \mathbf{u}_\omega, \mathbf{v}_\omega)$ ;  $\gamma_{12} = \lambda_{13} \leftrightarrow \lambda_{12} = \gamma_{13}$ ;  $\gamma = \omega = \lambda$ ,  $\omega = \text{Arsh } 1$ ,  $\cos \alpha_k = \text{const}_k$  (см. § 6.4). Угол  $\lambda$  – комплементарный, но  $\gamma + \lambda < \delta = \infty$ !

Между точками *различных* гиперboloидов I и II также устанавливается парное соответствие. Оно задаётся из условия равенства их одноимённых друг к другу гиперболических угловых координат и направляющих косинусов (рис.4):  $\mathbf{u}_2 \leftrightarrow \mathbf{v}_2, \mathbf{u}_3 \leftrightarrow \mathbf{v}_3 (\mathbf{u}_\omega \leftrightarrow \mathbf{v}_\omega)$ ;  $\gamma_{12_{II}} = \gamma_{12_I} \leftrightarrow \lambda_{12_{II}} = \lambda_{12_I}, \gamma_{13_I} = \gamma_{13_{II}} \leftrightarrow \lambda_{13_{II}} = \lambda_{13_I}, \cos \alpha_k = \text{const}_k$ . С геометрической точки зрения это соответствие означает зеркальную симметрию пары точечных элементов  $\mathbf{u}_I$  и  $\mathbf{v}_I$  относительно конуса.

**Исключение:** точечный элемент  $\mathbf{u}_1 \rightarrow \mathbf{v}_1$  только при задании направляющих всех косинусов  $\cos \alpha_k$ , но  $\mathbf{v}_1 \rightarrow \mathbf{u}_1$  ( $\cos \alpha_k = \text{const}_k$ ).

То есть гиперboloид I, в отличие от II, есть особая гиперповерхность. С этим исключением, любая нецентральная точка на гиперboloиде II может относительно центра O взаимно-однозначно отображаться через конус в такую точку на гиперboloиде I, а в проективной модели – через абсолют Кэли. В плоском тангенсно-котангенсном отображении гиперboloидов II и I два абсолюта Кэли, ( $\gamma \rightarrow \infty$ ,  $\text{th } \gamma \rightarrow 1$ ,  $\text{cth } \gamma \rightarrow 1$ ) – их бесконечно удалённые периферии. Центральный пояс гиперboloида I – условный конец и начало отсчёта  $\gamma_1 = \infty$ ,  $\lambda_1 = 0$ , а в проективной модели он же – бесконечно удалённая условная граница « $\mathcal{E}^n$ ».

При выполнении однородных преобразованиях Лоренца универсального базиса  $\tilde{E}_1 = \{I\}$  исходная реперная точка  $C_{II}$  на оси  $\tilde{Y}$ , от которой в  $\tilde{E}_1$  отсчитываются углы  $\gamma_{II}$ , перемещается по гиперboloиду II в любую другую его точку  $C'_{II}$  (в пределах одной его части). При этом её исходная тангенсная проекция O в модели Клейна перемещается из центра абсолюта в соответствующую точку  $O'_{II}$  внутри абсолюта. От этой точки отсчитываются угловые расстояния (отрезки) внутри абсолюта мерой Ламберта  $\gamma_{II}$  в новом псевдодекартовом базисе.

Аналогичным образом, при тех же преобразованиях  $\tilde{E}_1 = \{I\}$  точка  $C_I$  с направляющими косинусами  $\langle \cos \alpha_{I,n} \rangle$ , от которой в  $\tilde{E}_1$  отсчитываются углы  $\gamma_I$ , перемещается по гиперboloиду I в любую другую его точку  $C'_I$  (причём  $C'_I \leftrightarrow C'_{II}$ ). При этом её исходная котангенсная проекция  $O_1^\infty$  в модели Клейна перемещается из бесконечно удалённой точки (на границе « $\mathcal{E}^n$ ») в соответствующую точку  $O'_I$  вне абсолюта. От этой точки отсчитываются угловые расстояния (отрезки) вне абсолюта мерой Ламберта  $\gamma_I$  в новом псевдодекартовом базисе.

Следует отметить, что тензорные углы  $\Gamma$  и  $\Lambda$ , как и бесконечный прямой угол  $\Delta$  – все в одном и том же псевдоевклидовом прямоугольном треугольнике согласованы тригонометрически между собой (§ 6.4). В псевдоевклидовом прямоугольном треугольнике – 2 стороны (катеты) и гипотенуза всегда на конусе (рис.4). Противолежущие этим катетам углы  $\gamma$  и  $\lambda$  здесь дополнительные друг к другу, но не  $\kappa \delta = \infty!$  То же относится к углам  $\Gamma$  и  $\Lambda$ . С учётом формул (331), (358)–(360), в  $\tilde{E}_1 = \{I\}$ :  $\text{sh}(\gamma, \lambda) \equiv \text{cosech}(\lambda, \gamma)$ ,  $\text{sh}(\Gamma, \Lambda) \equiv \text{cosech}(\Lambda, \Gamma)$ , или  $\text{sh}(\Gamma, \Lambda) \cdot \text{sh}(\Lambda, \Gamma) = I$ , отсюда  $\gamma = \omega = \lambda$ ,  $\Gamma = \Omega = \Lambda$ ;  $\text{ch}(\gamma, \lambda) \equiv \text{cth}(\pm \lambda, \gamma)$ ,  $\text{ch}(\Gamma, \Lambda) \equiv \text{cth}(\pm \Lambda, \Gamma)$ ;  $\text{th}(\pm \gamma, \lambda) \equiv \text{sech}(\lambda, \gamma)$ ,  $\text{th}(\pm \Gamma, \Lambda) \equiv \text{sech}(\Lambda, \Gamma)$ ;

$\text{ch}^2(\Gamma, \Lambda) - \text{sh}^2(\Gamma, \Lambda) = I = \text{cth}^2(\Lambda, \Gamma) - \text{cosech}^2(\Lambda, \Gamma)$  – инварианты в  $\langle P^{n+1} \rangle$ ;

$\text{th}^2(\Gamma, \Lambda) + \text{sech}^2(\Gamma, \Lambda) = I = \text{sech}^2(\Lambda, \Gamma) + \text{th}^2(\Lambda, \Gamma)$ , где  $|\gamma| + |\lambda| < |\delta| = +\infty$ .

**Следствие:** сумма абсолютных значений углов  $\gamma$  и  $\lambda$  псевдоевклидова прямоугольного треугольника меньше прямого угла  $\delta$ . См. также (360).

Эта связь гиперболических углов  $\gamma$  и  $\lambda$  в прямоугольном треугольнике приводит к тому, что перекрёстное проецирование для котангенса и coseканса углов  $\gamma$  и  $\lambda$  эквивалентно обычному для косинуса и синуса углов  $\lambda$  и  $\gamma$  как на (рис. 4)! В псевдоевклидовом пространстве, согласно (324), (326) и (363) – (365), если привести формы матриц от углов в базис  $\tilde{E}$ , то имеем:

$$\left. \begin{aligned} \text{roth } \Gamma &= F_1(\gamma, \mathbf{e}_\alpha) = \text{ch } \Gamma + \text{sh } \Gamma \equiv F_2(\lambda, \mathbf{e}_\alpha) = \text{cth}(\pm \Lambda) + \text{cosh } \Lambda, \\ \text{defh } \Gamma &= F_3(\gamma, \mathbf{e}_\alpha) = \text{sech } \Gamma + i \cdot \text{th } \Gamma \equiv F_4(\lambda, \mathbf{e}_\alpha) = \text{th}(\pm \Lambda) \pm i \cdot \text{sech } \Lambda. \end{aligned} \right\} (496)$$

Заметим: после замены в (324), (496) тензорного угла  $\Gamma$  дополнительным углом  $\Lambda$  с использованием вышеуказанных формул, новая – *котангенс-косекансная* матрица-функция от  $\Phi$  даёт ротацию на дополнительный угол  $\Lambda$ ! (Как и в сферическом случае – § 5.8.) Новая ротационная матрица по-прежнему совместна с рефлектор-тензором. Но здесь имеем:  $\text{Roth } \Gamma \cdot \text{Roth } \Lambda = \text{Roth}(\Gamma + \Lambda) \neq \text{Roth } \Delta = \infty$ , т. к.  $|\gamma| + |\lambda| < |\delta| = \infty$ .

Что особенно важно, с использованием сферическо-гиперболической аналогии абстрактного типа (323) осуществляется естественно и просто преобразование сначала в базисе  $\tilde{E}_1$  законов движения в гиперболической геометрии в законы движений в сферической геометрии. Ранее такой же подход, но в обратную сторону применялся при выводе структур матриц гиперболических ротаций (363), (364) из уже доказанных структур матриц сферических ротаций (313), (314) с реперной осью.

Изоморфизм движений (ротаций) в объемлющем «квазиевклидовом, псевдоевклидовом» пространстве и движений (ротаций) на вложенной «сферической, гиперболической» гиперповерхности отождествляет внешнюю ротационную тригонометрию объемлющего пространства и внутреннюю геометрию гиперповерхности с данным инвариантом  $R$ .

## § 12.2. Ротации и деформации в псевдоевклидовом пространстве Минковского

Далее на примере простейших псевдоевклидовых пространств Минковского  $\langle P^{n+1} \rangle$ , где  $n \leq 3$ , покажем: как работает полярная формула (474) для классификации возможных псевдоевклидовых ротаций, или непрерывных однородных движений Лоренца. Разумеется, данная формула применима для этого и в более сложных случаях.

При  $n = 1$  возможна только элементарная гиперболическая ротация, автоматически согласованная с рефлектор-тензором. Эта ротация реализуется геометрически как движение по гиперболам – как на рис. 3.

При  $n = 2$  возможны элементарная сферическая ротация в пределах множества централизованных плоскостей в трёхмерной внешней полости изотропного конуса и элементарная гиперболическая ротация

в пределах множества централизованных псевдоплоскостей с осью  $\vec{u}$  в трёхмерной внутренней полости конуса. Эти ротации реализуются как движения по ортосферическим и гиперболическим траекториям на двумерных гиперблоидах Минковского I и II.

При  $n=3$  возможны как элементарная сферическая ротация в пределах множества централизованных плоскостей в четырёхмерной внешней полости конуса, так и элементарная гиперболическая ротация в пределах множества централизованных псевдоплоскостей с осью  $\vec{u}$  в четырёхмерной внутренней полости конуса). Эти ротации реализуются как движения по сферическим и гиперболическим траекториям на трёхмерных гиперблоидах Минковского I и II.

Итак, при  $n \leq 3$  и  $q = 1$  любые тригонометрические ротации Лоренца, согласно (474), сводятся к однократной элементарной ортосферической ротации  $\text{rot } \Theta$  и затем однократной элементарной гиперболической ротации  $\text{roth } \Gamma$ , согласованным с рефлектор-тензором псевдоевклидова пространства Минковского. Сферическая ротация элементарна, в силу того что  $n \leq 3$  в структуре (473). Гиперболическая ротация элементарна в любом пространстве Минковского.

В данном случае между  $\text{rot } \Theta$  и  $\text{roth } \Gamma$  имеется принципиальное отличие, заключающееся в формах их представлений. Гиперболическая ротация имеет реперную ось  $\vec{u}$  для отсчёта угла  $\gamma$ . Её структуры (363), (364) и псевдоплоскость ротации  $\gamma$  определяются вектором направляющих косинусов (выраженных в декартовой части базиса). Форма представления  $\text{rot } \Theta$  определяется только её общей структурой (473). Например, в  $\langle P^{2+1} \rangle$  её  $2 \times 2$ -блок есть элементарная сферическая ротационная клетка. Однако в  $\langle P^{3+1} \rangle$  её  $3 \times 3$ -блок  $\text{rot } \Theta_{3 \times 3}$  целесообразно представить как сферическую ротацию с фиксированной нормальной осью  $\mathbf{r}_N$  [27, с.447-448]. Структура и плоскость ротации  $\theta$  определяются вектором направляющих косинусов нормальной оси ротации  $\mathbf{r}_N \in \langle \mathcal{E}^3 \rangle$  (выраженных в декартовой части базиса):

$\text{rot } \Theta$

$\cos \theta + \frac{r_1^2}{1 + \cos \theta}$	$-r_3 + \frac{r_1 \cdot r_2}{1 + \cos \theta}$	$+r_2 + \frac{r_1 \cdot r_3}{1 + \cos \theta}$	0
$+r_3 + \frac{r_1 \cdot r_2}{1 + \cos \theta}$	$\cos \theta + \frac{r_2^2}{1 + \cos \theta}$	$-r_1 + \frac{r_2 \cdot r_3}{1 + \cos \theta}$	0
$-r_2 + \frac{r_1 \cdot r_3}{1 + \cos \theta}$	$+r_1 + \frac{r_2 \cdot r_3}{1 + \cos \theta}$	$\cos \theta + \frac{r_3^2}{1 + \cos \theta}$	0
0	0	0	1

(497)

Пусть  $\cos \sigma_k$  и  $\cos \bar{\sigma}_k$  ( $k = 1, 2, 3$ ) – направляющие косинусы углов  $\Gamma$  и  $\bar{\Gamma}$  из (474), (475) в структуре (363);  $\mathbf{e}_\sigma = \{\cos \sigma_k\}$  и  $\mathbf{e}_{\bar{\sigma}} = \{\cos \bar{\sigma}_k\}$  – единичные векторы направляющих косинусов в структуре (364). Применяя ротацию (476), последовательно имеем (напомним  $\mathbf{e} \cdot \mathbf{e}' = \overleftarrow{\mathbf{e}} \cdot \mathbf{e}'$ ):

$$\left. \begin{aligned} \text{rot}' \Theta_{3 \times 3} \cdot \{\mathbf{e}_\sigma \cdot \mathbf{e}'_\sigma\} \cdot \text{rot} \Theta_{3 \times 3} &= \mathbf{e}'_{\bar{\sigma}} \cdot \mathbf{e}'_{\bar{\sigma}}, \\ \mathbf{e}'_{\bar{\sigma}} &= \text{rot}' \Theta_{3 \times 3} \cdot \mathbf{e}_\sigma = \text{rot} (-\Theta_{3 \times 3}) \cdot \mathbf{e}_\sigma, \end{aligned} \right\} (\mathbf{e}'_{\bar{\sigma}} \cdot \mathbf{e}_\sigma = \cos \theta_{13} = \mathbf{e}'_{\bar{\sigma}} \cdot \mathbf{e}_\sigma). \quad (498)$$

В  $\langle P^{3+1} \rangle$  единичные векторы  $\mathbf{e}'_{\bar{\sigma}}$  и  $\mathbf{e}_\sigma$  в силу (498) однозначно задают нормальную ось ротации  $\text{rot} \Theta$  через векторное (синусное) произведение:

$$\mathbf{r}_N \begin{matrix} \Gamma_1 \\ \Gamma_2 \\ \Gamma_3 \end{matrix} = \mathbf{e}'_{\bar{\sigma}} \otimes \mathbf{e}_\sigma = \begin{matrix} \cos \bar{\sigma}_2 \cdot \cos \sigma_3 - \cos \bar{\sigma}_3 \cdot \cos \sigma_2 \\ \cos \bar{\sigma}_3 \cdot \cos \sigma_1 - \cos \bar{\sigma}_1 \cdot \cos \sigma_3 \\ \cos \bar{\sigma}_1 \cdot \cos \sigma_2 - \cos \bar{\sigma}_2 \cdot \cos \sigma_1 \end{matrix} = \sin \theta \cdot \mathbf{e}_N. \quad (499)$$

( $\det \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_N\} > 0$ )

Если векторы  $\mathbf{e}'_{\bar{\sigma}}$ ,  $\mathbf{e}_\sigma$ ,  $\mathbf{r}_N$  образуют *правую тройку*, что отвечает отсчёту угла  $\theta > 0$  в  $\langle \mathcal{E}^2 \rangle$  против часовой стрелки и знаку «–» при *тензорном*  $\Theta$  в (498), исходя из (476), то в (499)  $\theta > 0$ ; если *левую тройку*, то в (499)  $\theta < 0$ . Это универсальное **Правило** для нахождения в  $\langle P^{3+1} \rangle$  знака угла  $\theta$  и  $\sin \theta$ . Его задаёт геометрия и внешний угол  $\varepsilon$  между движениями – гл. 7А и 8А! В  $\langle P^{2+1} \rangle$  знак угла  $\theta_{13}$  обратный знаку угла  $\varepsilon$  между движениями  $\gamma_{12}$  и  $\gamma_{23}$ .

*Модуль синуса:*  $|\sin \theta| = \|\mathbf{r}_N\| = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 + r_3^2}$ ;  $\text{tr rot} \Theta = 2 \cdot (\cos \theta + 1)$ .

Наряду с чисто гиперболическими и сферическими ротациями в псевдоевклидовом пространстве Минковского представляют особый интерес, *именно в универсальном базисе*  $\bar{E}_1$ , допустимые элементарные гиперболические деформации. В своей тригонометрической форме они представлены в (496). В базисе своего задания они имеют структуру типа (365) и совершаются в псевдоплоскости, соответствующей углу  $\Gamma$ . Направляющие косинусы для матриц  $\text{roth} \Gamma$  и  $\text{defh} \Gamma$  тождественны. В базисе диагонального косинуса эти матрицы и рефлектор-тензор имеют общую бинарно-клеточную структуру:

$$\left\{ \text{defh} \Gamma \right\}_{\text{can}} \quad \left\{ \text{roth} \Gamma \right\}_{\text{can}} \quad I^{\oplus} (q=1)$$

$$\begin{matrix} \text{sch } \gamma & -\text{th } \gamma \\ \text{th } \gamma & \text{sch } \gamma \end{matrix}, \quad \begin{matrix} \text{ch } \gamma & \text{sh } \gamma \\ \text{sh } \gamma & \text{ch } \gamma \end{matrix}, \quad \begin{matrix} +1 & 0 \\ 0 & -1 \end{matrix}.$$

Из прародительской структуры, аналогично (471), порождается *чистый* тип гиперболической деформационной матрицы:

$$\left. \begin{aligned} R_w \cdot \left\{ \text{defh} \Gamma \right\}_{\text{can}} \cdot R_w' &= \text{defh} \Gamma, \\ \text{defh}' \Gamma \cdot \text{defh} \Gamma &= I = \text{defh} \Gamma \cdot \text{defh}' \Gamma, \quad (\det \text{defh} \Gamma = +1). \end{aligned} \right\} \quad (500)$$

Деформационные преобразования, разумеется, не относятся к группе Лоренца, так как не удовлетворяют условию (460). Хотя соотношения (500) по форме и совпадают с (470) для  $\text{rot } \Theta$ . Но согласования матриц  $\text{rot } \Theta$  и  $\text{defh } \Gamma$  с рефлектор-тензором  $I^{\oplus}$  осуществляются различно. А именно, первые согласуются по его единичному блоку, а вторые согласуются по какой-либо его знакопеременной  $2 \times 2$ -клетке. Иначе говоря, первые действуют в плоскостях, а вторые – в псевдоплоскостях. Хотя матрицы  $\text{defh } \Gamma$  не удовлетворяют псевдоевклидову метрическому соотношению (460), но в универсальном базисе они удовлетворяют квазиевклидову метрическому соотношению, что видно из формул (500). Поэтому для деформационной матрицы в псевдоплоскости деформации действует *перекрёстный квазиевклидов инвариант* (см. ранее об этом в § 5.10). Согласно сферическо-гиперболической аналогии конкретного, синус-тангенсного типа в  $\tilde{E}_1$ , имеем:

$$\begin{array}{ccc} \text{defh } \Gamma \equiv \text{rot } \Phi(\Gamma) & \leftrightarrow & \text{th } \Gamma \equiv \sin \Phi(\Gamma) \\ \updownarrow & & \updownarrow \\ \text{roth } \Gamma \equiv \text{def } \Phi(\Gamma) & \leftrightarrow & \text{sh } \Gamma \equiv \text{tg } \Phi(\Gamma). \end{array}$$

Ввиду того что все матрицы действуют в одной и той же псевдоплоскости, то и согласуются с рефлектор-тензором сходным образом:

$$\begin{aligned} \text{defh } \Gamma \cdot I^{\oplus} \cdot \text{defh } \Gamma &= \text{rot } \Phi(\Gamma) \cdot I^{\oplus} \cdot \text{rot } \Phi(\Gamma) = \\ &= \text{roth } \Gamma \cdot I^{\oplus} \cdot \text{roth } \Gamma = \text{def } \Phi(\Gamma) \cdot I^{\oplus} \cdot \text{def } \Phi(\Gamma) = I^{\oplus}. \end{aligned}$$

Важно отметить, что все эти четыре соотношения в универсальном базисе  $\tilde{E}_1$  имеют место как в гиперболической, так и в сферической геометриях. Поэтому они представлены здесь в самом общем виде – через углы ротации  $\Gamma$  и  $\Phi$  с рефлектор-тензором  $I^{\oplus} \equiv \text{Ref}$ . Основное различие между ними заключается в том, что в гиперболической геометрии в допустимом псевдоевклидовом базисе в  $\langle P^{n+1} \rangle$  действует определяющее главные движения соотношение  $\text{roth } \Gamma \cdot I^{\oplus} \cdot \text{roth } \Gamma = I^{\oplus}$ ; с другой стороны, в сферической геометрии в допустимом квазиевклидовом базисе в  $\langle Q^{n+1} \rangle$  действует определяющее главные движения соотношение  $\text{rot } \Phi \cdot I^{\oplus} \cdot \text{rot } \Phi = I^{\oplus}$ . Во внешних вариантах они реализуются на собственных гиперболоидах Минковского I и II в псевдоевклидовом пространстве  $\langle P^{n+1} \rangle$  (первое) и на собственном гиперсфереоиде в квазиевклидовом пространстве  $\langle Q^{n+1} \rangle$  (второе).

Основные свойства деформационных матриц и преобразований сходны с таковыми для ротационных. Но для них Правило №2, в части алгебраического суммирования тригонометрически согласованных углов-аргументов, не выполняется. (Хотя коммутативность матриц с согласованными углами сохраняется.) Деформационные матрицы

целесообразно применять в  $\langle P^{n+1} \rangle$ , например, при *перекрёстном* (недекартовом) проецировании, то есть при определении перекрёстных координат или перекрёстных проекций. Такое проецирование в  $\langle P^{3+1} \rangle$  формально математически интерпретирует *лоренцево сокращение* пространственных образов линейных объектов в направлении их физического движения. Согласно исконной блочной структуре (442), для деформационных матриц имеют место соотношения – аналоги (482).

### § 12.3. Специальный математический принцип относительности

Все утверждения, относящиеся к «евклидовой, квазиевклидовой, псевдоевклидовой» геометрии за вычетом её аффинной части, имеют место именно в «декартовом, кваздекартовом, псевдодекартовом» базисе «евклидова, квазиевклидова, псевдоевклидова» пространства. Любая геометрия с квадратичным инвариантом (или *квадратичная геометрия*) как свод утверждений по их форме никак не связана с выбором конкретного допустимого базиса за исходный единичный базис. Иначе говоря, «евклидова, квазиевклидова, псевдоевклидова» геометрия инвариантна по отношению к преобразованиям, осуществляющим переход от одного вышеуказанного базиса к другому, то есть она инвариантна к ортогональным, квазиортогональным, псевдоортогональным преобразованиям и к операции трансляции (переноса в однородном пространстве). (Ориентация в указанных пространствах сохраняется именно при непрерывных преобразованиях.)

Это *специальный математический принцип относительности*, действующий в любой плоской (квадратичной) геометрии, в частности, в псевдоевклидовой геометрии Минковского. Применительно к СТО ему же тождествен *специальный физический принцип относительности Пуанкаре*. Он заключается в форминвариантности физических законов в равномерно и прямолинейно движущихся системах отсчёта (вплоть до околосветовых скоростей), или относительно преобразований Лоренца. Оба принципа связывает *физико-математический изоморфизм*.

Ротационные преобразования Лоренца в активной форме оставляют инвариантными в целом каждую полость асимптотического конуса и сам конус. Но при этом собственные подпространства  $\langle \mathcal{E}^n \rangle$  и  $\langle \mathcal{E}^q \rangle$  неинвариантны и преобразуются согласно изменению базиса. Хотя они вместе со своими координатными осями всегда находятся в своих полостях изотропного конуса – внешней и внутренней. Кроме того,  $\langle \mathcal{E}^n \rangle$  и  $\langle \mathcal{E}^q \rangle$  преобразуются всегда так, что обязательно составляют прямую сумму и остаются гиперболически ортогональными друг к другу.



Поэтому одноиндексные  $\langle \mathcal{E}^n \rangle$  и  $\langle \mathcal{E}^q \rangle$  относительно, но *взаимозависимы как ортогональные дополнения в псевдоевклидовом пространстве*  $\langle P^{n+q} \rangle$ . В соответствии с (462) каждое из них является взаимно-однозначной функцией от другого. В СТО данное соотношение даёт математическую формулировку закона Пуанкаре – Эйнштейна об относительности, взаимозависимости и единстве пространства и времени ( $n = 3, q = 1$ ). Но само псевдоевклидово пространство  $\langle P^{n+q} \rangle$ , как и пространство-время Минковского  $\langle P^{3+1} \rangle \equiv \langle \mathcal{E}^3 \oplus \vec{ct} \rangle$ , – в целом абсолютно, то есть оно в целом инвариантно по отношению к преобразованиям Лоренца (как его полное множество точек-элементов данной структуры).

В четырёхмерном пространстве-времени Лагранжа  $\langle \mathcal{E}^3 \oplus t \rangle$  законы нерелятивистской физики (механики), выраженные в инерциальных системах отсчёта, как и соответствующая *евклидово-аффинная геометрия* в нём, инвариантны по форме к преобразованиям Галилея. Это *специальный принцип относительности Галилея* в общей физико-математической форме. С математической точки зрения пространство-время Лагранжа – *бинарное евклидово-аффинное пространство*  $\langle \mathcal{E}^n \oplus \mathcal{A}^q \rangle$  с  $n = 3$  и  $q = 1$  с допустимыми в нём преобразованиями Галилея. Пространство-время Лагранжа в целом абсолютно, то есть инвариантно относительно последних (как множество точек данной структуры). По отношению к *активным* однородным преобразованиям Галилея евклидово подпространство  $\langle \mathcal{E}^3 \rangle$  в целом и скалярное время  $t$  тоже инвариантны; но стрела времени  $\vec{t}$  неинвариантна (каждый раз это какая-либо мировая линия). Она претерпевает, в том числе возможно на дифференциальном уровне, особое линейное преобразование – *параллельную ротацию* относительно  $\langle \mathcal{E}^3 \rangle$  (сочетающее поворот на угол  $\varphi$  от исходной  $\vec{t}$  и компенсационное растяжение с коэффициентом  $\sec \varphi$ ). Данная ротация как бы промежуточная между сферической и гиперболической. Кроме того,  $\langle \mathcal{E}^3 \rangle$  и  $\vec{t}$  могут смещаться на вектор параллельного переноса. Евклидово подпространство и время образуют здесь единство, так как составляют прямую сумму, но они не взаимозависимы. Евклидово-аффинная геометрия по форме своих утверждений никак не связана с выбором конкретного бинарного декартово-аффинного базиса за исходный единичный базис. В универсальном базисе  $\vec{E}_1 = \{\mathbb{I}\}$ , как принято ранее, 4 координатные оси как бы ортонормированы. Допустимые базисы связаны общими непрерывными преобразованиями Галилея. Отметим, что евклидово-аффинная геометрия пространства-времени Лагранжа (индекса 1), отвечающая принципу относительности Галилея, тождественна “параболической” геометрии Клейна из его знаменитой Эрлангенской программы [26]. (Это было установлено в XX столетии в ряде математических исследований по неевклидовым геометриям и их связям с физикой [50].

С другой стороны, в  $\langle P^{3+1} \rangle$  при общих непрерывных преобразованиях Лоренца тензорные объекты подвергаются относительно базиса согласованным с данным рефлектор-тензором элементарным ортосферическим и гиперболическим ротациям, а также операции параллельного переноса. При этом исходные пространственные образы объектов подвергаются элементарной гиперболической деформации.

Именно гиперболические ротации и деформации с тригонометрической точки зрения ответственны за релятивистский характер преобразований Лоренца – Пуанкаре – Эйнштейна в абсолютном четырёхмерном пространстве-времени Минковского. Гиперболические ротации и деформации в элементарных канонических формах (363), (365) выражаются в универсальном базисе как в исходном, то есть как базисе относительно неподвижного наблюдателя.

Между тензорной тригонометрией в псевдоевклидовом пространстве Минковского, геометрией на гиперболоидах Минковского I и II и общей гиперболической неевклидовой геометрией в сопутствующих пространственных топологических формах устанавливается отношение изоморфизма. Между сферической и гиперболической неевклидовыми геометриями на основе как абстрактной, так и конкретной сферическо-гиперболических аналогий устанавливается формальная взаимосвязь, позволяющая в итоге увязать их собственные движения в единой теории в рамках тензорной тригонометрии надпространств  $\langle P^{n+1} \rangle$  и  $\langle Q^{n+1} \rangle$ .

Вышеизложенное позволяет создать как отдельное приложение тензорные тригонометрические модели кинематических (также в их динамике) преобразований в теории относительности, и движений различной сложности в неевклидовых геометриях гиперболического и сферического типа.



## **Тригонометрические модели движений в неевклидовых геометриях и в теории относительности**

### **Введение**

В Приложении излагается конкретное применение тензорной тригонометрии в элементарных ротационной и деформационной формах к теоретическому анализу движений в неевклидовых геометриях и в теории относительности. Поясним кратко его содержание.

На основе сферическо-гиперболической аналогии конкретного типа показан геометрический смысл сферического угла параллельности  $\Pi(a)$  Лобачевского, проявляемый в объемлющих квази- и псевдоевклидовом пространствах индекса 1, при этом в пространстве Минковского только в универсальном базисе как сферический аналог гиперболического угла. В СТО этот базис отвечает относительно неподвижному инерциальному наблюдателю и в отличие от сферического аналога угла движения, он как гиперболический угол движения имеет неискажённый геометрический смысл в любых псевдодекартовых инерциальных базисах. (Глава 1А.)

Определены канонические формы тригонометрических тензоров основного движения и деформации. Показано, что именно эти тензоры обуславливают математически релятивистские эффекты замедления времени и сокращения протяжённости для движущихся объектов. Выявлены компоненты (по две проекции) этих эффектов с надлежащей тригонометрической и физической интерпретацией. (Главы 2А – 4А.)

С целью суммирования двух или любого иного количества движений (скоростей), а также для его тригонометрического анализа используется полярное разложение общего (суммарного) тензора движения. Закону суммирования движений (скоростей) придана генеральная форма, полученная в соответствии с правилом последовательного применения линейных преобразований. Изучены четырёхмерные тензорные тригонометрические модели кинематики и динамики СТО.

Показана взаимосвязь между конкретными тригонометрическими характеристиками и хорошо известными физическими параметрами движущихся объектов – как инерциально, так и неинерциально в псевдоевклидовом пространстве-времени Минковского. Изложена тензорно-тригонометрическая трактовка физического движения по мировым линиям сначала в  $\langle P^{1+1} \rangle$  и в  $\langle P^{2+1} \rangle$ . Получен релятивистский гиперболический аналог формулы Циолковского. (Главы 5А и 7А.)

В результате изоморфного преобразования времени подобной части псевдоевклидова пространства-времени  $\langle P^{2+1} \rangle$  продуцировано специальное квазиевклидово неинерциальное пространство-время с евклидовой квадратичной метрикой. В нём отображены мировые линии, а также трактриса и псевдосфера Бельтрами как подобные фигуры от одного параметра. (Глава 6А.)

Установлена теорема о приведении суммы двух неколлинеарных движений к биортогональной квадратичной форме – коммутативной для евклидовой и некоммутативной для неевклидовых геометрий. Установлены формулы вычисления и тригонометрическая интерпретация побочной ортосферической ротации, имеющей место только для неточечных объектов, в том числе координатного базиса, возникающей при неколлинеарном (негеодезическом) движении. Частный её случай описывает скалярная формула Зоммерфельда для прецессии Томаса при ортогональном суммировании двух скоростей. Доказана количественная тождественность угла ортосферической ротации и угловой девиации Гаусса – Бонне (от евклидовой) для двумерных замкнутых фигур, образуемых в процессе суммирования геодезических отрезков на гиперблоидах Минковского или на гиперсфероиде – поверхностях постоянных радиуса (или кривизны). Для геометрических объектов квазиевклидова и псевдоевклидова пространства индекса 1 возможно бесконечное множество разнообразных проективных преобразований. Показано, что любые тригонометрические проективные отображения гиперсфероида и гиперблоидов Минковского I и II на проективную гиперплоскость и проективный гиперцилиндр дают модели неевклидовых сферической и двух сопутствующих гиперболических геометрий. Для отображения движений в модели Клейна (внутри и вне абсолюта) тригонометрическим методом вычислены все коэффициенты искажения неевклидовых расстояний и углов. (Главы 7А и 8А.)

Глава 9А Приложения имеет в основном дискуссионный характер и приводится только для целостности изучаемого тригонометрического представления релятивистских движений в теории относительности. Известно, что ОТО в своей изначальной *геометрической* интерпретации А. Эйнштейна в силу ряда выявленных в ней противоречий принимается далеко не всеми специалистами в области теории гравитации и небесной механики. Иные точки зрения отображены в известных научных трудах,

например: Бриллюэн Л. «Новый взгляд на теорию относительности» – М.: Мир, 1972; Боулер М. «Гравитация и относительность» – М.: Мир, 1979, а также в фундаментальных публикациях в научных журналах, например: Дикке Р. «Гравитация без принципа эквивалентности» Rev. Mod. Phys., v. 29, p. 363 (1957); Тирринг В. «Альтернативный подход к теории тяготения» Annals of Physics. v. 16, p. 96 (1961). Поэтому рассмотрение любых обобщений СТО с теорией тяготения до сих пор имеет гипотетический характер и подлежит свободному непредвзятому научному обсуждению. Автор данной монографии исходит из принципа максимальной простоты и непротиворечивости теории общепринятым фундаментальным законам Природы и данным наблюдений.

Показано, что основные и достаточно хорошо известные и изученные *общерелятивистские* эффекты, наблюдаемые в Солнечной системе, интерпретируются даже элементарным образом в базовом пространстве-времени Минковского, связанном с априори инерциальной системой Маха. Последнее отвечает, например, чисто полевой (*негеометрической*) релятивистской теории гравитации (РТГ). Эта общая физическая теория как фундаментально обоснованная концепция впервые была изложена М. Боулером (1976 г.) в вышеуказанной известной учебной монографии. Аналогичная, но более развёрнутая по содержанию концепция РТГ была развита позднее в публикациях академика А. А. Логунова с рядом коллег-соавторов из МГУ. В связи с этим далее показаны дополнительные возможности для применения тензорной тригонометрии в теории относительности. (Глава 9А.)

С использованием изоморфного тригонометрического отображения координат материальной точки и её мировой линии из эффективного (*наблюдательного* сквозь поле гравитации как линзу) псевдориманова пространства-времени в базовое псевдоевклидово пространство-время (оба в РТГ имеют топологию аффинного пространства) рассмотрена неискажённая гравитацией тригонометрическая модель абсолютного движения материи, в том числе при дополнительном воздействии сил разной природы. Развита четырёхмерная псевдоаналог классической теории Френе–Серре применительно к мировым линиям в пространстве-времени Минковского. Установлены четыре группы параметров абсолютного движения в  $\langle P^{3+1} \rangle$ : мгновенные скалярные и векторные дифференциально-геометрические характеристики мировой линии, которые полностью определяют её ориентацию и конфигурацию, кинематику и динамику материальной точки в окрестности собственной мировой точки. Вычислены все три абсолютные кривизны, связанные с мировыми тригонометрическими ротациями неточечных объектов (от первого до третьего порядка) с их направлениями. (Глава 10А.)

## Дополнительные обозначения для характеристик в псевдоевклидовом пространстве

- $\vec{x}^{(k)}$  – пространственная проекция мировой точки или материальной точки в базисе  $\tilde{E}_k$  в псевдоевклидовом пространстве  $\langle P^{3+1} \rangle$ ,  
 $x_j^{(k)}$  – пространственная координата мировой точки в базисе  $\tilde{E}_k$ ,  
 $\chi$  и  $\chi = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$  – собственная пространству подобная абсцисса как ось или точки в базисе  $\tilde{E}_1$  или точки мировой линии  $\vec{x}^{(1)} = f(ct^{(1)})$ ,  
 $ct^{(k)}$  – стрела координатного времени в базисе  $\tilde{E}_k$ ,  
 $\tilde{t}^{(k)}$  – координатное время в базисе  $\tilde{E}_k$ ,  
 $c$  – скорость света в вакууме (пустоте),  
 $\tau$  – собственное время, отсчитываемое от  $\tau = 0$  в подвижном базисе  $\tilde{E}_m$ ,  
 $ct$  – мировая линия, инвариантная в любом базисе  $\tilde{E}_k$ ,  
 $\vec{c}\tilde{\tau}^{(m)}$  – текущая стрела собственного времени, касательная в точке  $M$  к мировой линии в мгновенном подвижном базисе  $\tilde{E}_m$ ,  
 $\mathbf{c} = c \cdot \mathbf{i}$  –  $4 \times 1$  вектор скорости абсолютного движения материи (или материальной точки  $M$  вдоль мировой линии), или “4-скорость”,  
 $\mathbf{v}$ ,  $v$  – векторная и скалярная координатная скорость физического движения,  
 $\mathbf{v}^*$ ,  $v^*$  – векторная и скалярная собственная скорость физического движения,  
 $w$  и  $w^*$  – суперскорость, координатная и собственная,  
 $\mathbf{e}_\alpha = \{\cos \alpha_k\}$  – единичный вектор 1-го движения,  
 $\mathbf{e}_\beta = \{\cos \beta_k\}$  – единичный вектор 2-го движения,  $\mathbf{e}_\eta$  – вектор ортодвижения,  
 $\mathbf{e}_\sigma = \{\cos \sigma_k\}$  – единичный вектор исходного суммарного движения,  
 $\mathbf{e}_{\bar{\sigma}} = \{\cos \bar{\sigma}_k\}$  – единичный вектор суммарного движения с обратной последовательностью частных движений,  
 $\mathbf{i}$  – единичный времени подобный 4-вектор в  $\langle P^{3+1} \rangle$ , в том числе орт касательной к мировой линии,  
 $\mathbf{j}$  – единичный пространству подобный 4-вектор в  $\langle P^{3+1} \rangle$ ,  
 $E_0 = m_0 c^2$  – полная энергия материальной точки  $M$  на мировой линии,  
 $\mathbf{P}_0 = m_0 \mathbf{c}$  – полный импульс материальной точки  $M$  на мировой линии,  
 $P = mc$  – полный импульс в скалярной проекции на стрелу времени,  
 $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$  – полный импульс в проекции на евклидово подпространство,  
 $\mathbf{F}$  – собственная сила в мгновенном базисе  $\tilde{E}_m$ ,

- $\bar{g}$ ,  $\underline{\bar{g}}$  и  $\underline{\underline{g}}$  – внутреннее ускорение, его тангенциальная и нормальная проекции в мгновенном базисе  $\tilde{E}_m$ ,  
 $\mathbf{u}$  –  $4 \times 1$  радиус-вектор мировой точки в  $\langle P^{3+1} \rangle$ ,  
 $R$  – радиус абсолютной кривизны мировой линии или радиус пространства с постоянной кривизной,  
 $K$  – абсолютная кривизна мировой линии,  
 $\mathbf{k}$ ,  $\underline{\bar{\mathbf{k}}}$  и  $\underline{\underline{\mathbf{k}}}$  –  $4 \times 1$  вектор псевдокривизны  $K$ , его тангенциальная и нормальная проекции,  
 $\mathbf{q}$ ,  $\underline{\bar{\mathbf{q}}}$  и  $\underline{\underline{\mathbf{q}}}$  –  $4 \times 1$  вектор квазикривизны  $K$ , его тангенциальная и нормальная проекции,  
 $\mathbf{p}$ ,  $\underline{\bar{\mathbf{p}}}$  и  $\underline{\underline{\mathbf{p}}}$  – единичные  $4 \times 1$  векторы псевдонормали или квазинормали, её тангенциальной и нормальной проекций,  
 $\mathbf{n}$  – единичный вектор нормали (евклидова нормаль),  
 $T$  и  $\mathbf{t}$  – кручение, или кривизна 2-го порядка и её  $4 \times 1$  вектор,  
 $\mathbf{b}$  – единичный  $4 \times 1$  вектор кручения  $T$  (бинормаль),  
 $W$  и  $\mathbf{w}$  – кривизна 3-го порядка и её  $4 \times 1$  вектор,  
 $\mathbf{h}$  – единичный  $4 \times 1$  вектор кривизны 3-го порядка (тринормаль),  
 $\gamma$ ,  $\underline{\bar{\gamma}}$  – основной гиперболический угол движения в каком-либо базисе  $\tilde{E}$  в векторной и скалярной формах,  
 $\phi$ ,  $\underline{\bar{\phi}}$  – основной сферический угол движения в каком-либо базисе  $\tilde{E}$  в векторной и скалярной формах,  
 $\varepsilon$  – скалярный угол между направляющими векторами 1-го и 2-го движения, выражаемый исходно в  $\tilde{E}_1$ ,  
 $\tilde{E}_1$  – универсальный базис (в СТО базис относительного покоя),  
 $\Pi(a)$  – сферический угол параллельности Лобачевского, действующий только в универсальном базисе  $\tilde{E}_1$ ,  
 $\alpha = P(a)$  – абсолютный угол параллельности: если сферический,  $\alpha = \phi$ ; если гиперболический,  $\alpha = \gamma$ ; причём в  $\tilde{E}_1$ :  $\text{sh } \gamma = \text{tg } \phi \leftrightarrow \text{th } \gamma = \sin \phi$ ,  
 $\theta$  – скалярный угол ортосферического сдвига (буста),  
 $\zeta$  – сферическая угловая скалярная скорость,  
 $\eta$  – гиперболическая угловая скалярная скорость,  
 $w$  – суммарная угловая псевдоскорость ротации вектора в  $\langle P^{3+1} \rangle$ .



## Глава 1А. Пространство-время Лагранжа и пространство-время Минковского как математические абстракции и физическая реальность

Вначале обратимся к 4-х мерному бинарному пространству-времени Лагранжа  $\langle \mathcal{L}^{3+1} \rangle$ , где рассмотрим *условную тригонометрическую модель* кинематики поступательного физического движения материальной точки. Как исходную единичную систему координат мы выберем какой-либо универсальный базис  $\tilde{E}_1 = \{\Gamma\}$ . В этом базисе, по определению, исходно все четыре координатные оси  $(x_1, x_2, x_3, \vec{t})$  как бы евклидово ортонормированы. Три пространственные оси составляют декартову *пространству подобную* часть базиса  $\tilde{E}^{(3)}$  (то есть декартов суббазис). Стрела времени  $\vec{t}$  есть одномерная направленная *времени подобная*, но аффинная часть базиса. При допустимых преобразованиях базиса пространственные оси  $(x_1, x_2, x_3)$  всегда ортонормированы и образуют в  $\tilde{E}^{(3)}$  правую тройку. Поэтому в  $\langle \mathcal{E}^3 \rangle$  действует трёхмерная евклидова тригонометрия с безразмерными сферическими функциями. Отношение между тремя пространственными координатами и стрелой времени характеризует направленный вектор тангенса, тождественный вектору скорости материальной точки с соответствующей размерностью:

$$\mathbf{tg} \alpha = \mathbf{x}/t \equiv \mathbf{v}, \quad \mathbf{tg} \alpha_k = x_k/t \equiv v_k \quad (k = 1, 2, 3). \quad (1A)$$

Допустимые линейные преобразования в пространстве-времени Лагранжа образуют группу однородных преобразований Галилея  $\langle V_G \rangle$ . Это обуславливает математически принцип относительности Галилея. (Условие их непрерывности  $\det V_G = +1$  обеспечивает сохранение ориентации базиса.) В конкретном декартово-аффинном базисе пространство-время Лагранжа может рассматриваться как линейное. В частности, в каком-либо  $\tilde{E}$  оно представляется прямой суммой

$$\langle \mathcal{L}^{3+1} \rangle \equiv \langle \mathcal{E}^3 \rangle \oplus \vec{t} \equiv \text{CONST}, \quad (2A)$$

где, в свою очередь,

$$\langle \mathcal{E}^3 \rangle \equiv \text{CONST}' + \mathbf{p}, \quad (3A)$$

где  $\mathbf{p}$  – произвольный вектор параллельного переноса. (Имеется аналогия с бинарными пространствами ( $q = 1$ ) из § 11, отображающая проективно в однородных координатах “параболическую” геометрию Клейна [26, 50]).

В *векторной* трактовке стрелы времени образуют полное множество осей  $\langle t \rangle$ , включающее только времени подобные элементы. С другой стороны, векторное  $\langle \mathcal{E}^3 \rangle$  включает только пространству подобные элементы.

В данном случае все они вещественные. Преобразования Галилея сохраняют данное статус-кво, вследствие того, что они сводятся к трём возможным простейшим однородным типам преобразований в  $\langle \mathcal{L}^{3+1} \rangle$ :

- 1) автоморфная ортосферическая ротация подпространства  $\langle \mathcal{E}^3 \rangle$ ,
- 2) *параллельная ротация*  $\hat{\tau}$  относительно евклидова подпространства  $\langle \mathcal{E}^3 \rangle$ ,
- 3) трансляции  $\langle \mathcal{E}^3 \rangle$  и  $\hat{\tau}$ , как для любого однородного пространства.

В общем случае базис преобразуется линейно следующим образом:

$$V_G \cdot \begin{matrix} \tilde{E}_0 \\ \mathbf{a}_0 \\ \mathbf{o}' \\ 1 \end{matrix} = \begin{matrix} \tilde{E} \\ R \cdot \mathbf{a}_0 + \mathbf{a} \\ \mathbf{o}' \\ 1 \end{matrix} \quad (R \in \langle \text{rot } \Theta_{3 \times 3} \rangle). \quad (4A)$$

Первые 3 столбца матрицы базиса задают постоянное  $\langle \mathcal{E}^3 \rangle$ , 4-й столбец задаёт переменную стрелу времени  $\hat{\tau}$ . При  $\mathbf{a}_0 = \mathbf{o}$ :  $\tilde{E}_0 \in \langle \tilde{E}_{1u} \rangle$  (универсальный базис). При этом, если  $R_0 = I$ , то  $\tilde{E}_0 = \tilde{E}_1 = \{I\}$ . Тогда обратная матрица  $V_G^{-1}$  (с той же структурой) приводит какой-либо бинарный декартово-аффинный базис к простейшей единичной форме, то есть к исходному универсальному базису  $\tilde{E}_1$ . Кроме того, она осуществляет пассивное модальное преобразование координат линейного элемента из  $\tilde{E}_1$  в  $\tilde{E}$ . В любом допустимом бинарном базисе  $\tilde{E}$  линейный элемент пространства представляется прямой суммой:

$$\mathbf{u} = \mathbf{x} \oplus t = \begin{matrix} \mathbf{x} \\ t \end{matrix}.$$

Исходя из вышеизложенного *однородные преобразования Галилея в тригонометрической форме представляются как произведение сферической ротации и параллельной ротации в 2-х полярных формах:*

$$V_G = F(\Theta, \mathbf{tg } \alpha) \cdot \begin{matrix} f(\mathbf{tg } \alpha) \\ \mathbf{tg } \alpha \\ \mathbf{o}' \\ 1 \end{matrix} \cdot \begin{matrix} \text{rot } \Theta \\ \mathbf{o} \\ \mathbf{o}' \\ 1 \end{matrix} = \text{rot } \Theta \cdot f(\mathbf{tg } \alpha_{\Theta}), \quad (5A)$$

где  $\det V_G = \det f(\mathbf{tg } \alpha) = \det \text{rot } \Theta = +1$ ;  $\mathbf{tg } \alpha_{\Theta} = \text{rot}(-\Theta_{3 \times 3}) \cdot \mathbf{tg } \alpha$ .

Обратное однородное преобразование Галилея представляется в виде:

$$V_G^{-1} = \begin{array}{|c|c|} \hline \text{rot}(-\Theta_{3 \times 3}) & -\text{rot}(-\Theta_{3 \times 3}) \cdot \mathbf{tg} \alpha \\ \hline \mathbf{o}' & 1 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline \text{rot}(-\Theta_{3 \times 3}) & \mathbf{o} \\ \hline \mathbf{o}' & 1 \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|c|} \hline I_{3 \times 3} & -\mathbf{tg} \alpha \\ \hline \mathbf{o}' & 1 \\ \hline \end{array} = f(-\mathbf{tg} \alpha_0) \cdot \text{rot}(-\Theta). \quad (6A)$$

Формула (5A) является *евклидово-аффинным аналогом* полярного представления (474), (475). Сам базис преобразуется аналогично (480):

$$\tilde{E} = V_G \cdot \tilde{E}_1 = f(\mathbf{tg} \alpha) \cdot \text{rot} \Theta \cdot \tilde{E}_1 = f(\mathbf{tg} \alpha) \cdot \tilde{E}_{1u}. \quad (7A)$$

С физической точки зрения суббазис  $\tilde{E}_1^{(3)}$  движется относительно суббазиса  $\tilde{E}_1^{(3)}$  со скоростью  $\mathbf{v}$ . Матрица (6A) преобразует координаты элемента пространства-времени Лагранжа следующим образом:

$$\mathbf{u} = V_G^{-1} \cdot \mathbf{u}^{(1)} = F^{-1}(\Theta, \mathbf{tg} \alpha) \cdot \mathbf{u}^{(1)} = \frac{\text{rot}(-\Theta_{3 \times 3}) \cdot (\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{tg} \alpha \cdot t)}{t}. \quad (8A)$$

Если  $\Theta = Z$ , то имеем чисто параллельные ротации, выраженные в условной тригонометрической и физической формах:

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{x} = \mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{tg} \alpha \cdot t = \mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{v} \cdot t, \\ t = t^{(1)}. \end{array} \right\} \quad (9A)$$

Заметим, что так называемая *параллельная ротация*, применяемая для стрелы времени, геометрически промежуточна между сферической и гиперболической ротациями. Такой вид ротации обусловлен тем, что *скалярное время* является её инвариантом и, в принципе, может отсчитываться только на исходной оси  $\vec{t}^{(1)}$ . *Многоступенчатые параллельные ротации дают нерелятивистский коммутативный закон суммирования тангенсов или скоростей в матричной и векторной форме в евклидовом подпространстве* (3A):

$$\left. \begin{array}{l} f(\mathbf{tg} \alpha_{12}) \cdot f(\mathbf{tg} \alpha_{23}) = f(\mathbf{tg} \alpha_{23}) \cdot f(\mathbf{tg} \alpha_{12}) = f(\mathbf{tg} \alpha_{12} + \mathbf{tg} \alpha_{23}), \\ \prod f(\mathbf{tg} \alpha_{kj}) = f(\sum \mathbf{tg} \alpha_{kj}). \end{array} \right\} \quad (10A)$$

Множество  $\langle f(\mathbf{tg} \alpha) \rangle$  есть *кинематическая коммутативная подгруппа* группы Галилея. Параллельные переносы образуют свою подгруппу.

Пространство-время Лагранжа *не изотропно*, но *однородно* в силу равнозначности всех его точечных элементов. А именно, выбор любого его элемента за начало базиса допускаемым параллельным переносом никак не влияет на характер допустимых преобразований в целом.)

Если его рассматривать иерархически более сложно, а именно как 4-х мерное векторное пространство, то тогда, согласно (2А), оно распадается на два независимых слагаемых: изотропное неориентированное евклидово подпространство  $\langle \mathcal{E}^3 \rangle$  и ориентированная стрела времени  $\langle \vec{t} \rangle$  (вектор). Последняя ориентирована всегда из прошлого в будущее. В целом оно неизотропно в силу хотя бы того, что временная и пространственные координаты его элементов имеют различные размерности. Отсюда вытекает аффинный характер взаимоотношений и независимость пространства и времени в прямой сумме (2А) и условность тождества (1А).

Пространство-время Лагранжа широко применяется в классической нерелятивистской физике. Однако ещё в конце XIX века выяснилось, что, например, излагаемые в нём уравнения электродинамики Максвелла при переходе от одной инерциальной системы Галилея к другой изменяют свою форму. В связи с этим Лоренц (1892г.) предложил специальные преобразования координат пространства и времени, устраняющие этот существенный недостаток. (Ещё ранее в 1877г. их установил Фойгт исходя из упругой теории света.) В 1904г. Лоренц с учётом *физического принципа относительности Пуанкаре* (для всех физических явлений) показал, что эти преобразования непосредственно следуют из условия форминвариантности волнового уравнения [39]. Последнее, согласно теории Максвелла, объясняет и описывает распространение света.

\* \* \*

Далее обратимся к пространству-времени Минковского. В ходе происшедшей в начале XX века революционной трансформации пространства-времени в его более совершенную – релятивистскую концепцию в СТО *с математической точки зрения* были введены два принципиально новых постулата.

*Постулат №1* устанавливает, что физическое пространство-время изотропно (наряду с его однородностью в классической физике). Это достигается вводом для временной координаты некоторого постоянного масштабного коэффициента «с», имеющего размерность скорости.

*Постулат №2* устанавливает, что это 4-мерное пространство-время представимо математически как ориентированное бинарное комплексное квазиевклидово пространство с индексом  $q = 1$ . Его мнимая координата  $i \cdot \vec{ct}$  – стрела времени всегда направлена из прошлого в будущее.

Принятие этих двух постулатов позволило в его новой концепции полностью уйти от выше отмеченных недостатков нерелятивистского пространства-времени. Согласно постулату №1, (8А) преобразуется как:

$$\left. \begin{aligned} t &\Rightarrow ct, \\ \text{tg } \alpha &\Rightarrow \text{tg } \varphi_R = v/c. \end{aligned} \right\} \quad (11A)$$

Это придаёт безразмерную *тригонометрическую форму* описания физического движения. В свою очередь, постулат №2 сводит такое описание движения материи к комплексной квазиевклидовой геометрии или к её вещественному изоморфизму – *псевдоевклидовой геометрии*, т.е. с псевдосферическими или гиперболическими функциями. Естественным образом реализуется сферическо-гиперболическая аналогия из § 6:

$$\left. \begin{aligned} t &\Rightarrow ict, \\ \mathbf{tg} \varphi_{\mathbf{R}} &\Rightarrow \mathbf{th} \gamma = v/c \quad (\mathbf{tg} \varphi = \mathbf{tg} i\gamma = i \mathbf{th} \gamma = -x/ict \equiv i \cdot x/ct \equiv i \cdot v/c) \end{aligned} \right\} (12A)$$

Здесь  $\mathbf{th} \gamma \equiv \mathbf{tg} \varphi_{\mathbf{R}}$  соответствует аналогии (354) и *только в базисе*  $\tilde{\mathbf{E}}_1$ ; а  $\varphi = i\gamma$  отвечает аналогии (323) в *квази- и псевдоевклидовом базисе*  $\tilde{\mathbf{E}}$  с  $\mathbf{I}^{\oplus}$ .

Переход к новой концепции осуществляется в 2 этапа: сначала к *комплексному* пространству  $\langle \mathcal{E}^{3+1} \rangle$ , затем к *вещественному* изоморфизму  $\langle P^{3+1} \rangle$  с метрическим тензором  $\mathbf{I}^{\oplus}$ . Пространство-время Лагранжа преобразуется в пространство-время Минковского. Преобразования Галилея заменяют на преобразования Лоренца. Евклидово векторное пространство тангенсов или скоростей преобразуется в гиперболическое векторное пространство – модель Клейна внутри овала Кэли с радиусом  $R = 1$  или  $R = c$  (§ 12.1). (Хотя, в принципе, 2-й этап теоретически излишний!)

Эта революционная трансформация концепции пространства-времени, как хорошо известно, была последовательно осуществлена 100-летие назад в классических трудах создателей СТО: Лоренца, Пуанкаре, Эйнштейна и Минковского [34, 39, 48, 36]. Причём в работах Пуанкаре и Минковского был реализован именно вышеуказанный фундаментальный геометрически-групповой подход. (*Приоритет в главном* тут безусловно принадлежит Пуанкаре [66].) Но ввиду приложения новой теории именно к физике принцип относительности трактуется до сих пор почему-то только в физическом смысле. Хотя, как было показано в § 12.3, он имеет свой исходный математический прототип. Любое пространство-время есть некая математическая абстракция, используемая в тех или иных координатных формах записи объективных законов движения материи. В адекватной *координатной трактовке этих законов* проявляется физическая реальность пространства-времени как объективного способа их отображения.

Пространство-время Минковского  $\langle P^{3+1} \rangle$  в целом однородно. Если же его рассматривают иерархически более сложно – с учётом допустимых направлений, а именно как *четырёхмерное векторное пространство*, то тогда по отношению к псевдоевклидовой метрике векторов оно распадается на три изотропные части: внешний изотропный конус – множество пространству подобных векторов с евклидовой мерой, внутренний изотропный конус – множество времени подобных векторов с антиевклидовой (мнимой) мерой и вырожденный разделяющий их **световой конус** с нулевой мерой.

В силу того что все три составляющие части изотропны, линейные преобразования в  $\langle P^{3+1} \rangle$ , связанные с ротациями и деформациями, описываются в нём  $4 \times 4$  тензорными тригонометрическими функциями от  $4 \times 4$  тензорных углов  $\Gamma$  и  $\Theta$  (§ 6).

Скалярные тригонометрические функции в псевдосферической форме на комплексной квазиплоскости  $\langle \mathcal{E}^{1+1} \rangle$  впервые применил Пуанкаре [39] для представления преобразований Лоренца, им же так названных. Затем Минковский [36] использовал их аналогично в гиперболической форме – на  $\langle P^{1+1} \rangle$ . Скалярная тригонометрия привлекалась обоими авторами для представления главных ротационных преобразований (бустов).

Тензорные тригонометрические модели преобразований в  $\langle P^{3+1} \rangle$ , изложенные уже частично в § 6.3 и § 12.2, позволяют придать чисто тригонометрическую четырёхмерную тензорную форму кинематике СТО. Исходные постулаты и следствия из них, фигурирующие в физической трактовке СТО, имеют изоморфные тригонометрические прототипы (как физико-математический изоморфизм – § 12.3).

Однородным непрерывным преобразованиям Лоренца соответствуют псевдоевклидовы тригонометрические ротации. Эйнштейнову замедлению времени соответствуют тригонометрические гиперболические ротации с псевдоевклидовым инвариантом:  $i^2 = -(\text{ch}^2 \gamma - \text{sh}^2 \gamma)$ , где  $\text{ch} \gamma > 1$ . Лоренцеву сокращению протяжённости соответствуют тригонометрические гиперболические деформации с перекрёстным квазиевклидовым инвариантом в  $\tilde{E}_1$ :  $1 = \text{sch}^2 \gamma + \text{th}^2 \gamma$ , где  $\text{sch} \gamma < 1$ . При рассмотрении этих двух явлений на псевдоплоскости, соответствующей углу  $\Gamma$ , в обоих случаях формально осуществляется решение гиперболически прямоугольного треугольника (§ 6.4). Специальному физическому принципу относительности Пуанкаре однозначно соответствует специальный математический принцип относительности (§ 12.3) применительно к геометрии  $\langle P^{3+1} \rangle$  (§ 12.3). Закон Пуанкаре – Эйнштейна о взаимозависимости пространства и времени и об их относительности объясняется просто тем, что одноиндексные евклидово подпространство и релятивистская стрела времени всегда являются гиперболически ортогональными дополнениями друг к другу, изменяясь только взаимно при гиперболических ротациях и не изменяясь при ортосферических:

$$\langle P^{3+1} \rangle \equiv \langle \mathcal{E}^3 \rangle \oplus \vec{\text{ct}} \equiv \text{CONST}. \quad (13A)$$

Это пространство-время есть единый четырёхмерный геометрический континуум и как множество – абсолютом с относительными слагаемыми.

Постулат Эйнштейна о максимуме и постоянстве скорости света в любых галилеевски инерциальных системах отсчёта непосредственно трактуется как свойство гиперболического тангенса (т. е. это следствие):

$$\|\mathbf{v}\|/c = \|\mathbf{th} \boldsymbol{\gamma}\| < 1, \quad (14A)$$

$$\boldsymbol{\gamma} \pm \infty = \pm \infty + \boldsymbol{\gamma} = \pm \infty. \quad (15A)$$

Релятивистские законы сложения двух (и более) физических скоростей в СТО определяются правилами суммирования гиперболических ротаций (см. гл. 7А). Также 2-е правило суммирования (15А) трактует независимость скорости света от движения его источника как (15А). Тригонометрические интерпретации (как гиперболические так и ортосферические) имеют место и для ряда других специальных релятивистских эффектов в СТО, относящихся первично ко времени и к евклидову подпространству и обусловленных гиперболическим характером их совместных тензорных преобразований. То, что масштабный коэффициент, принятый впервые Пуанкаре [39] для координаты времени, равен скорости света в вакууме, следует в результате изложения электродинамики Максвелла – Лоренца или волновой квантовой механики Шрёдингера-Дирака в  $\langle P^{3+1} \rangle$  в их ковариантных релятивистских формах.

Выберем, в качестве некоего *нулевого универсального базиса*  $\tilde{E}_0$ , такой, в котором *мировая* материальная составляющая как центр всех масс, например, центр масс звёздной системы Маха  $\tilde{E}_0^{(3)}$  [37, с. 249-250], определяется в состоянии покоя. Зададим универсальный, т.е. *инерциальный* базис  $\tilde{E}_1 = \{I\}$ , т. е. с  $\tilde{E}_1^{(3)}$ , инерциальной относительно  $\tilde{E}_0^{(3)}$ , привязав его к конкретному месту. Например, в солнечной системе для этого подходит центр Солнца, но с трансляцией (переносом базиса). В суббазисе  $\tilde{E}_1^{(3)}$  формально имеется наблюдатель  $N_1$ , как принято в СТО, для наблюдения и фиксации мировых событий. Он имеет хронометр для шкалы  $\tilde{ct}^{(1)}$  и также инерциален. С ним связаны другие инерциальные базисы  $\tilde{E}_{1u}$ :

$$\tilde{E}_{1u} = \text{rot } \Theta \cdot \tilde{E}_1 = \{\text{rot } \Theta\}, \quad (16A)$$

$\text{rot}' \Theta \cdot I^{\oplus} \cdot \text{rot } \Theta = I^{\oplus} = \text{rot } \Theta \cdot I^{\oplus} \cdot \text{rot}' \Theta$ ; где рефлектор-тензор имеет вид

$$I^{\oplus} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -1 \\ \hline \end{array}. \quad (17A)$$

В  $\tilde{E}_1$  все координатные оси базиса изначально квазиевклидово и псевдоевклидово ортонормированы, что позволяет использовать конкретную сферическо-гиперболическую аналогию (гл. 6), важную для теории. *Не универсальные базисы* ортонормированы только псевдоевклидово:

$$\tilde{E}' \cdot I^{\oplus} \cdot \tilde{E} = I^{\oplus} = (\sqrt{I^{\oplus}} \cdot \tilde{E})' \cdot (\sqrt{I^{\oplus}} \cdot \tilde{E}), \quad (18A)$$

где  $\sqrt{I^{\oplus}}$  – арифметический квадратный корень типа (443).

Видно, что в бинарном декартовом базисе в  $\langle \mathcal{E}^{3+1} \rangle$  все оси, в т. ч. с мнимой координатой времени  $ct$  вне светового конуса сферически ортонормированы, в световом конусе сферически антиортонормированы!

Основной смысл здесь ввода в СТО исходного универсального базиса  $\tilde{E}_1 = \{\Gamma\}$  в абстрактном пространстве  $\langle P^{3+1} \rangle$  состоит в том, чтобы сделать это  $\langle P^{3+1} \rangle$  конкретным и именно физическим, привязав его однозначно к крупномасштабному материальному миру в большом. Хотя относительность базисов в СТО полностью действует, но базис  $\tilde{E}_1$  возможно применять условно как полезный начальный репер. Кроме того, в  $\tilde{E}_1$  тензорные функции заданы в своих *канонических формах* (§ 6).

В декартовой графике псевдоевклидовы базисы отображаются в четырёхмерном евклидовом пространстве в координатах исходного единичного базиса  $\tilde{E}_1$ . Он же как универсальный базис является квазидекартовым и псевдодекартовым. Выраженные в  $\tilde{E}_1$  вектор-столбцы матриц новых базисов определяют положения координатных осей, сферические и гиперболические углы между ними и масштабы по осям. Базис  $\tilde{E}_{1u}$ , согласно (16А), смещён от  $\tilde{E}_1$  на сферический тензорный угол  $\Theta$ . Ротация на угол  $\Theta$  элементарна и осуществляется в  $\langle \mathcal{E}^2 \rangle \subset \langle \mathcal{E}^3 \rangle^{(1)}$ . Евклидово подпространство в целом и стрела времени остаются как в  $\tilde{E}_1$ .

Пусть новый базис получается чисто гиперболической ротацией

$$\tilde{E}_{1h} = \text{roth } \Gamma \cdot \tilde{E}_1 = \{\text{roth } \Gamma\}. \quad (19A)$$

Тогда новые координатные оси, согласно (363), полно сферически не ортогональны друг другу и имеют масштабные искажения в евклидовой метрике (хотя бы две из них, включая стрелу времени). В общем случае новый базис, согласно полярному представлению (480), получается однозначной комбинацией сферической и гиперболической ротаций:

$$\tilde{E} = \text{roth } \Gamma \cdot \text{rot } \Theta \cdot \tilde{E}_1 = \text{roth } \Gamma \cdot \tilde{E}_{1u}. \quad (20A)$$

(Здесь все матрицы согласованы с рефлектор-тензором  $I^{\oplus}$ .)

Чисто гиперболическая ротация базиса (19А) физически соответствует равномерному прямолинейному (поступательному) движению суббазиса  $\tilde{E}_{1h}^{(3)}$  относительно суббазиса  $\tilde{E}_1^{(3)}$  со скоростью  $v = c \cdot \text{th } \gamma$ . Гиперболическая ротация элементарна и осуществляется в псевдоплоскости  $\langle P^{1+1} \rangle \subset \langle P^{3+1} \rangle$ , задаваемой стрелой времени  $\vec{ct}^{(1)}$  и направлением в  $\langle \mathcal{E}^3 \rangle^{(1)}$  вектора тангенса  $\mathbf{th } \gamma$  или вектора скорости  $\mathbf{v}$ . В двумерном варианте имеем:

$$\tilde{E}_{II} = \{\text{roth } \Gamma\}^{2 \times 2} \cdot \tilde{E}_1 = \begin{array}{|c|c|} \hline \text{ch } \gamma & \text{sh } \gamma \cdot \cos \alpha \\ \hline \text{sh } \gamma \cdot \cos \alpha & \text{ch } \gamma \\ \hline \end{array} \quad (\cos \alpha = \pm 1). \quad (21A)$$

Графически преобразование сводится к гиперболической ротации обеих осей  $x^{(1)}$  и  $ct^{(1)}$  на угол  $\gamma$  (в сторону биссектрисы первого квадранта



при  $\cos \alpha = +1$  и обратно при  $\cos \alpha = -1$ ). Физически преобразование есть движение со скоростью  $v$  объекта  $M$  на оси  $x^{(2)}$  относительно и в направлении оси  $x^{(1)}$  при  $\cos \alpha = +1$  и в обратную сторону при  $\cos \alpha = -1$ ).

Пусть некоторая материальная точка  $M$  движется *физически равномерно и прямолинейно* – так, что в нулевой момент времени  $t = 0$  она проходит через начало координат  $O$  (общее для всех одноцентровых базисов  $\vec{E}$ ). Тогда её *мировая линия* есть центральная прямая внутри светового конуса [36]. Сам световой конус – геометрическое место всех центральных световых мировых линий из  $O$ . Некоторый псевдодекартов базис  $\vec{E}$ , в котором вышеуказанная материальная точка  $M$  физически неподвижна, имеет стрелу времени  $\vec{ct}$ , совпадающую с её прямой мировой линией. (Вообще же, все новые координатные оси задаются вектор-столбцами матрицы нового базиса  $\vec{E}$ .) Данная прямая мировая линия или она же – новая стрела времени  $\vec{ct}$  взаимно-однозначно определяется в  $\vec{E}_1$  углом  $\gamma$  и направляющими косинусами вектора  $\mathbf{th} \gamma \in \langle \mathcal{E}^3 \rangle^{(1)}$  или также взаимно-однозначно определяется ротационной матрицей  $\text{goth } \Gamma$  с канонической в  $\vec{E}_1$  структурой (363). Мировая линия, разумеется, может быть любой криволинейной формы, но только с наклоном не более светового конуса, которому отвечает скорость света. Когда мировая линия задаётся исходно в универсальном базисе  $\vec{E}_1 = \{I\}$ , тогда она является *своеобразным инвариантом*, так как в базисе  $\vec{E}_1$  как в реперном представляются все другие допустимые псевдодекартовы базисы  $\vec{E}$ , не затрагивая при этом саму мировую линию! Хотя главные инварианты, разумеется, суть световой конус и скалярная скорость  $c$ . Именно в  $\vec{E}_1$ , как исходном базисе, изучаются все общие закономерности движений в СТО (гл. 5А, 7А, 10А). См. ранее в § 12.1, в том числе на рис. 4.

Заметим, что во всех формулах и законах, связанных с описанием материальных явлений во времени (процессов), как известно,  $\Delta t > 0$  ( $dt > 0$ ). Соответственно и гиперболический угол движения в любом псевдодекартовом базисе может только увеличиваться ( $d\gamma > 0$ ). Это выражает общий принцип возможности физического движения только из прошлого в будущее, то есть по мгновенной стреле собственного времени. Он же тождествен *принципу детерминизма* для материальных явлений. В СТО этот принцип не противоречит тому, что материальные объекты, имеющие одни и те же начальную и конечную мировые точки, но различные мировые линии между ними, затрачивают в общем случае различное собственное время на всё путешествие, то есть время по собственным хронометрам (“парадокс близнецов”). Следовательно, в тригонометрической форме кинематики теории относительности при активных преобразованиях координат в тензоре движения (21А) перед углами  $\Gamma$  и  $\gamma$  применяется только знак «+». (Отрицательный знак перед данными углами возможен только при *мысленных* движениях в прошлое, когда применяется *антиподная* гиперболическая геометрия – § 12.1.)

Это несколько отличает гиперболическую кинематику СТО от правил гиперболического движения обычной геометрии Лобачевского – Больяи. Одна и та же стрела времени  $\vec{ct}$  или прямая мировая линия как в верхней, так и в нижней полости изотропного конуса определяется одной и той же матрицей  $\text{roth } \Gamma$ . Это физически соответствует одному и тому же вектору скорости, а геометрически выражается как одно движение:

$$\text{roth } \Gamma = F(\gamma, \mathbf{e}_\alpha) \equiv F(-\gamma, -\mathbf{e}_\alpha). \quad (22A)$$

(Последнее выражение дано именно для *антиподной* гиперболической геометрии.) С другой стороны, симметричная относительно  $\vec{ct}^{(1)}$  другая стрела времени или она же прямая мировая линия определяется обратной матрицей. Это физически соответствует аддитивно противоположному вектору скорости, а геометрически выражается как движение:

$$\text{roth}^{-1} \Gamma = F(\gamma, -\mathbf{e}_\alpha) = \text{roth}(-\Gamma) \equiv F(-\gamma, \mathbf{e}_\alpha). \quad (23A)$$

(Последнее выражение дано также для антиподной гиперболической геометрии.) Обратим внимание на то, что в обоих указанных равенствах формально значение  $\gamma$  положительно для направления *материального* движения именно по стреле времени и отрицательно для направления *мысленного* движения против стрелы времени (то есть в данном случае реперной оси для отсчёта угла ротации). Из (21А) следует, что в  $\langle P^{1+1} \rangle$  координатная скорость физического движения в  $\langle \mathcal{E}^3 \rangle$  выражается тригонометрическим способом через соотношение:

$$\frac{v}{c} = \frac{\Delta x}{c \cdot \Delta t} = \frac{x}{ct} = \frac{\text{sh } \gamma \cdot \cos \alpha}{\text{ch } \gamma} = \text{th } \gamma \cdot \cos \alpha, \quad (24A)$$

где  $\cos \alpha = \pm 1$ . В самом же общем случае вектор скорости характеризуется модулем  $\|\mathbf{v}\|$  и направляющими косинусами:  $\cos \alpha_1$ ,  $\cos \alpha_2$  и  $\cos \alpha_3$ . Его три ортопроекции в тригонометрической форме имеют вид:

$$\frac{v_k}{c} = \frac{\Delta x_k}{c \cdot \Delta t} = \frac{x_k}{ct} = \text{th } \gamma \cdot \cos \alpha_k \quad (k = 1, 2, 3), \quad (25A)$$

где  $-1 \leq \cos \alpha_k \leq +1$ ;  $\cos^2 \alpha_1 + \cos^2 \alpha_2 + \cos^2 \alpha_3 = 1$ .

При описании физического движения со скоростью  $v$  в *псевдо-плоскости* ротации  $\langle P^{1+1} \rangle$  в базисе  $\langle x^{(1)}, \vec{ct}^{(1)} \rangle$  новые координатные оси  $x$  и  $\vec{ct}$  отклоняются на одинаковый гиперболический угол  $\gamma = \text{arth } v/c$  к световому конусу. Именно в универсальных базисах типа  $\vec{E}_1$  действует сферическо-гиперболическая аналогия между  $\gamma$  и  $\varphi$  – гл. 6, например, синус-тангенсная или тангенс-тангенсная:

$$x^{(1)}/ct^{(1)} = \text{th } \gamma \equiv \sin \varphi \equiv \text{tg } \varphi_R = v/c \quad (\cos \alpha = \pm 1);$$

инфинитезимально различия в природе углов нет, так как тогда  $\varphi \equiv \gamma$ !

При формализации простых физических движений относительно именно неподвижного наблюдателя  $N_1$ , в принципе, безразлично какую тригонометрию применять – гиперболическую или сферическую. При формализации комбинированных движений, например, относительно подвижного наблюдателя, а также многоступенчатых и интегральных, должна применяться только первая. То же относится к одно- и многоступенчатым движениям в сферической и гиперболической геометрии.

Так, *сферический* угол параллельности Лобачевского  $\Pi(a)$  [21, с. 186] – фундамент вещественной *гиперболической* неевклидовой геометрии, как исходный угловой аргумент, имеет геометрический смысл только в универсальных базисах  $\tilde{E}_1$  и для одинарных главных движений – в отличие от гиперболического угла-аргумента  $\gamma = a/R$  (гл. 12), корректного в любом псевдоевклидовом базисе (но в *сферической* геометрии  $\Pi(a)$  *корректный*):

$$\pm \Pi(a) \equiv \pm \Pi^*[\varphi(\gamma)] \equiv \pi/2 - \varphi(\gamma) = \pi/2 - \arcsin(\operatorname{th} \gamma) = 2 \arctg[\exp(-\gamma)], \quad (26A)$$

$$d\varphi(\gamma) = \operatorname{sech} \gamma d\gamma \leftrightarrow d\gamma(\varphi) = \sec \varphi(\gamma) d\varphi \quad [\gamma = a/R = \operatorname{arth}(\sin \varphi) > \varphi],$$

где  $\sin \varphi \equiv \operatorname{th} \gamma \leftrightarrow \operatorname{tg} \varphi \equiv \operatorname{sh} \gamma$ , согласно конкретной аналогии (331) в  $\tilde{E}_1$ .

Для изначально корректного построения *вещественной абсолютной геометрии* (независимо от 5-го постулата Евклида) не следует задавать природу угла параллельности  $\alpha$  – *сферическую* или *гиперболическую*, а угол выбрать как  $\alpha = \pm R(a)$  между *евклидовой* и *абстрактной* параллелью вначале в универсальном базисе  $\tilde{E}_1$  (дополнительный углу  $\Pi(a)$  до  $\pi/2$  или  $\delta$ ). Далее придём к дилемме выбора *природы* угла  $\alpha = \pm R(a)$  и альтернативам: если сферическую, то констатируется сферическая геометрия  $\leftrightarrow$  параллели пересекаются; если гиперболическую, то констатируется гиперболическая геометрия  $\leftrightarrow$  параллели сходятся в  $+\infty$  или  $-\infty$ . При движении в  $\tilde{E}_1$  из центра  $S$  гиперболоида  $\Pi$  и гиперсфероида (рис. 4) по геодезическим гиперболе и окружности углы изменяются как:  $R_\gamma(a) = \gamma$  от 0 до  $\pm\infty$ ,  $-R_\varphi(a) = \varphi$  от 0 до  $\pm\pi/2$ .

В заключение этой вводной главы также отметим, что изначально чистый *математический подход* Пуанкаре [39] является исчерпывающим для логически безупречного построения основ СТО. С другой стороны, изначально *физический подход* Эйнштейна [48] к этому на основе его известных двух постулатов таким свойством не обладает (см. о том же в работе [32, с. 42–44]) – равно как только из экстремума  $\operatorname{th} \gamma_{\max} = 1$  в любых системах отсчёта и *математического принципа относительности* (гл. 12) невозможно построить псевдоевклидову тригонометрию. Исходя только из последних 2-х положений (эквивалентных постулатам Эйнштейна), в принципе, можно формально построить логически безупречным образом бесконечное множество “тригонометрий” (или “геометрий постоянного радиуса  $R$ ”) и их квазифизических изоморфизмов с псевдогёльдеровой неквадратичной ( $p \neq 2$ ) метрикой:

$$|da|^p = |dx_1|^p + |dx_2|^p + |dx_3|^p - |dx_4|^p \quad (1 \leq p \leq \infty).$$

Задание именно псевдоевклидовой метрики ( $p = 2$ ) было осуществлено Эйнштейном неявным образом при *аксиоматическом* определении им же понятия *одновременности*. Но определение этого понятия по Эйнштейну есть теорема в псевдоевклидовой геометрии Минковского (см. в гл. 4А.)!

## Глава 2А. Тензорная тригонометрическая модель однородных преобразований Лоренца

В пространстве-времени Минковского координаты мировой точки М на *централизованной* прямой мировой линии в инерциальных псевдодекартовых базисах  $\tilde{E}_1$  и  $\tilde{E}$ , т. е. с инерциальными суббазисами  $\tilde{E}_1^{(3)}$  и  $\tilde{E}^{(3)}$ , согласно (21А), но в 4-х координатной форме, в псевдоплоскости  $\langle P^{1+1} \rangle$  ротации  $\text{goth } \Gamma$  связаны *линейно пассивным* модальным ротационным гиперболическим преобразованием, тождественным преобразованиям Лоренца:

$$\begin{array}{c}
 \text{roth } (-\Gamma) \\
 \begin{array}{|c|c|c|c|}
 \hline
 \text{ch } \gamma & 0 & 0 & -\text{sh } \gamma \cdot \cos \alpha \\
 \hline
 0 & 1 & 0 & 0 \\
 \hline
 0 & 0 & 1 & 0 \\
 \hline
 -\text{sh } \gamma \cdot \cos \alpha & 0 & 0 & \text{ch } \gamma \\
 \hline
 \end{array}
 \cdot
 \begin{array}{|c|}
 \hline
 \mathbf{u} \{ \tilde{E}_1 \} \\
 \hline
 x_1^{(1)} \\
 \hline
 x_2^{(1)} \\
 \hline
 x_3^{(1)} \\
 \hline
 ct^{(1)} \\
 \hline
 \end{array}
 =
 \begin{array}{|c|}
 \hline
 \mathbf{u} \{ \tilde{E} \} \\
 \hline
 \text{ch } \gamma \cdot x_1^{(1)} - \text{sh } \gamma \cdot \cos \alpha \cdot ct^{(1)} \\
 \hline
 x_2^{(1)} \\
 \hline
 x_3^{(1)} \\
 \hline
 \text{ch } \gamma \cdot ct^{(1)} - \text{sh } \gamma \cdot \cos \alpha \cdot x_1^{(1)} \\
 \hline
 \end{array}
 \quad (t=0, \mathbf{x}=\mathbf{0});
 \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l}
 x_1 = \text{ch } \gamma \cdot x_1^{(1)} - \text{sh } \gamma \cdot \cos \alpha \cdot ct^{(1)} = [x_1^{(1)} - \text{th } \gamma \cdot \cos \alpha \cdot ct^{(1)}] / \text{sch } \gamma, \\
 x_2 = x_2^{(1)}, \quad x_3 = x_3^{(1)}, \\
 ct = \text{ch } \gamma \cdot ct^{(1)} - \text{sh } \gamma \cdot \cos \alpha \cdot x_1^{(1)} = [ct^{(1)} - \text{th } \gamma \cdot \cos \alpha \cdot x_1^{(1)}] / \text{sch } \gamma.
 \end{array} \right\} \quad (27A)$$

Это исторически *тригонометрические однородные преобразования координат пространства и времени Пуанкаре – Минковского* (2-мерные). Здесь дополнительно используется множитель  $\cos \alpha = \pm 1$ , определяющий 2 направления векторов синуса тангенса. С учётом (24А), они приобретают *физическую форму однородных преобразований Лоренца* [34, 39]:

$$\left. \begin{array}{l}
 x_1 = [x_1^{(1)} - v \cdot t^{(1)}] / \sqrt{1 - v^2/c^2}, \\
 x_2 = x_2^{(1)}, \quad x_3 = x_3^{(1)}, \\
 ct = [ct^{(1)} - v/c \cdot x_1^{(1)}] / \sqrt{1 - v^2/c^2}.
 \end{array} \right\}$$

Используя гиперболическую ротационную модальную матрицу с общей канонической 4-мерной структурой (363) в базисе  $\tilde{E}_1$ , получаем в итоге генеральные тригонометрические преобразования 4-х координат в  $\langle P^{3+1} \rangle$  сначала в форме 4-х скалярных ортопроекции (при  $k = 1, 2, 3$ ):

$$\left\{ \begin{array}{l} x_k = \cos \alpha_k \cdot [\operatorname{ch} \gamma \cdot (\cos \alpha_1 \cdot x_1^{(1)} + \cos \alpha_2 \cdot x_2^{(1)} + \cos \alpha_3 \cdot x_3^{(1)}) - \operatorname{sh} \gamma \cdot ct^{(1)}] + \\ + [x_k^{(1)} - \cos \alpha_k \cdot (\cos \alpha_1 \cdot x_1^{(1)} + \cos \alpha_2 \cdot x_2^{(1)} + \cos \alpha_3 \cdot x_3^{(1)})], \quad (28A) \\ ct = \operatorname{ch} \gamma \cdot ct^{(1)} - \operatorname{sh} \gamma \cdot (\cos \alpha_1 \cdot x_1^{(1)} + \cos \alpha_2 \cdot x_2^{(1)} + \cos \alpha_3 \cdot x_3^{(1)}). \end{array} \right.$$

Те же генеральные тригонометрические преобразования в векторной форме:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{x} = [\operatorname{ch} \gamma \cdot \mathbf{e}_\alpha \mathbf{e}'_\alpha \cdot \mathbf{x}^{(1)} - \operatorname{sh} \gamma \cdot \mathbf{e}_\alpha \cdot ct^{(1)}] + (I - \mathbf{e}_\alpha \mathbf{e}'_\alpha) \cdot \mathbf{x}^{(1)} = \\ = [\overleftarrow{\mathbf{e}}_\alpha \mathbf{e}'_\alpha \cdot \mathbf{x}^{(1)} - \operatorname{th} \gamma \cdot \mathbf{e}_\alpha \cdot ct^{(1)}] / \operatorname{sch} \gamma + \overrightarrow{\mathbf{e}}_\alpha \mathbf{e}'_\alpha \cdot \mathbf{x}^{(1)}, \quad (29A) \\ ct = \operatorname{ch} \gamma \cdot ct^{(1)} - \operatorname{sh} \gamma \cdot \mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{x}^{(1)} = [ct^{(1)} - \operatorname{th} \gamma \cdot \mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{x}^{(1)}] / \operatorname{sch} \gamma, \end{array} \right.$$

где  $\mathbf{e}_\alpha = \{\cos \alpha_k\}$  – вектор направляющих косинусов скорости движения  $\mathbf{v}$  или векторов синуса  $\operatorname{sh} \gamma$  и тангенса  $\operatorname{th} \gamma$  (в суббазисе  $\tilde{E}_1^{(3)}$ );

$$\overleftarrow{\mathbf{e}}_\alpha \mathbf{e}'_\alpha = \mathbf{e}_\alpha \mathbf{e}'_\alpha = \overleftarrow{\mathbf{v}} \mathbf{v}' = \mathbf{v} \mathbf{v}' / |\mathbf{v}' \mathbf{v}| = \mathbf{v} \mathbf{v}' / \|\mathbf{v}\|^2;$$

$I - \mathbf{e}_\alpha \mathbf{e}'_\alpha = \overrightarrow{\mathbf{e}}_\alpha \mathbf{e}'_\alpha = \overrightarrow{\mathbf{v}} \mathbf{v}'$  – ортопроекторы в  $\tilde{E}_1^{(3)}$  (§ 2.5) на  $\langle \operatorname{im} \mathbf{v} \rangle$  и  $\langle \operatorname{im} \mathbf{v}' \rangle^\perp$ .

Генеральные *линейные* тригонометрические преобразования координат мировой точки (29A) на прямой мировой линии трактуются из (27A) так. Во первых, пространственная проекция точки  $\mathbf{x}^{(1)}$  в  $\tilde{E}_1^{(3)}$  представляется суммой из релятивистской и нерелятивистской ортопроекций в  $\langle \mathcal{E}^3 \rangle^{(1)}$  – параллельной и сферически ортогональной вектору скорости  $\mathbf{v} \in \langle \mathcal{E}^3 \rangle^{(1)}$ . Во вторых, при гиперболической ротации базиса  $\tilde{E}_1$  в псевдоплоскости ротации  $\langle \mathbf{v}, ct^{(1)} \rangle$  пассивному модальному преобразованию подвергаются только временная ортопроекция  $ct^{(1)}$  и релятивистская ортопроекция от пространственной проекции  $\overleftarrow{\mathbf{e}}_\alpha \mathbf{e}'_\alpha \cdot \mathbf{x}^{(1)}$ . Ортогональная составляющая  $\overrightarrow{\mathbf{e}}_\alpha \mathbf{e}'_\alpha \cdot \mathbf{x}^{(1)}$  есть инвариант преобразований Лоренца и Галилея. Далее,

$$\|\operatorname{th} \gamma\| = \operatorname{th} \gamma = \|\mathbf{v}\|/c = + \sqrt{\operatorname{th}^2 \gamma_1 + \operatorname{th}^2 \gamma_2 + \operatorname{th}^2 \gamma_3}$$

(при физическом движении всегда  $\gamma > 0$ ),

$$\operatorname{th} \gamma_k = \cos \alpha_k \cdot \operatorname{th} \gamma = v_k/c, \quad k = 1, 2, 3 \quad (\operatorname{th} \gamma = \operatorname{th} \gamma \cdot \mathbf{e}_\alpha), \quad (30A)$$

где  $\gamma_k$  – частный гиперболический угол между  $\overrightarrow{ct}^{(1)}$  и  $k$ -проекцией  $\overrightarrow{ct}^{(1)}$  на координатную псевдоплоскость  $\langle x_k^{(1)}, \overrightarrow{ct}^{(1)} \rangle$ . Заметим тут же: любые геометрические объекты с нулевой 4-й координатой в псевдодекартовых базисах в  $\langle P^{3+1} \rangle$ , в том числе векторы тангенса и скорости физического движения, подчиняются формулам евклидовой геометрии в собственном  $\langle \mathcal{E}^3 \rangle$ ; в частности, модули и проекции удовлетворяют теореме Пифагора. Аналогичные генеральные преобразования 2-х проекций мировой (или материальной) точки в пространстве-времени в *физической форме* имеют вид:

$$\mathbf{x} = [\vec{\mathbf{e}}'_\alpha \vec{\mathbf{e}}'_\alpha \cdot \mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{v} \cdot \mathbf{t}^{(1)}] / \sqrt{1 - \|\mathbf{v}\|^2/c^2} + \vec{\mathbf{e}}'_\alpha \vec{\mathbf{e}}'_\alpha \cdot \mathbf{x}^{(1)},$$

$$ct = [ct^{(1)} - \mathbf{v}' \cdot \mathbf{x}^{(1)}/c] / \sqrt{1 - \|\mathbf{v}\|^2/c^2}; \quad (t = 0, \mathbf{x} = \mathbf{0}).$$

Линейные преобразования координат в 4-мерной *физической форме* вывел Герглотц [57; 37, с. 27], используя разложение  $\mathbf{x}^{(1)}$  в  $\langle \mathcal{E}^3 \rangle^{(1)}$  на релятивистскую и нерелятивистскую ортопроекции (*принцип Герглотца*).

Во всех вышеуказанных преобразованиях координат мировой точки применяется два вида базиса:  $\tilde{\mathbf{E}}_1 = \{\mathbf{I}\}$  и  $\tilde{\mathbf{E}} = \text{roth } \Gamma \cdot \tilde{\mathbf{E}}_1 = \{\text{roth } \Gamma\}$ . Первый из них входит в множество универсальных базисов  $\langle \tilde{\mathbf{E}}_{1\alpha} \rangle$  (16А). Понятие *универсальный базис* в СТО, очевидно, также относительное. Оно привязано к конкретному наблюдателю, например, к  $N_1$  в системе  $\tilde{\mathbf{E}}_1$ . Напомним, что именно в исходном  $\tilde{\mathbf{E}}_1$ , как правило, выражаются матрицы других псевдодекартовых базисов. Концепция универсального базиса позволяет установить отношение наблюдателя  $N_1$  к любому другому псевдодекартову базису  $\tilde{\mathbf{E}}_k = T_{1k} \cdot \tilde{\mathbf{E}}_1$ . При этом возможны 3 варианта:

- 1)  $T_{1k}' \cdot T_{1k} = \mathbf{I} \rightarrow \tilde{\mathbf{E}}_k \in \langle \text{rot } \Theta \rangle$  – другой универсальный базис, то есть с тем же наблюдателем  $N_1$ ;
- 2)  $T_{1j} = T_{1j}' \rightarrow \tilde{\mathbf{E}}_j = \{\text{roth } \Gamma_{1j}\} \in \langle \text{roth } \Gamma \rangle$  – гиперболически связанный базис с наблюдателем  $N_j$ ;
- 3)  $T_{1j} = \text{roth } \Gamma_{1j} \cdot \text{rot } \Theta_{1j} \rightarrow \tilde{\mathbf{E}}_j \in \langle \Gamma \rangle$  – общий правый псевдодекартов базис, но также с наблюдателем  $N_j$ .

В первом варианте суббазис  $\tilde{\mathbf{E}}_k^{(3)}$  неподвижен относительно  $N_1$ , но сферически сдвинут относительно суббазиса  $\tilde{\mathbf{E}}_1^{(3)}$  на угол  $\Theta_{1k}$ . Во втором варианте  $\tilde{\mathbf{E}}_j^{(3)}$  движется со скоростью  $\mathbf{v} = c \cdot \mathbf{th } \gamma$  относительно  $N_1$ . В третьем варианте оба эти преобразования реализуются формально последовательно. В двух последних вариантах, в принципе, возможно перейти к обновлённому собственному универсальному базису, если выполнить модальное преобразование  $T_{1j}^{-1} \cdot \tilde{\mathbf{E}}_j = \{\mathbf{I}\}$ . В этом новом единичном базисе относительно неподвижен наблюдатель  $N_j$ . Тогда все канонические формы матриц преобразований нужно выражать в нём.

Специальный физико-математический принцип относительности (§ 12.3) здесь проявляется в том, что формулы преобразований в любые псевдодекартовы базисы  $\tilde{\mathbf{E}}$  (т. е. с инерциальными  $\tilde{\mathbf{E}}^{(3)}$ ) форминвариантны. Применив формулы многоступенчатых преобразований (485)–(488), имеем:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{E}}_j &= T_{1j} \cdot \tilde{\mathbf{E}}_1, \quad \tilde{\mathbf{E}}_k = T_{1k} \cdot \tilde{\mathbf{E}}_1 = T_{1j} \cdot T_{jk} \cdot \tilde{\mathbf{E}}_1 = \{T_{1j} \cdot T_{jk} \cdot T_{1j}^{-1}\} \cdot T_{1j} \cdot \tilde{\mathbf{E}}_1 = \{T_{1j} \cdot T_{jk} \cdot T_{1j}^{-1}\} \cdot \tilde{\mathbf{E}}_j; \\ \mathbf{u}^{(j)} &= T_{1j}^{-1} \cdot \mathbf{u}^{(i)}, \\ \mathbf{u}^{(k)} &= T_{1k}^{-1} \cdot \mathbf{u}^{(i)} = T_{1j}^{-1} \cdot \{T_{1j} \cdot T_{jk} \cdot T_{1j}^{-1}\}^{-1} \cdot \mathbf{u}^{(i)} = T_{jk}^{-1} \cdot T_{1j}^{-1} \cdot \mathbf{u}^{(i)} \text{ – в координатах } \tilde{\mathbf{E}}_j, \\ \mathbf{u}^{(k)} &= T_{1k}^{-1} \cdot \mathbf{u}^{(i)} \text{ – в координатах } \tilde{\mathbf{E}}_j. \end{aligned}$$

Отсюда видно, что преобразование координат в  $\mathbf{u}^{(k)}$  в  $\tilde{\mathbf{E}}_k$  выражается ковариантно наблюдателями  $N_1$  и  $N_j$  в базисах  $\tilde{\mathbf{E}}_1$  и  $\tilde{\mathbf{E}}_j$ .

В СТО преобразования Лоренца в *активной форме*, как обычно принято, трансформируют какой-либо псевдодекартов базис  $\tilde{E}$ , и соответственно в *пассивной форме* – координаты некоторого геометрического объекта. В силу *однородности и изотропности* пространства-времени Минковского, они могут иметь *чисто тригонометрическую форму!* В скалярной и тензорной форме тригонометрии, в зависимости от смысла решаемой задачи, вычисляются проективные характеристики двух принципиально различных видов – или синусно-косинусные, или тангенсно-секансные. Последние тоже преобразования Лоренца, но совсем другого типа: они определяют Лоренцево сокращение размера объекта по направлению движения! Для этих 2-х целей применяются или ротационные, или деформационные тригонометрические матрицы в тензорной тригонометрической форме. Причём в исходном  $\tilde{E}_1$  они выражены в канонических формах (363), (365). В сокращённой *матрично-векторной* форме записи эти матрицы преобразований представляются в виде:

$$\begin{array}{c}
 \text{roth } \Gamma \qquad \qquad \qquad \text{defh } \Gamma \\
 \begin{array}{|c|c|} \hline \text{ch } \gamma \cdot \overleftarrow{e}_\alpha \overleftarrow{e}_\alpha' + \overrightarrow{e}_\alpha \overrightarrow{e}_\alpha' & \text{sh } \gamma \cdot e_\alpha \\ \hline \text{sh } \gamma \cdot e_\alpha' & \text{ch } \gamma \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline \text{sech } \gamma \cdot \overleftarrow{e}_\alpha \overleftarrow{e}_\alpha' + \overrightarrow{e}_\alpha \overrightarrow{e}_\alpha' & -\text{th } \gamma \cdot e_\alpha \\ \hline + \text{th } \gamma \cdot e_\alpha' & \text{sech } \gamma \\ \hline \end{array} \cdot \qquad (31A)
 \end{array}$$

Гиперболическая ротационная матрица в (31A) и ортосферическая ротационная матрица в (497), (§ 12.3) суть два чистых типа однородных преобразований Лоренца, выраженных в своих канонических тензорных формах в универсальном базисе  $\tilde{E}_1$ . Соответственно, все их сочетания в любых псевдодекартовых базисах, допускаемых метрическим рефлексор тензором  $\Gamma$  (17A), образуют группу непрерывных однородных преобразований Лоренца. Любое такое преобразование приводится (с применением того же универсального базиса) к полярной форме – произведению этих типов, причём ортосферические ротации образуют собственную подгруппу. Напомним, что указанные два чистых типа ротаций в СТО реализуются в своих *элементарных формах*, применяемых при значении  $q = 1$ .

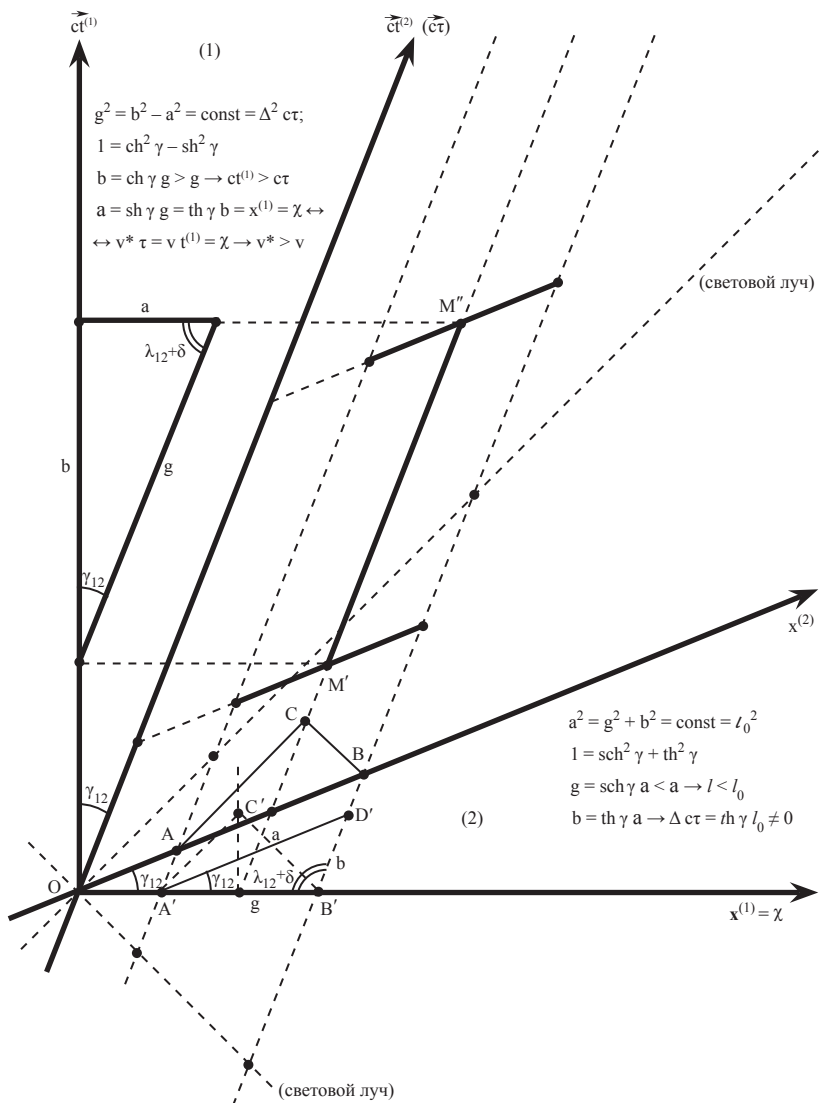
Отметим, что термин *группа преобразований Лоренца* вошёл в научную терминологию (математическую и физическую) именно Пуанкаре в своих первопроходческих публикациях по теории относительности [39]. Однородные преобразования Лоренца составляют существенную часть выдвинутого им ещё ранее физического принципа относительности как дальнейшего развития принципа относительности Галилея.

В последующих двух главах рассматривается тригонометрическая трактовка – синус-косинусная и тангенс-секансная в тензорной форме 4-х релятивистских эффектов, отображаемых во внутренней и во внешней полостях светового конуса относительно универсального базиса  $\tilde{E}_1$ .

### Глава 3А. Эйнштейново замедление времени как следствие ротационного гиперболического преобразования

Понятие “мировая линия” в  $\langle P^{3+1} \rangle$  геометрически связано с изотропным, или *световым конусом*, т. к. любая её “мировая точка”  $M$  всегда есть его *мгновенный центр*. Световой конус разделяет прошлое и будущее. Физическое движение реально всегда идёт по стреле времени из прошлого в будущее и поэтому внутри верхнего конуса *будущего* (где мировые линии имеют наклон к стреле времени  $1 \geq |\text{th } \gamma| \geq 0$  – рис. 1А). Далее движения в СТО отображаются в *однородных координатах* [39, 36], согласно Пуанкаре и Минковскому. Прямые мировые линии отображают равномерное прямолинейное физическое движение. Те из них, которые выходят из начала базисов  $\tilde{E}_k$ , образуют полное множество центральных лучей внутри конуса будущего. В качестве материальной точки для протяжённого объекта выбирают его центр инерции, тождественный его центру массы. Материальная точка  $M$  находится в  $\langle P^{3+1} \rangle$  в состоянии относительного физического покоя в некоторой системе отсчёта  $\tilde{E}_2$  и в состоянии относительного физического движения в базе  $\tilde{E}_1$  (рис. 1А). В  $\langle P^{3+1} \rangle$  касательная к мировой линии в  $M$  – стрела времени  $\vec{c}\tilde{t}^{(m)}$ , а световой конус по наклону не зависит от выбора базиса (инвариант). Для прямой линии базисы  $\tilde{E}_1$  и  $\tilde{E}_2$  связаны гиперболической ротацией:  $\tilde{E}_2 = \text{roth } \Gamma_{12} \cdot \tilde{E}_1$ . С точки зрения наблюдателя  $N_1$  материальная точка  $M$  физически движется в  $\langle \mathcal{E}^3 \rangle^{(1)}$  со скоростью  $v_{12} = c \cdot \text{th } \gamma_{12}$ . В окрестности данной точки может протекать какой-либо процесс. По хронометру наблюдателя  $N_2$  этот процесс длится некоторый интервал времени  $\Delta t^{(2)}$ , определяемый отрезком  $M'M''$  параллельно  $\vec{c}\tilde{t}^{(2)}$ , с учётом масштаба по стреле времени. Это, согласно СТО, есть *собственное время* данного процесса  $\Delta t = \Delta t^{(2)}$ , так как оно измеряется *относительно неподвижным хронометром*. Собственное время в движущемся объекте – абсолютная характеристика, или псевдоевклидов метрический инвариант внутри изотропного конуса. В базисе его покоя  $\tilde{E}_2$  оно тождественно координатному времени  $\Delta t^{(2)}$ . В исходном базисе  $\tilde{E}_1$  координатное время того же процесса, измеряемое наблюдателем  $N_1$ , определяется проекцией отрезка  $M'M''$  на стрелу времени  $\vec{c}\tilde{t}^{(1)}$  с учётом масштаба и составляет величину  $\Delta t^{(1)}$  [37, с. 109]. *Координатное время*  $\Delta t^{(1)}$  в движущемся объекте есть *относительная характеристика* [48]. Например, в исходном базисе  $\tilde{E}_1$  оно вычисляется через ротационное модальное преобразование (также как заданное выше гиперболическое преобразование  $\tilde{E}_1$  в  $\tilde{E}_2$ ) следующим образом:





**Рис. 1А.** Скалярные тригонометрические интерпретации 4-х основных релятивистских эффектов СТО внутри и вне изотропного конуса в  $\langle P^{3+1} \rangle$ , в псевдоплоскости гиперболической ротации  $\Gamma$  в координатах  $\{x, ct\}$ , и одновременности событий по Эйнштейну как геометрической теоремы:

- (1) – эйнштейново замедление времени в движущемся объекте ( $g < b$ , или  $\Delta\tau < \Delta t^{(1)}$ , или  $1 < \text{ch} \gamma$ );
- (2) – лоренцево сокращение протяжённости движущегося объекта ( $g < a$ , или  $\Delta x^{(1)} = l < l_0$ , или  $\text{sech} \gamma < 1$ ).

$$\Delta \mathbf{u}^{(1)} = \text{roth} \Gamma_{12} \cdot \Delta \mathbf{u}^{(2)} = \text{roth} \Gamma_{12} \cdot \begin{array}{|c|} \hline 0 \\ \hline 0 \\ \hline 0 \\ \hline \Delta \tau \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline \text{sh } \gamma_{12} \cdot \cos \alpha_1 \cdot \Delta \tau \\ \hline \text{sh } \gamma_{12} \cdot \cos \alpha_2 \cdot \Delta \tau \\ \hline \text{sh } \gamma_{12} \cdot \cos \alpha_3 \cdot \Delta \tau \\ \hline \text{ch } \gamma_{12} \cdot \Delta \tau \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline \Delta x_1 \\ \hline \Delta x_2 \\ \hline \Delta x_3 \\ \hline \Delta ct \\ \hline \end{array}^{(1)}, \quad (32A)$$

$$\Delta ct^{(1)} = \text{ch } \gamma_{12} \cdot \Delta \tau > \Delta \tau. \quad (\Delta \tau = \Delta ct^{(2)}) \quad (33A)$$

Элемент  $\Delta \mathbf{u}^{(2)}$  *прямолинейной мировой линии*, т. е. как времени процесса, выражен в координатах своего базиса покоя  $\tilde{E}_2 = \{ct, x^{(2)}\}$ . В рассматриваемом частном случае этот отрезок мировой линии (время процесса) есть линейный тензорный элемент в форме времени подобного 4-вектора  $\Delta \mathbf{u}^{(2)}$ . Его квадратичный псевдоевклидов инвариант выражается в любом базисе:

$$-(\Delta \tau)^2 = (\Delta x_1)^2 + (\Delta x_2)^2 + (\Delta x_3)^2 - (\Delta ct)^2 = \text{const}. \quad (34A)$$

Инвариант приводится к тригонометрической форме, например, в  $\tilde{E}_1$ :

$$-1 = (\text{sh}^2 \gamma_1' + \text{sh}^2 \gamma_2' + \text{sh}^2 \gamma_3') - \text{ch}^2 \gamma = \|\mathbf{sh } \gamma\|^2 - \text{ch}^2 \gamma = \text{sh}^2 \gamma - \text{ch}^2 \gamma, \quad (35A)$$

где  $\gamma_k'$  – гиперболический угол между  $\vec{ct}$  и её ортопроекцией на координатную псевдоплоскость  $\langle x_k, ct \rangle$ ;  $\text{sh } \gamma_k' = \cos \alpha_k \cdot \text{sh } \gamma$ . (35A) даёт инвариант “-1” при преобразованиях Лоренца для единичного времени подобного линейного элемента. Инвариантное собственное время в каком-либо псевдодекартовом базисе выражается тригонометрической форме как:

$$\Delta \tau = \Delta t^{(1)} / \text{ch } \gamma = \min \langle \Delta t^{(j)} \rangle. \quad (36A)$$

Для *криволинейной мировой линии* то же, но *мгновенное* ротационное преобразование применяется к дифференциалу её дуги как к линейному элементу:

$$d\mathbf{u}^{(1)} = \{\text{roth } \Gamma\}^{(m)} d\mathbf{u}^{(m)} = \{\text{roth } \Gamma\}^{(m)} \cdot \begin{array}{|c|} \hline dx_1 \\ \hline dx_2 \\ \hline dx_3 \\ \hline d\tau \\ \hline \end{array}^{(1)}. \quad (37A)$$

Элемент  $d\mathbf{u}^{(m)}$  выражен в координатах *мгновенного базиса*  $\tilde{E}_m = \{ct, x^{(m)}\}$ , который на дифференциальном уровне в СТО всегда инерциален с точки зрения наблюдателя  $N_1$  в  $\tilde{E}_1$ , так как  $ct$  и  $x^{(m)}$  – *мгновенные касательная и псевдо-нормаль*, а преобразование – *априори инерциальную систему*  $\tilde{E}_1$ . Поэтому в дифференциальной форме имеем аналогично (36A):

$$d\tau^{(m)} = dt^{(1)} / \text{ch } \gamma = d\tau^{(m)} / \text{ic} = \min \langle dt^{(j)} \rangle. \quad (38A)$$

В результате интегрирования (38А) имеем соотношение  $\Delta t = \Delta l / c$ , где  $\Delta l$  – псевдоевклидова длина отрезка мировой линии [39, 36, 37, с. 110]. (36А) и (38А) выражают тригонометрически релятивистский эффект *эйнштейнова замедления (растяжения) времени в движущемся объекте* [48]. Это происходит с точки зрения наблюдателя  $N_1$  или любого другого инерциального наблюдателя, относительно которого движется данный объект. Такой эффект, как и другие релятивистские эффекты в СТО, имеют чисто координатно-описательную интерпретацию. (В свою очередь, природа собственного времени  $\tau$  требует отдельного обсуждения, что затрагивается в последней главе.) Отметим, что эффект релятивистского сокращения времени в движущемся объекте исторически впервые установил Фойгт (1887 г.) и затем независимо от него Лоренц (1892 г.).

Рассматриваемый времени подобный феномен – фрагмент мировой линии, согласно (32А) и (37А), в базисе  $\tilde{E}_1$  имеет ещё проекцию на  $\langle \mathcal{E}^3 \rangle^{(1)}$  – пространственный путь объекта, *выражаемый тождественно как через координатное, так и через собственное время*, а именно:

$$\Delta l^{(1)} = \sqrt{\Delta^2 x_1^{(1)} + \Delta^2 x_2^{(1)} + \Delta^2 x_3^{(1)}} = \text{th } \gamma \cdot \Delta ct^{(1)} = v \cdot \Delta t^{(1)} = \text{sh } \gamma \cdot \Delta ct = v^* \cdot \Delta t.$$

Характеристика  $v^*$  определяется здесь в дополнение к *координатной скорости*  $v$  как *собственная скорость* физического движения:

$$v^* = c \cdot \text{sh } \gamma = \frac{dx^{(1)}}{dt} > v = c \cdot \text{th } \gamma = \frac{dx^{(1)}}{dt} ; v_k^* = c \cdot \text{sh } \gamma_k' = c \cdot \cos \alpha_k \cdot \text{sh } \gamma. \quad (39A)$$

Все четыре вектора:  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{v}^*$ ,  $\text{th } \gamma$  и  $\text{sh } \gamma$  – коллинеарны. Связь между проекциями гиперболического угла  $\gamma_k$  из (30А) и  $\gamma_k'$  из (35А) видна из соотношений:

$$v_k / c = \Delta x_k^{(1)} / \Delta ct^{(1)} = \text{th } \gamma_k = \text{sh } \gamma_k / \text{ch } \gamma_k = \text{sh } \gamma_k' / \text{ch } \gamma.$$

В псевдоплоскости гиперболической ротации та же задача сводится к решению плоского “внутреннего” гиперболически прямоугольного псевдоевклидова треугольника (§ 6.4), в котором  $\Delta ct$  – гипотенуза «g»,  $\Delta l^{(1)} = \|\Delta \mathbf{x}^{(1)}\|$  – катет «a» и  $\Delta ct^{(1)}$  – катет «b» (см. рис. 1А).

Заметим, что в произведениях (32А), (37А) ротационная гиперболическая матрица действует формально в усечённом виде, а именно только своей нижней строкой. Вызвано это тем, что исходный линейный элемент параллелен собственной стреле времени, т. е. все его точки в  $\tilde{E}_m$  имеют *нулевую абсциссу*. Очевидно то, что для использования матрицы в полном виде исходный линейный элемент должен образовывать некоторый угол  $\gamma$  со стрелой времени  $\vec{ct}^{(2)}$ . Это может быть, например, при анализе двух- и многоступенчатых движений (см. далее в гл. 7А).

Тем же тригонометрическим способом устанавливается ещё одна существенная теорема СТО и геометрии Минковского – с обобщением (36А). Она формулируется так: “Из всех мировых линий, соединяющих непрерывно две причинно-связанные мировые точки  $M'$  и  $M''$  в  $\langle P^{3+1} \rangle$ , прямолинейный отрезок  $M'M''$  и при этом обязательно внутри светового конуса имеет максимально возможную псевдоевклидову длину (или собственное время)”.

$$ct_2 - ct_1 = \Delta ct > \Delta ct' = \int_{t_1}^{t_2} \operatorname{sch} \gamma \, dct = \int_{t'_1}^{t'_2} dct' \geq 0.$$

С другой стороны, минимальная длина  $l = 0$  таковой непрерывной мировой линии имеет место при соединении точек  $M'$  и  $M''$  световыми отрезками (то есть при условии  $\gamma = \infty$ ). При этом всегда достаточно двух таких отрезков.

Данное неравенство математически трактует широко известный и популярный релятивистский *эффект близнецов*, так как его левая часть выражает также так называемое “земное время”, а правая часть – время, измеряемое космонавтом, для одного и того же космического полёта. Но в главе 5А мы покажем *утопический* характер подобных космических полётов для современного человека даже к ближайшей звездной системе!

## Глава 4А. Лоренцево сокращение протяжённости как следствие деформационного гиперболического преобразования

Во внешней полости светового (изотропного) конуса в  $\langle P^{3+1} \rangle$  обычно рассматривают любые совокупности мировых точек, принадлежащих некоторому евклидову пространству, например  $\langle \mathcal{E}^3 \rangle^{(k)}$ , отображаемом в базисе  $\vec{E}_k$ . В простейшем варианте эта совокупность состоит из точек, принадлежащих одному и тому же геометрическому объекту, находящемуся в состоянии покоя в  $\langle \mathcal{E}^3 \rangle^{(i)}$ , или в состоянии физического движения с его отображением проективно в базисе  $\vec{E}_j$ , с точки зрения наблюдателя  $N_j$ , физически неподвижного в  $\langle \mathcal{E}^3 \rangle^{(i)}$ . В базисе  $\vec{E}_j$  все эти точки имеют одинаковую временную координату на стреле времени  $\vec{ct}^{(j)}$ , то есть они *одновременные*. На рис. 1А(2) это проиллюстрировано на примере стержня длиной  $l_0$ , покоящегося на евклидовой оси  $x_2$  ( $j = 2$ ) и движущегося вдоль евклидовой оси  $x_1$  ( $i = 1$ ) со скоростью  $v$  ( $\text{th } \gamma = v/c$ ). Соответственно наблюдатель фиксирует все точки объекта (стержня) как проекцию на ось  $x_1$  ( $\vec{E}_1$ ), но параллельно оси  $\vec{ct}^{(2)}$  ( $\vec{ct}^{(i)}$ ), т. к. их мировые линии идут параллельно ей. В результате длина стержня как бы меньше. Указанный пространству подобный феномен есть *мировая фиксация* данного геометрического объекта, как множества точек, фиксируемых на  $x_1$  ( $\langle \mathcal{E}^3 \rangle^{(i)}$ ). Мировая фиксация этим простым графическим способом задаёт понятие одновременности множества точек объекта в конкретных любых базисах с условием её реализуемости, оговорённом вначале.

Подпространства  $\langle \mathcal{E}^3 \rangle^{(k)}$  и  $\vec{ct}^{(j)}$  гиперболически ортогональны тогда и только тогда, когда этот геометрический объект находится в состоянии физического покоя в  $\langle \mathcal{E}^3 \rangle^{(k)}$ . В этом случае данные индексы  $k$  и  $j$  совпадают, а мировая фиксация этого объекта по сути есть *собственная*. Она отвечает истинным размерам объекта (например, стержня  $l_0$ ) в состоянии покоя.

С математической точки зрения, эйнштейново (физическое) определение одновременности, применительно к пространству событий, есть изящная *геометрическая теорема* в  $\langle P^{3+1} \rangle$ . В двумерной трактовке: “В треугольнике ABC (рис. 1А), образованном пространству подобным отрезком АВ и парой встречных световых отрезков АС и ВС, медиана и высота, опущенные из вершины С, тождественны друг другу”.

*Следствие*: “В световом треугольнике ABC в данной псевдоплоскости медиана и основание есть одноиндексные стрела времени  $\vec{ct}$  и пространственная ось  $x$ , то есть они гиперболически ортогональны”.

В четырёхмерной трактовке: “В конусе, получаемом любым *эллиптическим* сечением светового конуса, медиана, опущенная из его вершины С, и трёхмерное основание конуса гиперболически ортогональны друг другу. *Следствие*: медиана, опущенная из вершины конуса С на это основание, есть высота; и обратно.” Одновременность *всех точек* любой мировой фиксации *событий*, как относительное понятие, определяется по отношению или к какому-либо  $\langle \mathcal{E}^3 \rangle^{(k)}$  (принадлежность ему), или к какой-либо  $\vec{ct}^{(k)}$  (гиперболическая ортогональность ей как множеству).

Как было определено выше, *собственная* мировая фиксация объекта тождественна объекту в состоянии физического покоя. Но *несобственная* мировая фиксация, по определению, есть графически *одновременное сечение* мировой траектории геометрического объекта в некотором данном псевдоевклидовом базисе  $\vec{E}_i$ . Если геометрический объект физически покоится в  $\langle \mathcal{E}^3 \rangle^{(i)}$ , его мировая траектория в пространстве Минковского параллельна стреле времени  $\vec{ct}^{(i)}$ . Тогда нахождение мировой фиксации объекта в базисе  $\vec{E}_i$  сводится к его аффинному проецированию на  $\langle \mathcal{E}^3 \rangle^{(i)}$  параллельно  $\vec{ct}^{(i)}$ , то есть к его проецированию в перекрёстном базисе  $\vec{E}_{i,j} \equiv \{x_k^{(i)}, \vec{ct}^{(i)}\}$  (§ 5.10). Перекрёстное проецирование объекта однократно описывается формально *гиперболическим* деформационным преобразованием, действующим в той же псевдоплоскости, что и ротация. Теперь эта же псевдоплоскость имеет ещё свойства *квазиевклидовой* плоскости, так как при данном деформационном преобразовании в ней действует *перекрёстный квазиевклидов инвариант* (§§ 5.10 и 12.3). Геометрический объём мировой фиксации объекта имеет максимальное значение именно для *собственной* характеристики:

$$V = v^{(i,j)} / \text{sch } \gamma = \max \langle v^{(i,j)} \rangle. \quad (40A)$$

При равномерном прямолинейном движении (в том числе мгновенно) в зависимости от размерности  $k \leq n$  геометрического объекта, как хорошо известно, возможны четыре варианта его *мировой траектории*: **линия** для объекта размерности 0 (точка); **полоса** для объекта размерности 1 (стержень); трёх- или четырёхмерный **брус** для объектов размерности 2 (треугольник, параллелограмм) или 3 (тетраэдр, параллелепипед). Здесь используются простейшие геометрические объекты, сводимые математически к *линеорам* (§ 5.1). Множество всех мировых фиксаций объекта геометрически тождественно множеству всех пространству подобных сечений его *мировой траектории*. В частности, относительно неподвижный наблюдатель  $N_1$  фиксирует стержень одновременно как проекцию на  $\langle \mathcal{E}^3 \rangle^{(1)}$  параллельно  $\vec{ct}^{(2)}$  (рис.1А). Мировые фиксации, как и мировые траектории (линии для точек), – тензорные понятия валентности 1. Для указанных простейших геометрических объектов мировая фиксация выражается либо как  $4 \times 1$ -вектор, либо как  $4 \times 2$ -линеор, либо как  $4 \times 3$ -линеор в зависимости от их размерности. Если объект покоится в  $\langle \mathcal{E}^3 \rangle^{(i)}$ , то в  $\vec{E}_j$  определяется *собственная мировая фиксация*.

В базисе  $\tilde{E}_j$  объекты размерности 1, 2 и 3, приложенные в некоторой мировой точке (для материального тела – центр массы), выражаются как элементы линейного пространства Минковского:

$$\mathbf{a}^{(j)} = \begin{array}{|c|} \hline \Delta x_1 \\ \hline \Delta x_2 \\ \hline \Delta x_3 \\ \hline 0 \\ \hline \end{array}^{(j)}; \quad A_{4 \times 2}^{(j)} = \begin{array}{|c|c|} \hline \Delta x_{11} & \Delta x_{12} \\ \hline \Delta x_{21} & \Delta x_{22} \\ \hline \Delta x_{31} & \Delta x_{32} \\ \hline 0 & 0 \\ \hline \end{array}^{(j)}; \quad A_{4 \times 3}^{(j)} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \Delta x_{11} & \Delta x_{12} & \Delta x_{13} \\ \hline \Delta x_{21} & \Delta x_{22} & \Delta x_{23} \\ \hline \Delta x_{31} & \Delta x_{32} & \Delta x_{33} \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}^{(j)}. \quad (41A)$$

В перекрёстном базисе  $\tilde{E}_{j,i}$  они те же как собственные фиксаци в  $\langle \mathcal{E}^3 \rangle^{(j)}$ :

$$\mathbf{a}^{(j,i)} = \mathbf{a}^{(j)}; \quad A_{4 \times 2}^{(j,i)} = A_{4 \times 2}^{(j)}; \quad A_{4 \times 3}^{(j,i)} = A_{4 \times 3}^{(j)}. \quad (42A)$$

Но при деформационных модальных преобразованиях координат этих тензоров из  $\tilde{E}_{j,i}$  в другой перекрёстный базис  $\tilde{E}_{i,j}$  действует *однократный квазиевклидов метрический инвариант* перекрёстного проецирования:

$$[\mathbf{a}^{(j)}]' \cdot \mathbf{a}^{(j)} = [\mathbf{a}^{(i,j)}]' \cdot \mathbf{a}^{(i,j)} = \iota_0^2 = \text{const} > 0, \quad (43A)$$

$$[A^{(j)}]' \cdot A^{(j)} = [A^{(i,j)}]' \cdot A^{(i,j)} = |A|^2 = \text{Const}. \quad (44A)$$

Этот нвариант схож как бы с евклидовым ввиду имеющейся тут в базисе  $\tilde{E}_i$  сферическо-гиперболической аналогии *конкретного типа* (§ 6.2):

$$\text{defh } \Gamma_{ij} \equiv \text{rot } \Phi(\Gamma_{ij}) \equiv \text{defh}^{-1} \Gamma_{ji} \quad (\text{th } \Gamma \equiv \sin \Phi \leftrightarrow \text{sh } \Gamma \equiv \text{tg } \Phi) \quad (45A)$$

При таком *двойственном* определении несобственной мировой фиксаци с *однократным перекрёстным проецированием* для нахождения новых координат этих тензоров можно, в принципе, применять обе модальные матрицы в (45A) – гиперболическую деформационную или сферическую ротационную, последнюю только с преобразованием угла  $\Gamma \rightarrow \Phi$ . Выберем первое – с известным углом  $\Gamma_{ij}$ , применяя как пассивное преобразование:

$$\mathbf{a}^{(i,j)} = \text{defh } \Gamma_{ij} \cdot \mathbf{a}^{(j,i)} = \begin{array}{|c|} \hline \Delta x_1^{(i,j)} \\ \hline \Delta x_2^{(i,j)} \\ \hline \Delta x_3^{(i,j)} \\ \hline \Delta ct^{(j,i)} \\ \hline \end{array}, \quad (46A)$$

$$A_{4 \times 2}^{(i,j)} = \text{defh } \Gamma_{ij} \cdot A_{4 \times 2}^{(j,i)} = \begin{array}{|c|c|} \hline \Delta x_{11}^{(i,j)} & \Delta x_{12}^{(i,j)} \\ \hline \Delta x_{21}^{(i,j)} & \Delta x_{22}^{(i,j)} \\ \hline \Delta x_{31}^{(i,j)} & \Delta x_{32}^{(i,j)} \\ \hline \Delta ct_1^{(j,i)} & \Delta ct_2^{(j,i)} \\ \hline \end{array}, \quad (47A)$$

$$A_{4 \times 3}^{(i,j)} = \text{defh } \Gamma_{ij} \cdot A_{4 \times 3}^{(j,i)} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \Delta x_{11}^{(i,j)} & \Delta x_{12}^{(i,j)} & \Delta x_{13}^{(i,j)} \\ \hline \Delta x_{21}^{(i,j)} & \Delta x_{22}^{(i,j)} & \Delta x_{23}^{(i,j)} \\ \hline \Delta x_{31}^{(i,j)} & \Delta x_{32}^{(i,j)} & \Delta x_{33}^{(i,j)} \\ \hline \Delta ct_1^{(j,i)} & \Delta ct_2^{(j,i)} & \Delta ct_3^{(j,i)} \\ \hline \end{array}. \quad (48A)$$

Первые три строки тензоров в новом перекрёстном базисе определяют новые евклидовы характеристики (координаты) объекта в конкретной мировой фиксации. Используя каноническую структуру (365), выразим, например, новые координаты *стержня* (46А) через исходные:

$$\mathbf{a}^{(i,j)} = \begin{array}{|c|} \hline \Delta x_1^{(j)} - \cos \alpha_1 \cdot \cos \varepsilon \cdot l_0 \cdot (1 - \text{sech } \gamma) \\ \hline \Delta x_2^{(j)} - \cos \alpha_2 \cdot \cos \varepsilon \cdot l_0 \cdot (1 - \text{sech } \gamma) \\ \hline \Delta x_3^{(j)} - \cos \alpha_3 \cdot \cos \varepsilon \cdot l_0 \cdot (1 - \text{sech } \gamma) \\ \hline \cos \varepsilon \cdot l_0 \cdot \text{th } \gamma \\ \hline \end{array}, \quad (49A)$$

где:  $l_0 = \|\mathbf{a}^{(j)}\|$  – длина стержня в состоянии покоя;  $\varepsilon$  – угол между стержнем в состоянии покоя и вектором антискорости  $\mathbf{v}_{ji} = (-\mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{v}_{ij})^{(j)}$  с его направляющими косинусами в суббазисе покоя стержня  $\tilde{E}_j^{(3)}$ , что и у вектора  $\mathbf{v}_{ij} = (\mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{v}_{ij})^{(i)}$  в суббазисе  $\tilde{E}_i^{(3)}$ . Причём имеем соотношение:

$$\cos \alpha_1 \cdot \Delta x_1^{(j)} + \cos \alpha_2 \cdot \Delta x_2^{(j)} + \cos \alpha_3 \cdot \Delta x_3^{(j)} = \mathbf{e}_\alpha' \cdot \mathbf{a}^{(j)} = \cos \varepsilon \cdot l_0 = \|\overleftarrow{\mathbf{v}}' \cdot \mathbf{a}^{(j)}\|. \quad (50A)$$

Формула (49А) выражает тригонометрическим образом *лоренцево сокращение движущегося стержня* в генеральной форме преобразования его псевдодекартовых координат из состояния относительного покоя.

Отметим релятивистский эффект: *векторы скорости*  $(\mathbf{v}_{ij})^{(i)}$  и *анти-скорости*  $(-\mathbf{v}_{ji})^{(j)}$  образуют гиперболический угол  $\gamma_{ij}$ , а не тождественны! Если направление скорости совпадает с осью  $x_1$ , то  $\cos \alpha_1 = +1$ ,  $\cos \alpha_2 = \cos \alpha_3 = 0$ ; и новые координаты стержня определяются в виде:

$$\mathbf{a}^{(i,j)} = \begin{array}{|c|} \hline 0 + \text{sch } \gamma \cdot \Delta x_1^{(j)} \\ \hline \Delta x_2^{(j)} + 0 \\ \hline \Delta x_3^{(j)} + 0 \\ \hline 0 + \text{th } \gamma \cdot \Delta x_1^{(j)} \\ \hline \end{array}, \quad (51A)$$

где дана разбивка на его нерелятивистскую и релятивистскую части. Если же при этом ориентация стержня и вектора антискорости одинакова ( $\varepsilon = 0 \rightarrow \cos \varepsilon = +1$ ), то имеем:



$$\mathbf{a}^{(i,j)} = \begin{array}{|c|} \hline \operatorname{sech} \gamma \cdot l_0 \\ \hline 0 \\ \hline 0 \\ \hline \operatorname{th} \gamma \cdot l_0 \\ \hline \end{array}. \quad (52A)$$

1-я евклидова координата выражает тригонометрически релятивистскую формулу лоренцева сокращения протяжённости [34, 37, с.109]:

$$l^{(i)} = \operatorname{sech} \gamma_{ij} \cdot l_0 = \sqrt{1 - (v/c)^2} \cdot l_0 < l_0. \quad (53A)$$

Нормальные относительно вектора антискорости координаты стержня не изменяются. Новые и исходные координаты стержня в (49A) и в частных случаях (51A), (52A) подчиняются квазиевклидову инварианту (43A). Просуммировав квадраты декартовых координат в формуле (49A), получаем модуль евклидовой длины движущегося стержня. В общем случае имеем для ориентированного стержня лоренцево сокращение его декартовой перекрёстной проекции, или несобственной фиксации:

$$\begin{aligned} l^{(i)} &= \|\Delta \mathbf{x}^{(i,j)}\| = l_0 \cdot \sqrt{\cos^2 \varepsilon \cdot \operatorname{sech}^2 \gamma_{ij} + \sin^2 \varepsilon} = l_0 \cdot \sqrt{1 - \cos^2 \varepsilon \cdot \operatorname{th}^2 \gamma_{ij}} = \\ &= l_0 \cdot \sqrt{1 - \cos^2 \varepsilon \cdot (v/c)^2} < l_0. \end{aligned} \quad (54A)$$

В соответствии с *принципом Герглотца* [57], вывзим её релятивистскую и нерелятивистскую составляющие. Часть фиксации, нормальная вектору скорости в  $\tilde{E}_i^{(3)}$ , инвариантна и является её нерелятивистской составляющей:

$$[\mathbf{a}^{(i,j)}]_{\text{inv}} = \mathbf{a}^{(j)} - \cos \varepsilon \cdot l_0 \cdot \begin{array}{|c|} \hline \mathbf{e}_\alpha \\ \hline 0 \\ \hline \end{array} = \frac{\Delta \mathbf{x}^{(j)} - \mathbf{e}_\alpha \cdot \cos \varepsilon \cdot l_0}{0}. \quad (55A)$$

Вычитая из (49A) вектор (55A), получаем релятивистскую часть:

$$[\mathbf{a}^{(i,j)}]_{\text{rel}} = \frac{\mathbf{e}_\alpha \cdot \cos \varepsilon \cdot \operatorname{sech} \gamma \cdot l_0}{\cos \varepsilon \cdot \operatorname{th} \gamma \cdot l_0} = \cos \varepsilon \cdot \operatorname{sch} \gamma \cdot l_0 \cdot \begin{array}{|c|} \hline \mathbf{e}_\alpha \\ \hline \operatorname{sh} \gamma \\ \hline \end{array}. \quad (56A)$$

Применяя к декартовой части в (56A) теорему Пифагора, получаем в итоге релятивистскую составляющую квадрата евклидовой длины движущегося стержня  $(\cos \varepsilon \cdot \operatorname{sech} \gamma \cdot l_0)^2$ . Аналогичным образом из (55A) и (50A) получаем нерелятивистскую составляющую  $(\sin \varepsilon \cdot l_0)^2$ . Это алгебраически объясняет структуру (54A). (Она же может быть получена графическим способом.) Итак, евклидова длина движущегося стержня складывается, согласно (54A), в ортогональной сумме Герглотца в  $\langle \mathcal{E}^3 \rangle^{(i)}$  из нерелятивистской проекции « $\sin \varepsilon \cdot l_0$ »

и релятивистской проекции « $\cos \varepsilon \cdot \operatorname{sech} \gamma \cdot l_0$ ». Первая из них есть нормальная проекция стержня относительно вектора скорости  $\mathbf{v}_{ij}$ . При перекрёстном проецировании (гиперболической деформации) она инвариантна. Поэтому данная составляющая сферически ортогональна обоим векторам скоростей:  $\mathbf{v}_{ij}$  в  $\langle \mathcal{E}^3 \rangle^{(i)}$  и  $\mathbf{v}_{ji}$  в  $\langle \mathcal{E}^3 \rangle^{(j)}$ . Вторая из них получается из параллельной проекции стержня перекрёстным проецированием параллельно  $\vec{\mathbf{c}}^{(j)}$  на  $\langle \mathcal{E}^3 \rangle^{(i)}$ , конкретно на направление  $\mathbf{v}_{ij}$ .

Квадрат квазиевклидовой длины стержня как в целом, так и только в его релятивистской проекции, согласно (43А), есть здесь квадратичные пространству подобные инварианты, или *перекрёстные квазиевклидовы инварианты*:

$$[l^{(i,j)}]^2 = l_0^2 = \|\Delta \mathbf{x}^{(i,j)}\|^2 + \Delta^2 \mathbf{c}^{(j,i)} = [l^{(i,j)}]^2 + \Delta^2 \mathbf{c}^{(j,i)} = \text{const}, \quad (57A)$$

$$[l^{(j,i)}]_{\text{rel}}^2 = l_0^2 \cdot \cos^2 \varepsilon = \|\Delta \mathbf{x}^{(i,j)}\|_{\text{rel}}^2 + \Delta^2 \mathbf{c}^{(j,i)} = [l^{(i,j)}]_{\text{rel}}^2 + \Delta^2 \mathbf{c}^{(j,i)} = \text{const}. \quad (58A)$$

Инвариант (58А) приводится к тригонометрической форме:

$$(\operatorname{sech}^2 \gamma_1'' + \operatorname{sech}^2 \gamma_2'' + \operatorname{sech}^2 \gamma_3'') + \operatorname{th}^2 \gamma = \|\operatorname{sech}^2 \gamma\| + \operatorname{th}^2 \gamma = \operatorname{sech}^2 \gamma + \operatorname{th}^2 \gamma = 1, \quad (59A)$$

где  $\gamma_k''$  – гиперболический угол между вектором антискорости ( $-\mathbf{v}_{ij}$ ) в  $\tilde{\mathbf{E}}_j^{(3)}$  и осью  $x_k$  в  $\tilde{\mathbf{E}}_i^{(3)}$ ;  $\operatorname{sech} \gamma_k'' = \cos \alpha_k \cdot \operatorname{sech} \gamma$ . Это инвариант деформационных гиперболических преобразований для единичного пространству подобного линейного элемента. Собственная длина стержня, то есть его евклидова длина в состоянии покоя, – квазиевклидов метрический инвариант в любых других перекрёстных базисах  $\tilde{\mathbf{E}}_{k,j}$ , в частности, и в  $\tilde{\mathbf{E}}_{i,j}$ :

$$l_0 = \frac{l^{(i,j)}}{\sqrt{\cos^2 \varepsilon \cdot \operatorname{sech}^2 \gamma + \sin^2 \varepsilon}} = \max \langle l^{(i,j)} \rangle. \quad (60A)$$

Родственная ей формула (54А) выражает также тригонометрически фиксируемый релятивистский эффект *лоренцева сокращения евклидовой протяжённости движущегося стержня вдоль направления его физического движения*. Данный эффект имеет координатную природу, то есть не вызывает механических напряжений. Отметим, что эффект сокращения движущегося объекта исторически впервые установил Фитцджеральд (1892 г.).

Множество всех мировых фиксаций движущегося стержня по сути полуоткрытое, так как оно не содержит крайних сечений его мировой траектории гиперповерхностью изотропного (светового) конуса (рис. 1А). Крайние сечения стержня (в бесконечности) имеют нулевую евклидову длину релятивистской кросс проекции, а для объектов ранга  $> 1$  имеют нулевые евклидовы нормы порядка 1 и 2 для релятивистской части

кросс проекции и порядка 3 для объёмной кросс фиксации. Они отвечают этим линейным объектам, движущимся как бы со скоростью света.

Рассматриваемый пространству подобный феномен в новом перекрёстном базисе  $\tilde{E}_{i,j}$ , согласно (49А), имеет и временную проекцию. Эта проекция относится именно к его стреле времени  $\vec{ct}^{(i)}$ . Следовательно, она трактуется в базисе  $\tilde{E}_j$  и объясняется релятивистски так. Наблюдатель  $N_j$  воспринимает равноценный стержень, покоящийся на оси  $x^{(i)}$ , как бы укороченным, причём с евклидовой длиной, тождественно равной (53А). Когда в процессе движения оба стержня сойдутся, их отдельно левые и отдельно правые концы встретятся с *эксцессом времени* в системе  $\tilde{E}_j$

$$\Delta ct^{(j,i)} = \Delta ct^{(i)} = l_0 \cdot \text{th } \gamma_{ij} \neq 0. \quad (61A)$$

В классической кинематике его бы не было. Конечно, в обоих случаях одновременность трактуется именно по Эйнштейну, чтобы не учитывать время распространения света от одного конца стержня к другому. Это *релятивистский эффект неодновременности встречи начала и конца двух равноценных стержней* (коллинеарных и соосных направлению движения). Он обусловлен тем, что движущееся евклидово пространство претерпевает гиперболическую ротацию (как и его стрела времени), а вместе с ним и стержень. Формула (61А) выражает эксцесс времени для случая, когда один из стержней покоится, а другой движется. Если сопоставить друг против друга равноценные точки этих стержней, то контакт пар точек при встрече стержней распространяется в системе  $\tilde{E}_j$  вдоль  $x^{(i)}$  слева направо со сверхсветовой скоростью (*суперскорость*):

$$w = l_0 / \Delta t^{(i)} = c / \text{th } \gamma_{ij} = \text{cth } \gamma_{ij} \cdot c = c^2/v > c. \quad (62A)$$

(в процессе ускоренного релятивистского движения она изменяется от  $\infty$  до  $\rightarrow c$ .) Понятно, что в классической кинематике все эти пары точек встречаются одновременно.

Заметим, что в произведениях (46А)–(48А) деформационная гиперболическая матрица действует формально в усечённом виде, а именно только своими тремя верхними строками. (Сравним это с аналогичным замечанием в гл. 3А для ротационного преобразования координат.) Вызвано это тем, что здесь исходные геометрические объекты (линеоры) параллельны собственному евклидову подпространству. Результат лоренцева сокращения движущегося векторного элемента выражается в векторном виде формулой (49А), а в скалярном виде формулой (54А).

В квазиплоскости гиперболической деформации в  $\tilde{E}_{i,j}$ , тождественной тут псевдоплоскости гиперболической ротации в  $\tilde{E}_i$ , рассматриваемая задача сводится к решению плоского *внешнего* гиперболически прямоугольного треугольника (§ 6.4), в котором  $l^{(i)}$  – гипотенуза «g»,  $l_0$  – катет «a» и  $\Delta ct^{(i)}$  – катет «b» (см. рис. 1А(2), где  $i = 1, j = 2$ ).

Если Лоренцево сокращение дать матрицей  $\text{rot } \Phi(\Gamma_{ij})$  в (45А), то её надо ось  $x^{(i)}$  повернуть до её угла  $\varphi(\gamma)$  с  $x^{(i)}$ . Ортопроекция АВ на  $x^{(i)}$  есть *катет*  $l^{(i)}$ !

В перекрёстном базисе  $\tilde{E}_{i,j}$  для 2-х векторов-фиксаций объектов в  $\langle \mathcal{E}^3 \rangle^{(i)}$  имеем:  $\cos \beta_{12}^{(i,j)} = [\mathbf{g}_1^{(i,j)}]' \cdot \mathbf{g}_2^{(i,j)} / \|\mathbf{g}_1^{(i,j)}\| \cdot \|\mathbf{g}_2^{(i,j)}\| = [\mathbf{e}_1^{(i,j)}]' \cdot \mathbf{e}_2^{(i,j)}$ .

Здесь используется алгебраическая формула для косинуса скалярного угла между векторами в евклидовом пространстве. Применив далее ранее полученное соотношение (54А), получаем тригонометрическую формулу для косинуса угла  $\beta_{12}$  между двумя движущимися векторными элементами (стержнями), приложенными в одной мировой точке М:

$$-1 \leq \cos \beta_{12}^{(i)} = \frac{\cos \beta_{12}^{(i)} - \cos \varepsilon_1 \cdot \cos \varepsilon_2 \cdot \text{th}^2 \gamma}{\sqrt{1 - \cos^2 \varepsilon_1 \cdot \text{th}^2 \gamma} \cdot \sqrt{1 - \cos^2 \varepsilon_2 \cdot \text{th}^2 \gamma}} \leq +1 \quad (63A)$$

( $0 \leq \beta_{12}^{(i,j)} \leq \pi$ ), где  $\beta_{12}^{(i)}$  и  $\beta_{12}^{(j)}$  – скалярные углы между этими векторами, измеряемые  $N_i$  и  $N_j$ ,  $\varepsilon_k$  – угол между стержнем  $k$  в состоянии покоя и вектором антискорости. (Следствие: *угол  $\pi$  и параллельные углы между векторами релятивистски не искажаются!*) В  $\tilde{E}_i$  пара векторов и вектор антискорости составляют тройку векторов в  $\langle \mathcal{E}^3 \rangle^{(i)}$ . Согласно неравенству Адамара, для определителя Грама их единичных векторов:

$$0 \leq \det \{[\mathbf{e}_1 \ \mathbf{e}_2 \ \mathbf{e}_3]' \cdot [\mathbf{e}_1 \ \mathbf{e}_2 \ \mathbf{e}_3]\} = s_{123}^2 \leq 1. \quad (64A)$$

Отсюда для тройки векторов следует тригонометрическое неравенство

$$2 \cos \alpha_{12} \cdot \cos \alpha_{13} \cdot \cos \alpha_{23} \leq \cos^2 \alpha_{12} + \cos^2 \alpha_{13} + \cos^2 \alpha_{23} \leq 1 + 2 \cos \alpha_{12} \cdot \cos \alpha_{13} \cdot \cos \alpha_{23}.$$

В данном случае  $\alpha_{13} = \varepsilon_1$ ,  $\alpha_{23} = \varepsilon_2$ ,  $\alpha_{12} = \beta_{12}$ . С учётом этого и дополнительного условия  $\text{th}^2 \gamma < 1$  неравенство (63А) получает строгое обоснование. Если исходный угол между векторами прямой  $\beta_{12}^{(i)} = \pi/2 \rightarrow \cos \beta_{12}^{(i)} = 0$ , то новый угол острый при  $\cos \varepsilon_1 \cdot \cos \varepsilon_2 < 0$ , тупой при  $\cos \varepsilon_1 \cdot \cos \varepsilon_2 > 0$ , нулевой при  $\cos \varepsilon_1 = \cos \varepsilon_2 = 0$ . Если же  $\beta_{12}^{(j)} = 0$ , то  $\rightarrow \cos \beta_{12}^{(i)} = 1$ ,  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$  и  $\beta_{12}^{(i,j)} = 0$ . Если оба вектора ортогональны вектору антискорости, а следовательно, и сам угол тоже, то в таком случае релятивистский эффект изменения угла отсутствует, а именно  $\cos \varepsilon_1 = \cos \varepsilon_2 = 0 \rightarrow \beta_{12}^{(i,j)} = \beta_{12}^{(j)}$ . Если же один из этих векторов коллинеарен вектору антискорости, то  $\varepsilon_1 = 0 \rightarrow \beta_{12}^{(i)} = \varepsilon_2 \rightarrow \cos \beta_{12}^{(i)} = \cos \varepsilon_2$ . Тогда  $\|\cos \beta_{12}\|$  уменьшается. При этом тупой угол уменьшается, а острый увеличивается:

$$0 < \cos \beta_{12}^{(i,j)} = \cos \beta_{12}^{(j)} \cdot \sqrt{\frac{1 - \text{th}^2 \gamma}{1 - \cos^2 \varepsilon_2 \cdot \text{th}^2 \gamma}} < \cos \beta_{12}^{(j)}. \quad (\beta_{12}^{(j)} = \varepsilon_2) \quad (65A)$$

Релятивистская площадь параллелограмма, образуемого этими векторами:

$$S_{12}^{(i,j)} = L_1^{(i,j)} \cdot L_2^{(i,j)} \cdot \sin \beta_{12}^{(i,j)} = \\ = \frac{S_{12}^{(j)}}{\sin \beta_{12}^{(j)}} \cdot \sqrt{\sin^2 \beta_{12}^{(j)} - (\cos^2 \varepsilon_1 + \cos^2 \varepsilon_2 - 2 \cos \beta_{12}^{(j)} \cdot \cos \varepsilon_1 \cdot \cos \varepsilon_2) \cdot \text{th}^2 \gamma}. \quad (66A)$$

Диагонали движущегося параллелограмма подвержены лоренцеву сокращению, если при этом они не ортогональны вектору антискорости. В общем случае имеем следующие релятивистские значения для длин этих диагоналей (первой и второй):

$$[L^{(i,j)}]_{1,2}^2 = [L^{(j)}]_{1,2}^2 - [L_1^{(j)} \cdot \cos \varepsilon_1 \pm L_2^{(j)} \cdot \cos \varepsilon_2]^2 \cdot \text{th}^2 \gamma. \quad (67A)$$

Объём параллелепипеда, как и любого другого тела, уменьшается прямо пропорционально секансу гиперболического угла движения  $\gamma$ . Учтя дополнительно формулы (64A) и (54A), вычисляем синусную норму движущегося трёхмерного линейного угла:

$$0 < s_{123}^{(i,j)} = \frac{s_{123}^{(j)} \cdot \text{sch } \gamma}{\sqrt{1 - \cos^2 \varepsilon_1 \cdot \text{th}^2 \gamma} \cdot \sqrt{1 - \cos^2 \varepsilon_2 \cdot \text{th}^2 \gamma} \cdot \sqrt{1 - \cos^2 \varepsilon_3 \cdot \text{th}^2 \gamma}} < 1. \quad (68A)$$

Это неравенство нетрудно доказать, выразив ту же синусную норму угла через (63A) и (64A):

$$[s_{123}^{(i,j)}]^2 = 1 + 2 \cdot \cos \beta_{12}^{(i,j)} \cdot \cos \beta_{13}^{(i,j)} \cdot \cos \beta_{23}^{(i,j)} - \cos^2 \beta_{12}^{(i,j)} - \\ - \cos^2 \beta_{13}^{(i,j)} - \cos^2 \beta_{23}^{(i,j)}.$$

Существенным отличием лоренцева сокращения геометрических параметров объекта вдоль движения от эйнштейнова замедления времени в движущейся системе является то, что для многоступенчатых движений оно не суммируется через матричное суммирование гиперболических углов движений (§§ 5A, 7A). Это обусловлено его тригонометрической природой как однократного деформационного гиперболического преобразования (тангенс-секансного), а не ротационного (синус-косинусного). Именно поэтому общее лоренцево сокращение может вычисляться по суммарному гиперболическому углу движения или по суммарной скорости.

Имеется другая существенная особенность: лоренцево сокращение – *артефакт*, то есть это кажущееся сокращение, наблюдаемое, например, в универсальном базисе  $\tilde{E}_1$ . При возврате туда объекта (в систему покоя) все геометрические параметры сохраняются. Внутренних механических напряжений в материальном объекте из-за инерциального движения не может возникнуть. Наконец, согласно (45A), по его геометрии имеется *визуальная схожесть* с результатом сферической ротации на угол  $\Phi(\Gamma)$  с последующим косинусным проецированием.

## Глава 5А. Тригонометрические модели коллинеарных двух-, многоступенчатых и интегральных движений в СТО и в гиперболической геометрии

Рассмотрим тригонометрическую интерпретацию суммирования коллинеарных физических движений. В этой главе, как правило, скорости и ускорения фигурируют в скалярной форме. Релятивистский закон сложения скоростей Пуанкаре – Эйнштейна (как и тангенсов) при их коллинеарности имеет простую гиперболическую интерпретацию в форме *согласованной двухступенчатой ротации* (486):

$$\text{roth } \Gamma_{13} = \text{roth } \Gamma_{12} \cdot \text{roth } \Gamma_{23} = \text{roth } (\Gamma_{12} + \Gamma_{23});$$

$$\cos \alpha_{(13)} \cdot \gamma_{13} = \cos \alpha_{(12)} \cdot \gamma_{12} + \cos \alpha_{(23)} \cdot \gamma_{23} \quad (\cos \alpha = \pm 1, \gamma > 0), \quad (69A)$$

$$\text{th} [\cos \alpha_{(13)} \cdot \gamma_{13}] = \text{th} [\cos \alpha_{(12)} \cdot \gamma_{12} + \cos \alpha_{(23)} \cdot \gamma_{23}], \quad (70A)$$

$$v_{13} = c \cdot \text{th} [\text{arth } v_{12}/c + \text{arth } v_{23}/c] = (v_{12} + v_{23}) / (1 + v_{12} \cdot v_{23} / c^2)$$

$$(v_{12} \cdot v_{23} > 0 \leftrightarrow |v_{13}| < |v_{12} + v_{23}|, \quad v_{12} \cdot v_{23} < 0 \leftrightarrow |v_{13}| > |v_{12} + v_{23}|).$$

Гиперболическая форма данного закона впервые была установлена Зоммерфельдом с геометрической интерпретацией на *сфере мнимого радиуса* [37, с. 111; 62]. В свете ранее изложенного последняя есть гиперболоид II Минковского – его верхняя часть (§ 12.1). По существу это есть правило суммирования тангенсных проекций тригонометрически согласованных гиперболических отрезков. Релятивистский закон сложения нескольких коллинеарных скоростей в тригонометрической форме выражается в многоступенчатой интерпретации в виде:

$$\cos \alpha \cdot \gamma = \sum_{t=1}^m \cos \alpha_{(t)} \cdot \gamma_{(t)} \quad (\cos \alpha = \pm 1, \gamma > 0), \quad (71A)$$

$$v = c \cdot \text{th} \sum_{t=1}^m \text{arth } v_t / c. \quad (72A)$$

Термин “коллинеарность” тут довольно условен и означает только то, что векторы частных скоростей направлены вдоль собственной оси  $x^{(t)}$  в пределах одной псевдоплоскости  $\langle x, \vec{ct} \rangle$ . Дискретное суммирование скоростей осуществляется при их трансляциях в исходный базис  $\vec{E}_1$  с  $N_1$ .

Интегральное коллинеарное движение как мировая линия в  $\langle P^{3+1} \rangle$  проецируется гиперболически в некоторую  $\langle \mathcal{E}^3 \rangle$  как прямолинейное физическое движение. Более конкретно такое движение реализуется в некоторой псевдоплоскости  $\langle P^{1+1} \rangle$ , а физически проецируется как прямая на любую её пространственную ось, например,  $x_1 = \chi$  в базисе  $\tilde{E}_1$ . Суммирование приращений скорости осуществляют интегрально, а по мировой линии – по изменению тангенса угла наклона к стреле времени. Отсюда видна условность термина “прямолинейное физическое движение” с точки зрения объемлющего пространства-времени Минковского. (Объяснение дано в конце гл. 7А.) С другой стороны, в пространстве-времени Лагранжа коллинеарная мировая линия отображается всегда как прямолинейное физическое движение в едином для всех базисов  $\langle \mathcal{E}^3 \rangle$ .

Гиперболическая проекция мировой линии коллинеарного движения в своей псевдоплоскости  $\langle P^{1+1} \rangle$  имеет в связанном с ней базисе  $\tilde{E}$  постоянный евклидов вектор направляющих косинусов  $e_a$ . В частности, он может относиться к универсальному базису  $\tilde{E}_1$ , которому в СТО отвечает состояние покоя в нём наблюдателя  $N_1$  – см. в гл. 1А. В СТО определяется *характеристический гиперболический угол* движения  $\gamma$  как угол наклона мировой линии к стреле времени (рис. 2А). Если особо не оговорено, то угол  $\gamma$  отсчитывается в универсальном базисе относительно  $\tilde{ct}^{(1)}$ . Например, для прямой мировой линии относительная скорость между наблюдателями  $N_1$  и  $N_2$  определяется гиперболическим тангенсом угла движения с 2-х противоположных точек зрения [рис. 2А (1)]:

$$\begin{aligned} \text{th } \gamma_{12} = v_{12}/c = \Delta x^{(1)}/\Delta ct^{(1)} &= (\Delta x^{(1)} \cdot \text{sech } \gamma)/(\Delta ct^{(1)} \cdot \text{sech } \gamma) = \\ &= -\Delta x^{(1)} \cdot \text{sech } \gamma/\Delta ct^{(2)} = -\text{th } \gamma_{21} \end{aligned} \quad (73A)$$

( $x^{(1)} = \chi$ ,  $ct^{(2)} = ct$  – *собственные координаты*).

То же самое имеет место при прямолинейном физическом движении материального объекта с ускорением (замедлением). С каждой точкой М его мировой линии связан *мгновенный псевдодекартов базис*:

$$\tilde{E}_m = \text{roth } \Gamma \cdot \tilde{E}_1 = F_1(\gamma, e_a) \cdot \tilde{E}_1. \quad (74A)$$

Гиперболический тангенс  $\text{th } \gamma$ , определяющий скорость физического движения, выражается двояко – с точек зрения наблюдателей  $N_1$  и  $N_m$ :

$$\text{th } \gamma = \frac{v}{c} = \frac{d\chi}{dct^{(1)}} = \frac{dx^{(1)}}{dct^{(1)}} = \frac{dx^{(1)} \cdot \text{sech } \gamma}{dct^{(1)} \cdot \text{sech } \gamma} = -\frac{dx^{(m)}}{dct}. \quad (75A)$$

За собственное (*истинное*) расстояние  $\chi$  здесь принимается координата  $x^{(1)}$ , то есть неподвижная в исходном универсальном базисе  $\tilde{E}_1$ .

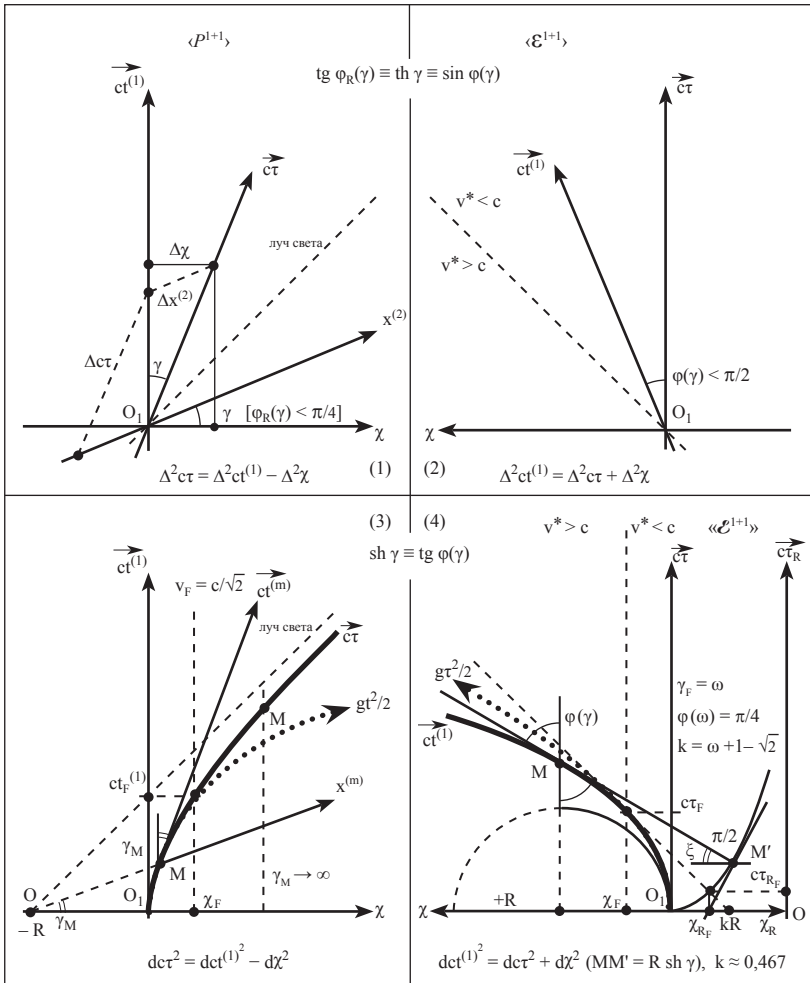


Рис. 2А. Мировые линии материальной точки М для простейших прямолинейных физических движений – равномерного (1, 2) и равномерно ускоренного (3, 4) в универсальном, собственном и сжатом базисах (.....) – нерелятивистские кинематические параболы).

За собственное время здесь принимается величина

$$\tau = \int_0^t dt^{(m)} = \int_0^t \operatorname{sech} \gamma dt^{(1)}, \text{ то есть время, измеренное по хронометру в движущемся объекте, или в текущем суббазисе } \tilde{E}_m^{(3)}.$$



Криволинейная мировая траектория тождественна криволинейной стреле собственного времени  $\int_0^{\tau} d ct^{(m)} \equiv \vec{c}\tau$  [рис. 2А (3)] для движущегося объекта. Её направленная касательная  $\vec{c}t^{(m)}$ , вместе с тем, есть мгновенная стрела собственного времени. В формулах (73А), (75А) при вычислении относительной скорости наблюдателей  $N_2$  или  $N_m$  используется движущаяся координата  $x^{(2)} = x^{(1)} \cdot \text{sech } \gamma$ , которая в  $\tilde{E}_m$  релятивистски сокращена в сравнении с собственной координатой  $\chi = x^{(1)}$ . Аналогично, при измерении той же скорости  $v$  наблюдателем  $N_1$  используется координатное время  $t^{(1)}$ , которое здесь релятивистски увеличено в сравнении со временем  $\tau$ . Поэтому вычисляемая скорость  $v$  по существу координатная. С другой стороны, *собственная скорость* физического движения (39А) определяется с использованием только *собственных координат*, как относительный синусный инвариант:

$$\frac{v^*}{c} = \frac{d x^{(1)}}{d ct^{(m)}} = \frac{d \chi}{d c\tau} = \text{ch } \gamma \cdot \text{th } \gamma = \text{sh } \gamma > \text{th } \gamma = \frac{v}{c}. \quad (76A)$$

*Собственная скорость* в собственных координатах превышает обычную  $v^* = \text{sh } \gamma \cdot c > v = \text{th } \gamma \cdot c$ . Она ясно трактует “парадокс близнецов” в СТО!

Закон сложения коллинеарных *собственных скоростей* имеет синусную интерпретацию (хотя гиперболические углы суммируются точно также, как и ранее)

$$\begin{aligned} v_{13}^* &= c \cdot \text{sh} [\cos \alpha_{(13)} \cdot \gamma_{13}] = c \cdot \text{sh} [\cos \alpha_{(12)} \cdot \gamma_{12} + \cos \alpha_{(23)} \cdot \gamma_{23}] = \\ &= c \cdot [\cos \alpha_{(12)} \cdot \text{sh } \gamma_{12} \cdot \text{ch } \gamma_{23} + \cos \alpha_{(23)} \cdot \text{sh } \gamma_{23} \cdot \text{ch } \gamma_{12}] = \\ &= v_{12}^* \cdot \sqrt{1 + (v_{23}^*/c)^2} + v_{23}^* \cdot \sqrt{1 + (v_{12}^*/c)^2}. \end{aligned} \quad (77A)$$

$$(v_{12} \cdot v_{23} > 0 \leftrightarrow |v_{13}^*| > |v_{12}^* + v_{23}^*|); \quad v^* = v/\sqrt{1 - (v/c)^2}, \quad (1/v^2 - 1/v^{*2} = 1/c^2),$$

что эквивалентно тригонометрически тождеству  $c \text{th}^2 \gamma - \text{cosh}^2 \gamma = 1$ .

Векторы  $\mathbf{v}^*$ ,  $\mathbf{sh } \gamma$  (при  $n > 1$ ) имеют те же направляющие косинусы, что и векторы  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{th } \gamma$ , так как они получаются из одного и того же векторного параметра  $d\mathbf{x}$  в числителе дроби.

$$\text{В } \langle P^{3+1} \rangle, 3 \times 1 \text{ производная } \frac{d \mathbf{x}^{(2)}}{d \tau} = \frac{\text{sch } \gamma d \mathbf{x}^{(1)}}{\text{sch } \gamma d t} = -\frac{d \mathbf{x}^{(1)}}{d t} \text{ задаёт вектор-скорость}$$

$N_1$  от  $N_2$  в базисе  $\tilde{E}_2$  по его хронометру. Тогда  $\mathbf{x}^{(2)}$  – собственное расстояние!

Иной смысл имеет  $3 \times 1$  вектор-производная  $\frac{d \mathbf{x}^{(m)}}{d \tau}$  для ускорение движения, задаваемая в мгновенной системе  $\tilde{E}_m$ . Тогда в её *мгновенном начале* координат  $M$  эта скорость-производная нулевая. Определим в окрестности точки  $M$  криволинейной мировой траектории два гиперболических угла:  $\gamma^{(1)} = \gamma$  – общий угол движения в системе  $\tilde{E}_1$  и  $\delta\gamma^{(m)}$  – дополнительный угол движения в системе  $\tilde{E}_m$ , вызванный *внутренним ускорением движения*

(или его замедлением). Дифференциалы координатных скоростей в  $\tilde{E}_1$  и в  $\tilde{E}_m$  в окрестности  $M$  выражаются в тригонометрической форме:

$$\left. \begin{aligned} d \frac{dx^{(1)}}{dct^{(1)}} &= d \frac{d\chi}{dct^{(1)}} = d \operatorname{th} \gamma = \operatorname{sech}^2 \gamma d\gamma, \\ d \frac{dx^{(m)}}{dct^{(m)}} &= d \frac{dx^{(m)}}{dct} = d \operatorname{th} \delta\gamma^{(m)} = \operatorname{sech}^2 \delta\gamma^{(m)} d\delta\gamma^{(m)} = d\delta\gamma^{(m)} = d\gamma^{(m)} = d\gamma. \end{aligned} \right\} (78A)$$

В точке  $M$ :  $\delta\gamma^{(m)} \rightarrow 0$ , а  $d\gamma$  выражается в том же мгновенном базисе  $\tilde{E}_m$  как вдоль мировой линии  $\vec{ct}$ , так и вдоль мгновенной и симметричной ей (относительно изотропного конуса – рис. 4) пространственной оси  $x^{(m)}$  при постоянном  $e_a$  и поэтому  $d\delta\gamma^{(m)} = d\gamma$ . *Внутреннее 3-ускорение* в системе  $\tilde{E}_m$  (где  $v^{(m)} \rightarrow 0$ ), с учётом (78А), где  $\gamma$ :  $\operatorname{th} \gamma = v/c$ , вычисляется как

$$\frac{dv^{(m)}}{d\tau} = \frac{d^2x^{(m)}}{d\tau^2} = c \cdot \frac{d \operatorname{th} \delta\gamma^{(m)}}{d\tau} = c \cdot \frac{d\delta\gamma^{(m)}}{d\tau} = c^2 \frac{d\gamma}{dct} = g(\tau). \quad (79A)$$

Отсюда имеем *фундаментальную тригонометрическую формулу*:

$$d^2x^{(m)} = d\gamma \cdot dct, \quad dx^{(m)} = 0. \quad (80A)$$

( $d^2x^{(m)} = d\gamma \cdot dct$ ,  $dx^{(m)} = 0$  – для общего коллинеарного движения!)

– связь в  $\langle P^{3+1} \rangle$  в СТО 3-х дифференциалов *коллинеарного движения*: времени, пространства и гиперболического угла движения. Причём  $dct$  только коэффициент пропорциональности между  $d^2x^{(m)}$  и  $d\gamma$ . Но  $d\gamma$ , как и  $\gamma$ , могут относиться и ко времени и к пространству, как и тригонометрические функции угла – рис. 4. В (80А)  $d\gamma$  пространству подобный элемент, выражаемый *по псевдонормали* (непо касательной) к мировой линии!

Для мгновенных (ускоренных) базисов  $\tilde{E}_m$  в пространстве-времени Минковского СТО используется также на дифференциальном уровне (с последующим интегрированием получаемых выражений). Поэтому логично, что здесь  $\tilde{E}_m$  принимается мгновенно инерциальной [8, с. 25]. Одновременность трактуется тут именно в универсальном базисе  $\tilde{E}_1$ . Объект в системе  $\tilde{E}_m$  имеет инертную массу, равную массе покоя  $m_0$ . Следовательно, при действии на материальный объект в момент времени  $\tau$  *собственной силы*  $F$  в направлении оси  $x^{(m)}$  он получит в  $\tilde{E}_m$  внутреннее 3-ускорение  $g(\tau)$ , согласно 2-му закону механики Ньютона и (79А):

$$g(\tau) = F(\tau)/m_0 = \frac{d^2x^{(m)}}{d\tau^2} = c^2 \frac{d\gamma}{dct}. \quad (d\gamma = dct/\bar{R} \rightarrow g = c^2/\bar{R}) \quad (81A)$$

Модуль собственной силы  $|F|$ , действующая в базисе  $\tilde{E}_m$ , тождественна во всех базисах (например, для силы инерции это есть число по шкале динамометра в  $\tilde{E}_m^{(3)}$ ). Точно так и  $m_0$  не зависит от системы отсчёта. Ввиду этого определяемый (79А) и (81А) *модуль внутреннего ускорения есть абсолютный инвариант*. В отличие от *относительных инвариантов* эта характеристика в  $\tilde{E}_m$  (!) от угла  $\gamma$  или от  $v$  не зависит!

С учётом данного обстоятельства именно  $\mathbf{g}(\tau)$  является базовым ускорением в теории относительности. Оно же однозначно определяет гиперболическую кривизну мировой линии в пространстве-времени Минковского. При тангенциальном ускорении мировая линия вместе с векторными параметрами движения остаётся в пределах одной псевдоплоскости и тогда  $d\mathbf{x} \sim \bar{\mathbf{g}}(t)$ , ( $\mathbf{e}_a = \mathbf{const}$ ): они коллинеарны. Постоянное и только тангенциальное внутреннее ускорение  $\bar{\mathbf{g}} = c^2/\bar{R}$  задаёт равномерно ускоренное (замедленное) движение по гиперболе псевдорadiуса  $\bar{R}$ . Идущая из центра  $C_1$  кинематическая гипербола всегда принадлежит гиперболоиду I Минковского (рис. 4, § 12.1) с той же начальной точкой  $C_1$ . Впервые такой простейший тип неравномерного релятивистского движения в СТО был изучен Минковским, а затем – в работах Борна и Зоммерфельда [37, с. 111 – 114; 51, 62]. Представляют интерес ещё два типа тангенциального ускорения. Собственное ускорение в  $\tilde{E}_m$  с учётом (76А), (80А) вычисляется следующим образом:

$$\bar{\mathbf{g}}^*(\tau) = \frac{d\mathbf{v}^*}{d\tau} = \frac{d^2\chi}{d\tau^2} = c \cdot \frac{d \operatorname{sh} \gamma}{d\tau} = c \cdot \operatorname{ch} \gamma \cdot \frac{d\gamma}{d\tau} = \operatorname{ch} \gamma \cdot \bar{\mathbf{g}}(\tau) > \bar{\mathbf{g}}(\tau). \quad (82A)$$

Оно больше внутреннего ускорения, ввиду того что в (80А) дифференциал  $d^2x^{(m)}$  (как  $x^{(m)}$  и  $dx^{(m)}$ ) релятивистски сокращён в сравнении с собственной величиной  $d^2x^{(1)}$ . Координатное ускорение в  $\tilde{E}_1$  с учётом (78А), (80А) наоборот меньше внутреннего:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{g}}^{(1)}(t^{(1)}) &= \frac{d\mathbf{v}}{dt^{(1)}} = \frac{d^2\chi}{dt^{(1)2}} = c \cdot \frac{d \operatorname{th} \gamma}{dt^{(1)}} = c \cdot \operatorname{sch}^2 \gamma \cdot \frac{d\gamma}{dt^{(1)}} = \\ &= c \cdot \operatorname{sch}^3 \gamma \cdot \frac{d\gamma}{d\tau} = \operatorname{sch}^3 \gamma \cdot \bar{\mathbf{g}}[\tau(t)^{(1)}] < \bar{\mathbf{g}}[\tau(t)^{(1)}]. \end{aligned} \quad (83A)$$

В изучаемых здесь инвариантах движения в качестве временных параметров используются  $ct^{(1)}$  и  $ct$ . Инварианты движения синхронны в универсальном базисе  $\tilde{E}_1$ , если они фиксируются в нём одновременно по обоим хронометрам. Соотношения одновременности исходя из проецирования времени параллельно  $\langle \mathcal{E}^3 \rangle^{(1)}$  в дифференциальной и интегральной формах в  $\tilde{E}_1$  имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} d\tau &= \operatorname{sech} \gamma \, dct^{(1)}, \\ \tau &= \int_0^{ct^{(1)}} \operatorname{sech} \gamma \, dct^{(1)}; \end{aligned} \right\} \quad (84A)$$

$$\left. \begin{aligned} dct^{(1)} &= \operatorname{ch} \gamma \, d\tau, \\ ct^{(1)} &= \int_0^{\tau} \operatorname{ch} \gamma \, d\tau. \end{aligned} \right\} \quad (85A)$$

Они получаются срезом параллельно оси  $x^{(1)} = \chi$ . Собственное время  $\sigma\tau$ , согласно (84А), есть псевдоевклидова длина дуги мировой линии. При *интегральном движении* (также с коллинеарными  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{g}$ ) угол  $\gamma$  и скорость  $v$  изменяются непрерывно. В частности, при *равномерно ускоренном движении*  $\bar{\mathbf{g}}(\tau) = \bar{\mathbf{g}} = \text{const}$ . С учётом (79А), (84А) имеем:

$$\left. \begin{aligned} d\gamma &= \bar{\mathbf{g}} \, d\tau/c \rightarrow \bar{\mathbf{R}} \, d\gamma = d\sigma\tau, \\ \gamma &= \bar{\mathbf{g}} \cdot \tau/c \rightarrow \bar{\mathbf{R}} \cdot \gamma = \sigma\tau \quad (\bar{\mathbf{g}} = \text{const}); \end{aligned} \right\} \quad (86\text{А})$$

$$\left. \begin{aligned} d \operatorname{sh} \gamma &= \bar{\mathbf{g}} \, dt^{(1)}/c \rightarrow R \, d \operatorname{sh} \gamma = d\sigma ct^{(1)}, \\ \operatorname{sh} \gamma &= \bar{\mathbf{g}} \cdot t^{(1)}/c \rightarrow \bar{\mathbf{R}} \cdot \operatorname{sh} \gamma = \sigma ct^{(1)} \quad (\bar{\mathbf{g}} = \text{const}). \end{aligned} \right\} \quad (87\text{А})$$

Причём  $\frac{d\gamma}{d\tau} = \bar{\mathbf{g}}(\tau)/c$  – *гиперболическая угловая скорость*,

$\bar{\mathbf{R}} = c^2/\bar{\mathbf{g}}$  – радиус-вектор *гиперболической псевдокривизны* (см. § 6.4). Это, в том числе, суть мгновенные характеристики. Теперь указанные соотношения одновременности для равномерно ускоренного движения в  $\tilde{E}_1$  можно выразить через временные аргументы:

$$\left. \begin{aligned} d\sigma\tau &= d\sigma ct^{(1)}/\sqrt{1 + [\bar{\mathbf{g}} \cdot t^{(1)}/c]^2} = d\sigma ct^{(1)}/\sqrt{1 + [c \cdot t^{(1)}/\bar{\mathbf{R}}]^2}, \\ \sigma\tau &= c^2/\bar{\mathbf{g}} \cdot \operatorname{arsh}(\bar{\mathbf{g}} \cdot t^{(1)}/c) = \bar{\mathbf{R}} \cdot \operatorname{arsh}(c \cdot t^{(1)}/\bar{\mathbf{R}}); \end{aligned} \right\} \quad (88\text{А})$$

$$\left. \begin{aligned} d\sigma ct^{(1)} &= \operatorname{ch}(\bar{\mathbf{g}} \cdot \tau/c) \, d\sigma\tau = \operatorname{ch}(c \cdot \tau/\bar{\mathbf{R}}) \, d\sigma\tau, \\ \sigma ct^{(1)} &= c^2/\bar{\mathbf{g}} \cdot \operatorname{sh}(\bar{\mathbf{g}} \cdot \tau/c) = \bar{\mathbf{R}} \cdot \operatorname{sh}(c \cdot \tau/\bar{\mathbf{R}}); \end{aligned} \right\} \quad (89\text{А})$$

$$(t^{(1)}/\tau) = \operatorname{sh} \gamma/\gamma.$$

Продолжим изучение прямолинейного равномерно ускоренного *физического движения*. Координатная и собственная скорости такого физического движения – функции от координатного времени, но они выражаются *синхронно* в  $\tilde{E}_1$  и через собственное время:

$$v = v_t(t^{(1)}) = c \cdot \operatorname{th} \gamma = \bar{\mathbf{g}} \cdot t^{(1)}/\sqrt{1 + [\bar{\mathbf{g}} \cdot t^{(1)}/c]^2} \equiv v_\tau(\tau) = c \cdot \operatorname{th}(\bar{\mathbf{g}} \cdot \tau/c) < \bar{\mathbf{g}} \cdot \tau < \bar{\mathbf{g}} \cdot t^{(1)}, \quad (90\text{А})$$

$$v^* = v_\tau^*(\tau) = c \cdot \operatorname{sh} \gamma = c \cdot \operatorname{sh}(\bar{\mathbf{g}} \cdot \tau/c) \equiv v_t^*(t^{(1)}) = \bar{\mathbf{g}} \cdot t^{(1)} > \bar{\mathbf{g}} \cdot \tau. \quad (91\text{А})$$

Эти неравенства имеют тригонометрическую природу  $\operatorname{th} \gamma < \gamma < \operatorname{sh} \gamma < \operatorname{ch} \gamma$ .

*Собственное расстояние* как функция времени  $t^{(1)}$  по хронометру наблюдателя  $N_1$  имеет вид:

$$\chi = \chi_t(t^{(1)}) = \int_0^{t^{(1)}} v_t(t^{(1)}) dt^{(1)} = \bar{\mathbf{R}} \cdot (\sqrt{1 + [ct^{(1)}/\bar{\mathbf{R}}]^2} - 1) = \bar{\mathbf{R}} \cdot (\operatorname{ch} \gamma - 1). \quad (92\text{А})$$

Параметрически функциональная связь между  $\chi$  и  $ct^{(1)}$  устанавливается соотношениями, где  $\mathbf{ch} \gamma$  отвечает в общем случае 3-х мерному  $\langle \mathcal{E}^3 \rangle^{(1)}$ :

$$\left. \begin{aligned} ct^{(1)} &= \bar{R} \cdot \text{sh } \gamma, \\ [\chi + \bar{R}] &= \bar{R} \cdot \text{ch } \gamma. \end{aligned} \right\} (\mathbf{ch}^2 \gamma - \text{sh}^2 \gamma = 1) \quad (93A)$$

Как из (92A), так и из (93A) выводится гиперболическое кинематическое уравнение для описания равномерно ускоренного движения в координатах  $\tilde{E}_1 = \langle \chi, \vec{ct}^{(1)} \rangle$  (оно даёт инвариант  $R$  для точек гиперболы):

$$(\chi + \bar{R})^2 - (ct^{(1)})^2 = \bar{R}^2 = \left\{ \begin{aligned} \chi + \bar{R} &= \text{ch } \gamma \cdot \bar{R} \\ ct^{(1)} &= \text{sh } \gamma \cdot \bar{R} \end{aligned} \right\} \rightarrow \bar{R} = \frac{\chi}{\text{ch } \gamma - 1} = \frac{ct^{(1)}}{\text{sh } \gamma} = \text{const.} \quad (94A)$$

С точки зрения геометрии Минковского это уравнение задаёт псевдоокружность вещественного радиуса  $\bar{R} = c^2/\bar{g}$  в  $\langle P^{3+1} \rangle$ , а в аффинном смысле – гиперболу. Её траектория имеет постоянную гиперболическую псевдокривизну  $\bar{K}_R = 1/\bar{R}$ . В СТО данный тип движения поэтому именуется как гиперболическое. Это простейший тип коллинеарного интегрального движения. Кинематическая гипербола занимает промежуточное положение между нерелятивистской кинематической параболой от  $t^{(1)}$  и изотропной прямой светового луча, исходящей из точки  $O$  [рис. 2A (3)]:

$$ct^{(1)} - \bar{R} < \chi = \chi_t(t^{(1)}) < g \cdot t^{(1)2/2} \quad (\text{sh } \gamma < \text{ch } \gamma < \text{ch}^2 \gamma). \quad (95A)$$

То же собственное расстояние как функция времени по хронометру наблюдателя  $N_m$  имеет вид:

$$\chi = \chi_\tau(\tau) = \int_0^\tau v_\tau^*(\tau) d\tau = \bar{R} \cdot [\text{ch}(c \cdot \tau / \bar{R}) - 1] = \bar{R} \cdot (\text{ch } \gamma - 1). \quad (96A)$$

Это есть уравнение гиперболической косинусоиды (т. е. цепной линии), представленное в базисе собственных квазидекартовых координат пространства и времени  $\tilde{E} = \langle \chi, \vec{ct} \rangle$  [(рис. 2A(4)]. Прямолинейная ось  $\vec{ct}$  тут получается из гиперболической  $\vec{ct}$  в  $\tilde{E}_1$  спрямлением и перманентной сферической ортогонализацией относительно собственного евклидова подпространства  $\langle \mathcal{E}^3 \rangle^{(1)}$ , то есть в данном случае именно к оси  $\chi = x^{(1)}$ . Формально это реализуется локальным преобразованием мгновенных характеристических углов движения по сферическо-гиперболической аналогии конкретного синус-тангенсового типа (§ 6.2):  $\text{tg } \varphi(\gamma) \equiv \text{sh } \gamma$ ,  $\sin \varphi(\gamma) \equiv \text{th } \gamma$ . То есть теперь сферический тангенс угла наклона кривой и гиперболический синус эквивалентны в базисе  $\tilde{E}$ . В таких специальных квазидекартовых координатах тангенс угла наклона мировой линии (сферический)  $\text{tg } \varphi$  по отношению к стреле собственного времени определяет тригонометрически собственную скорость объекта  $v^*$ , согласно (76A).

По сути, мы перешли в *специальное квазиевклидово пространство*, которое определяется как прямая сферически квазиортогональная сумма собственного евклидова подпространства  $\langle \mathcal{E}^3 \rangle^{(1)} \equiv \text{CONST}$  и преобразованной по синус-тангенсной аналогии спрямлённой стрелы собственного времени  $\vec{ct}$ . Оно предназначено исключительно для анализа движений в неинерциальном *специальном кваздекартовом базисе*  $\vec{E}$ :

$$\langle \mathcal{E}^{3+1} \rangle \equiv \langle \mathcal{E}^3 \rangle^{(1)} \oplus \vec{ct}. \quad (\langle \mathcal{E}^3 \rangle \equiv \text{CONST}, \quad \vec{ct} = \text{Const.}) \quad (97A)$$

На рис. 2А (3) и (4) представлены варианты как для исходной прямолинейной, так и для исходной гиперболической стрелы собственного времени. В 1-м случае  $N_m$  есть *инерциальный наблюдатель*. Любая мировая линия  $\vec{ct}$  в этом квазиевклидовом пространстве описывает движение наблюдателя  $N_m$  в  $\langle \mathcal{E}^3 \rangle^{(1)}$ , но по его хронометру в базисе  $\vec{E}$ .

Ранее, когда формально использовалась аналогия углов, преобразование пространства не осуществлялось. Теперь все стрелы собственного времени подвергнуты сферическо-гиперболическому преобразованию; угол наклона мировой линии стал истинным  $\varphi_R(\gamma) \rightarrow \varphi(\gamma)$ ,  $\text{tg } \varphi_R \rightarrow \sin \varphi$ . Но правило суммирования согласованных углов  $\gamma$ , по-прежнему, распространяется только на гиперболические углы (!):

$$\begin{aligned} \varphi [\cos \alpha_{(13)} \cdot \gamma_{13}] &= \varphi [\cos \alpha_{(12)} \cdot \gamma_{12} + \cos \alpha_{(23)} \cdot \gamma_{23}] \\ (\cos \alpha_{(13)} \cdot \varphi_{13} &\neq \cos \alpha_{(12)} \cdot \varphi_{12} + \cos \alpha_{(23)} \cdot \varphi_{23}), \text{ см. (77A),} \end{aligned}$$

где  $\cos \alpha = \pm 1$ .

Мировая линия в этом специальном квазиевклидовом пространстве имеет квазиевклидову протяжённость – времени подобный инвариант преобразования  $\text{defh } \Gamma \equiv \text{rot } \Phi(\Gamma)$ , *одношаговый* евклидов инвариант – аналогично пространству подобному евклидову инварианту в (57А):

$$\begin{aligned} d \text{ct}^{(1)2} &= d \text{ct}^2 + d\chi^2 = (\cos \varphi d \text{ct}^{(1)})^2 + (\sin \varphi d \text{ct}^{(1)})^2 \equiv \\ &\equiv (\text{sch } \gamma d \text{ct}^{(1)})^2 + (\text{th } \gamma d \text{ct}^{(1)})^2 = \text{const.} \end{aligned} \quad (98A)$$

Равномерное прямолинейное движение описывается прямой с углом наклона  $\varphi = \varphi(\gamma) = \text{const}$  как в обычном квазиевклидовом пространстве. Равномерно ускоренное прямолинейное движение описывается гиперболической косинусоидой (96А). При неуклонном возрастании времени для него собственное расстояние в  $\vec{E}$  стремится *сверху* к функции:

$$f(\text{ct}) = \bar{g} \cdot \tau^2 / 2. \quad (\text{так как } \text{ch } \gamma = 1 + \gamma^2 / 2 + \dots)$$

В собственном кваздекартовом базисе кинематическая косинусоида располагается ниже нерелятивистской кинематической параболы от  $\tau$  и фокальной касательной, но выше касательной окружности [рис. 2А (4)]:

$$\left. \begin{array}{l} \bar{g} \cdot \tau^2 / 2 < \\ \text{ct} - k \cdot \bar{R} \leq \end{array} \right\} \chi = \chi_\tau(\tau) < R - \sqrt{\bar{R}^2 - (c\tau)^2}, \text{ где справа } |c\tau| \leq |\bar{R}|.$$

Тригонометрический эквивалент этого неравенства имеет форму:

$$\gamma^2 / 2 < \text{ch } \gamma - 1 < 1 - \sqrt{1 - \gamma^2}, \text{ где справа } |\gamma| \leq 1. (\gamma = 1 \text{ отвечает } \text{ct} = R!)$$

Фокусные углы наклона гиперболы и косинусоида – рис. 2А(3), (4):  $\gamma_F = \omega = \text{arsh } 1 \approx 0.881$  и  $\varphi_F(\omega) = \pi/4$  – по синус-тангенсовой аналогии.

Отметим, что в псевдоевклидовом и квазиевклидовом базисах обе эти мировые линии равномерно ускоренного движения располагаются по разным сторонам относительно кинематической параболы. При угле движения  $\gamma_F = \omega$  ( $\varphi(\gamma_F) = \pi/4$ ) собственная скорость  $v^*$  достигает значения «с» и далее преодолевает его при  $\gamma > \omega$  и  $\varphi(\gamma) > \pi/4$ ). Фокальное значение координатной скорости составляет  $v_F = c \cdot \text{sch } \omega = c / \sqrt{2}$ . Координаты фокальной точки F в обоих базисах (в псевдоплоскости и в квазиплоскости) выражаются через гиперболический радиус в виде:

$$\chi_F = (\sqrt{2} - 1) \cdot \bar{R} \approx 0,41 \bar{R}; \text{ct}_F^{(1)} = \bar{R}, \text{ct}_F = \omega \bar{R} \approx 0,881 \bar{R}; (\text{ct} = \bar{R} \text{ при } \gamma = 1).$$

$$kR = \text{ct}_F - \chi_F \rightarrow k = \omega + 1 - \sqrt{2} \approx 0,467; \text{ так как в фокусе: } \gamma = \omega \text{ и } \varphi(\omega) = \pi/4.$$

Гиперболическому движению отвечают постоянные *гиперболическая угловая скорость*  $\eta_k$  ротации *касательной гиперболы* и *псевдокривизна* в псевдоплоскости – как *внутренние параметры* вдоль мировой линии:

$$\eta_k = \frac{d\gamma}{d\tau} = c / \bar{R} = c \cdot \bar{K}_R = \bar{g} / c. \quad (99A)$$

Ось гиперболической ротации существует в  $\langle P^{2+1} \rangle$ , где пространству подобна, псевдоевклидово ортогональна псевдоплоскости ротации и проходит через O в  $\tilde{E}_1$  и M в  $\tilde{E}_m$  [рис. 2А(3)]. Фокальные касательные отвечают скоростям  $v_F$  и  $v_F^* = c$ , а также углам наклона  $\omega$  и  $\varphi(\omega) = \pi/4$ . Обычно используемая в формулах СТО скорость света – координатная характеристика. Собственная скорость света  $c^*$  – бесконечная!

Классический *принцип соответствия* в математической трактовке проявляется так, что кинематические гипербола, косинусоида и парабола в точке  $O_1$  [рис. 2А(3,4)] имеют одну и ту же касательную окружность радиуса  $R$ . Это тождественно тому факту, что три указанные кривые в точке  $O_1$  имеют одинаковые производные первого (в данном случае нулевые) и второго порядка. Следовательно, кинематическая парабола, аппроксимирующая гиперболу в окрестности начальной точки  $O_1$  (в нерелятивистской области), имеет тождественный “параболический радиус” в координатах Минковского исходя из соотношения:

$$\chi = g \cdot t^{(1)2} / 2 = [c \cdot t^{(1)}]^2 / 2\bar{R}.$$

\* \* \*

В тригонометрической форме представляются и динамические релятивистские характеристики. С использованием дифференциальных соотношений одновременности (84А), (85А) для более общего случая, а именно – для *поступательного физического движения* материального тела М далее установим в *тригонометрической форме* скалярные, векторные и тензорные координатные отображения для его инерционной массы, импульса и энергии с точки зрения наблюдателя в исходном универсальном базисе  $\tilde{E}_1$ . При математическом описании поступательного физического движения материального тела последнее сводится к таковому для его центра массы как некоторой абстрактной материальной точки. Согласно 2-му закону механики Ньютона, имеем:

$$\begin{aligned} F = F_\tau(\tau) &= m_0 \cdot \frac{dv^{(m)}}{d\tau} = \frac{d[m_0 \cdot v^{(m)}]}{d\tau} = \frac{dp^{(m)}}{d\tau} = m_0 \cdot g(\tau) = m_0 c \cdot \frac{g}{c}(\tau) = m_0 c \cdot \frac{d\gamma}{d\tau} \equiv \\ &\equiv m_0 c \cdot \frac{ch \gamma d\gamma}{dt^{(1)}} = \frac{d(m_0 c \cdot sh \gamma)}{dt^{(1)}} = \frac{d[(ch \gamma \cdot m_0) \cdot (th \gamma \cdot c)]}{dt^{(1)}} = \frac{d(mv)}{dt^{(1)}} = \frac{dp}{dt^{(1)}} = F_t(t^{(1)}). \end{aligned}$$

(Причём в первой вышеуказанной форме только для мгновенного собственного псевдодекартового базиса, где  $m = m_0 = \text{const.}$ ) Это ковариантная форма 2-го закона Ньютона, где одна и та же собственная сила  $F$  в системах  $\tilde{E}_1$  и  $\tilde{E}_m$  определяется исходя из одновременности, согласно (84А), (85А), в одной и той же мировой точке массы М. Мощность от действия собственной силы также в форме механики Ньютона в  $\tilde{E}_1$  выражается в виде:

$$N = F \cdot v = m_0 c \cdot v \cdot \frac{ch \gamma d\gamma}{dt^{(1)}} = \frac{d(m_0 c^2 \cdot ch \gamma)}{dt^{(1)}} = \frac{d(mc^2)}{dt^{(1)}} = \frac{dE}{dt^{(1)}}.$$

(Оба уравнения в *физической форме* впервые получены Пуанкаре [39].)

Отсюда далее в базисе  $\tilde{E}_1$  определяются значения основных релятивистских динамических характеристик: полной массы  $m = ch \gamma \cdot m_0$ , нулевого импульса  $\mathbf{P}_0 = m_0 c$ , импульса  $\mathbf{p} = mv = m_0 v^* = sh \gamma \cdot m_0 c = sh \gamma \cdot \mathbf{P}_0$ , полного импульса  $\mathbf{P} = mc = ch \gamma \cdot \mathbf{P}_0$  и полной энергии  $E = mc^2 = ch \gamma \cdot m_0 c^2 = ch \gamma \cdot E_0$ . Следовательно, значения полных массы, импульса и энергии – *косинусные*, а следовательно, *скалярные* гиперболические проекции собственных характеристик на стрелу времени:

$$\begin{aligned} m &= ch \gamma \cdot m_0 = \sqrt{m_0^2 + (p/c)^2} \approx m_0 + m_0 v^{*2}/2c^2 \approx m_0 + m_0 v^2/2c^2, \\ mc &= P = ch \gamma \cdot P_0 = \sqrt{P_0^2 + p^2} = \sqrt{(m_0 c)^2 + (mv)^2} \approx P_0 + m_0 v^{*2}/2c \approx P_0 + m_0 v^2/2c, \\ mc^2 &= E = ch \gamma \cdot E_0 = \sqrt{E_0^2 + (pc)^2} \approx E_0 + m_0 v^{*2}/2 \approx E_0 + m_0 v^2/2. \end{aligned}$$



Первые приближённые значения ограничивают характеристики сверху, а вторые – снизу, что следует из тригонометрического неравенства:

$$1 + \text{th}^2 \gamma/2 < \text{ch} \gamma < 1 + \text{sh}^2 \gamma/2.$$

(2-я формула даёт *физическую формулу* для релятивистской массы  $m$  !)

Указанные три *полные* динамические релятивистские характеристики прямо пропорциональны друг другу, но каждая из них имеет собственное теоретическое значение. В состоянии относительного покоя (при  $p = 0$ ) любой материальный объект имеет собственный импульс  $P_0 = m_0 c$  и собственную эйнштейнову энергию  $E_0 = m_0 c^2$ . Происхождение этой исходной пары динамических характеристик материального тела (в состоянии *относительного покоя тела*) может объяснить постулат, согласно которому все материальные объекты совершают перманентное движение в  $\langle P^{3+1} \rangle$  вдоль своих мировых линий с постоянной псевдоскоростью «с». (Подробнее это абсолютное движение обсуждается в главе 10А.)

К вышеуказанным скалярным значениям динамических характеристик тут привели изначальные законы классической механики Ньютона, коррекцией только с учётом релятивистского закона сложения скоростей физических движений. Здесь в тригонометрической трактовке понятию “физическая скорость” отвечают гиперболический угол движения и его тригонометрические функции;  $\text{sh} \gamma$  ортопроецируется в 3-х мерное  $\langle \mathcal{E}^3 \rangle^{(1)}$ .

Но последние в релятивистском смысле имеют *тензорный* характер, как и углы. Они выражаются в  $\langle P^{3+1} \rangle$  как двухвалентные тензоры в целом и как одновалентные тензоры – векторы в виде смешанных проекций. Следовательно, для тех же самых динамических характеристик в теории относительности, наряду со скалярными формами, существуют векторные и полные – тензорные формы, получаемые модификацией вышеприведённых уравнений механики Ньютона. Матрица гиперболического ротационного преобразования (364), (31А) в  $\tilde{E}_1$  имеет вид:

$$\text{roth } \Gamma = \begin{array}{|c|c|} \hline \text{ch } \gamma \cdot \overleftarrow{e}_\alpha \cdot e'_\alpha + \overrightarrow{e}_\alpha \cdot e'_\alpha & \text{sh } \gamma \cdot e_\alpha \\ \hline \text{sh } \gamma \cdot e'_\alpha & \text{ch } \gamma \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline I_{3 \times 3} + (\text{ch } \gamma - 1) \cdot \{e_\alpha \cdot e'_\alpha\} & \text{sh } \gamma \cdot e_\alpha \\ \hline (e_\alpha \cdot e'_\alpha = \overleftarrow{e}_\alpha \cdot e'_\alpha) & \\ \hline \text{sh } \gamma \cdot e'_\alpha & \text{ch } \gamma \\ \hline \end{array} \quad (100A)$$

Это *гиперболически ортогональный тригонометрический тензор движения*. Если вышеуказанный материальный объект  $M$  с точки зрения наблюдателя в исходном универсальном базисе  $\tilde{E}_1$  совершает поступательное физическое движение с мгновенной скоростью  $\mathbf{v} = v \cdot e_\alpha = c \cdot \text{th } \gamma = c \cdot \text{th } \gamma \cdot e_\alpha$  или  $\mathbf{v}^* = v^* \cdot e'_\alpha = c \cdot \text{sh } \gamma = c \cdot \text{sh } \gamma \cdot e'_\alpha$ , то в том же базисе определяются три мгновенных *сопутствующих тензора*:

тензор полной инерционной массы, тензор полного импульса и тензор полной энергии (плюс их смешанные векторные проекции):

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{T}_m &= m_0 \cdot \text{roth } \Gamma, \\ \mathcal{T}_p &= m_0 c \cdot \text{roth } \Gamma, \\ \mathcal{T}_E &= m_0 c^2 \cdot \text{roth } \Gamma, \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \mathbf{p}/c &= m_0 \cdot \text{sh } \gamma \cdot \mathbf{e}_\alpha, \\ \mathbf{p} &= m_0 c \cdot \text{sh } \gamma \cdot \mathbf{e}_\alpha = m_0 \mathbf{v}^* = m\mathbf{v}, \\ \mathbf{p}c &= m_0 c^2 \cdot \text{sh } \gamma \cdot \mathbf{e}_\alpha. \end{aligned}$$

Последний для М из указанных известен как *тензор энергии-импульса*. В физической форме в  $\tilde{E}_1$  он представляется также в виде:

$$\begin{array}{|c|c|} \hline E \cdot \overleftarrow{\mathbf{e}}_\alpha \mathbf{e}'_\alpha + E_0 \cdot \overrightarrow{\mathbf{e}}_\alpha \mathbf{e}'_\alpha & \mathbf{p} \cdot c \\ \hline \mathbf{p}' \cdot c & E \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline mc^2 \cdot \overleftarrow{\mathbf{e}}_\alpha \mathbf{e}'_\alpha + m_0 c^2 \cdot \overrightarrow{\mathbf{e}}_\alpha \mathbf{e}'_\alpha & m\mathbf{v} \cdot c \\ \hline m\mathbf{v}' \cdot c & mc^2 \\ \hline \end{array} \quad (101A)$$

В свою очередь, этот 4×4-тензор проективно расщепляется (§ 11.3) на 3×3-тензор (проекция на евклидово подпространство  $\langle \mathcal{E}^3 \rangle^{(1)}$ ), скаляр (проекция на стрелу времени  $\vec{c}t^{(1)}$ ) и пару сопряжённых векторов (смешанные проекции). В мгновенном собственном базисе этот двухвалентный тензор является абсолютным инвариантом  $E_0 \cdot I = m_0 c^2 \cdot I$ . *Тензорная форма обусловлена участием в них гиперболического угла  $\Gamma$ !*

С другой стороны, физические характеристики, подвергаемые лоренцеву сокращению, вычисляются в  $\tilde{E}_1$  через деформационную матрицу-тензор (365), (31А), которая в нём имеет вид:

defh  $\Gamma$

$$\begin{array}{|c|c|} \hline \text{sech } \gamma \cdot \overleftarrow{\mathbf{e}}_\alpha \mathbf{e}'_\alpha + \mathbf{e}_\alpha \mathbf{e}'_\alpha & -\text{th } \gamma \cdot \mathbf{e}_\alpha \\ \hline +\text{th } \gamma \cdot \mathbf{e}'_\alpha & \text{sech } \gamma \\ \hline \end{array}$$

По существу это есть *сферически квазиортогональный тензор деформации* в  $\tilde{E}_1$ . Отметим, что релятивистское сокращение размеров движущегося тела имеет чисто *кажущуюся* – координатную природу. С учётом лоренцева сокращения его объёма (40А) формально *координатная плотность* тела как бы возрастает. Но это вовсе не значит, что на тело в направлении движения действует некая сжимающая сила. Физические силы – абсолютные характеристики, имеющие одинаковые скалярные значения в любых инерциальных базисах, а не только в  $\tilde{E}_m$ . *В тригонометрической трактовке СТО релятивистские преобразования физических величин в наиболее полной форме определяются операциями с выше указанными тензорами движения и деформации!*

Заметим также, что через соотношения (80А), (81А) устанавливается *релятивистский аналог формулы Циолковского* для ракеты, движущейся за счёт внутренней реактивной силы [40]:

$$F = m_0(\tau) \cdot g(\tau) = u \cdot \frac{dm_0(\tau)}{d\tau},$$

$$u \cdot \frac{dm_0(\tau)}{m_0(\tau)} = g(\tau) dt = c d\gamma(\tau),$$

$$m_0(\tau) = m_0 \cdot \exp\left[-\frac{c}{u} \cdot \gamma(\tau)\right],$$

где  $m_0$  и  $m_0(\tau)$  – начальная и мгновенная масса ракеты,  $u$  – скорость истечения реактивного топлива,  $\gamma(\tau) = \text{Arth}[v(\tau)/c]$ . Для гипотетической фотонной ракеты ( $u = c$ ) имеем:

$$m_0(\tau) = m_0 \cdot \exp[-\gamma(\tau)].$$

В сравнении с классическим вариантом Циолковского, вышеуказанная релятивистская формула даёт остаточную массу ракеты меньше исходя из достигнутой координатной скорости и больше исходя из достигнутой собственной скорости:

$$m_0 \cdot \exp(-v^*/u) < m_0(\tau) < m_0 \cdot \exp(-v/u), \text{ или } \text{sh } \gamma > \gamma > \text{th } \gamma.$$

\* \* \*

В качестве конкретного примера для иллюстрации, в том числе и *парадокса близнецов*, рассмотрим тригонометрические выкладки для гиперболического движения ракеты с реверсом, схема которого приведена на рис. 3А. (Подобные примеры впервые рассматривал Ланжевэн [58].)

$$\chi = L/2 = c^2/g \cdot (\text{ch } \gamma_{\max} - 1) \rightarrow \text{ch } \gamma_{\max} = g \cdot \chi / c^2 + 1 = \chi/R + 1;$$

$$\tau = (4c/g) \cdot \gamma_{\max}, \quad t^{(1)} = (4c/g) \cdot \text{sh } \gamma_{\max};$$

$$v_{\max} = c \cdot \text{th } \gamma_{\max}, \quad v_{\max}^* = c \cdot \text{sh } \gamma_{\max};$$

$$m_0(\tau)/m_0 = \exp[(-4c/u) \cdot \gamma_{\max}].$$

Полёт фотонной ракеты до окрестности ближайшей звезды “Проксима Центавра” и обратно в вышеуказанном идеальном режиме характеризуется следующими параметрами:

– расстояние в одну сторону  $L \approx 4,26$  световых лет  $\approx 40,3 \cdot 10^{15}$  м,

– внутреннее ускорение  $g = 10 \text{ м/сек}^2$ ,

– скорость истечения топлива  $u = c$ ;

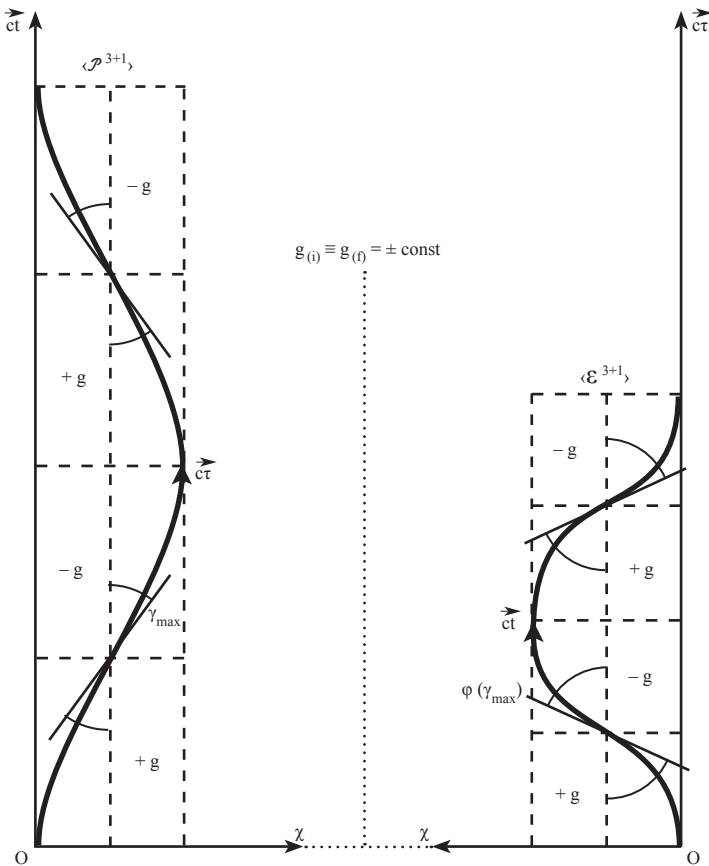
– результаты вычислений

$$\chi \approx 20,15 \cdot 10^{15} \text{ м}, \quad R \approx 9 \cdot 10^{15} \text{ м}, \quad t_F \approx 305 \text{ суток};$$

$$\text{ch } \gamma_{\max} \approx 3,239; \quad \text{sh } \gamma_{\max} \approx 3,081; \quad \text{th } \gamma_{\max} \approx 0,951; \quad \gamma_{\max} \approx 1,8437;$$

$$v_{\max} \approx 0,951c, \quad v^*_{\max} \approx 3,061c,$$

$$\tau \approx 2,21 \cdot 10^8 \text{ сек} \approx 7 \text{ лет}, \quad t^{(1)} \approx 3,70 \cdot 10^8 \text{ сек} \approx 11,7 \text{ лет}.$$



**Рис. 3А.** Реверсивное гиперболическое движение материального объекта в псевдокартовых в  $\langle P^{3+1} \rangle$  (слева) и в квазидекартовых в  $\langle E^{3+1} \rangle$  (справа) координатах под действием постоянной собственной силы, вызывающей постоянное внутреннее ускорение (замедление) объекта.

В этом случае время в световых годах (8,52Г), выражающее в астрономическом масштабе покрытое ракетой расстояние туда и обратно, даже больше затрачиваемого собственного времени (7Г). Относительное снижение массы фотонной ракеты (только за счёт расхода топлива) по *релятивистской* формуле составляет:  $m_0(\tau)/m_0 = \exp(-4\gamma_{\max}) \approx 1/1600$ .

Фотонная ракета с земным внутренним ускорением теоретически менее чем за год достигнет собственной скорости «с» и в конце разгона превысит её трёхкратно. Однако по завершении этой гипотетической экспедиции от первоначальной снаряжённой массы фотонной ракеты должна остаться её совершенно ничтожная часть, что красноречиво свидетельствует об умозрачности путешествий даже к ближайшим звёздным системам за вышеуказанные порядки времён, используя СТО. (Уж не говоря о фантастических прожективных рейсах, используя ОТО, через “кратовые норы-туннели” и т. п. бесплодные фантазии.)

\* \* \*

В общем случае неравномерного, но опять-таки *прямолинейного физического движения* определяются мгновенные характеристики искривления мировой линии по касательным к ней гиперболе (в  $\langle P^{3+1} \rangle$ ) или гиперболической косинусоиде (в  $\langle \mathcal{E}^{3+1} \rangle$ ) в какой-либо точке М. При таком типе движения мировая линия в целом находится в объемлющей псевдоплоскости или квазиплоскости.

Как и в случае идентичной касательной *окружности* к каким-либо регулярным кривым (в одной точке М), для идентичных касательных *гипербол*, а также *гиперболических косинусоид*, справедливо одно общее утверждение. А именно кривые с такого рода идентичными касательными в точке М имеют в ней же тождественные производные первого и второго порядка, выраженные в соответствующей соприкасающейся плоскости, в том числе псевдоплоскости (рис. 2А(3)) или в квазиплоскости.

Радиус гиперболической кривизны в М в соприкасающейся  $\langle P^{1+1} \rangle$  направлен по вектору псевдонормали  $\vec{p}$  (т.е. по  $x^{(m)}$ ) от центра касательной гиперболы. Радиус сферической кривизны в соприкасающейся  $\langle \mathcal{E}^{1+1} \rangle$  направлен по вектору квазинормали  $\vec{q}$  к центру касательной окружности. Вектор касательной  $\vec{i}$  псевдоортогонален  $\vec{p}$  или квазиортогонален  $\vec{q}$ . Все эти векторы суть единичные в своей метрике. Общий математический критерий плоского типа мировой линии в  $\langle P^{3+1} \rangle$  или кривой в  $\langle Q^{2+1} \rangle$  есть её нулевое кручение при ненулевой псевдо- или квазикривизне.

Пусть координаты точек мировой линии фиксируются в  $\langle P^{3+1} \rangle$  в заданном универсальном базисе  $\hat{E}_1$ . Относительно него *простое* прямолинейное физическое движение материального тела определяется тем, что характеристический угол движения  $\gamma$  имеет постоянный вектор направляющих косинусов, например,  $e_a$  в  $\hat{E}_1^{(3)}$ . Тогда объемлющая псевдоплоскость обязательно содержит в себе стрелу времени  $\vec{ct}^{(1)} = \vec{ct}$ .

Ей отвечает пространственная ось  $x^{(1)} = \chi$ . Ось  $\chi$ , касательная  $\vec{i}$  и псевдо-нормаль  $\vec{p}$  имеют одинаковый вектор направляющих косинусов  $\mathbf{e}_\alpha = \text{const}$ . Собственная ось  $\chi$  образует в  $\tilde{E}_1$  угол  $\gamma$  с вектором  $\vec{p}$  и угол  $\varphi$  с вектором  $\vec{q}$ . Те же углы образует вектор  $\vec{i}$  с осью  $\vec{ct}$  в псевдоплоскости и с осью  $\vec{ct}$  в квазиплоскости. Из общих тригонометрических соотношений вычисляем все определяющие характеристики касательных кривых.

Для касательной гиперболы в объемлющей псевдоплоскости

$$\left\{ \begin{array}{l} 1/\bar{R} = \frac{|d\gamma|}{d\tau} = \frac{d \operatorname{Arth} \left| \frac{d\chi}{d\tau} \right|}{\sqrt{d\tau^2 - d\chi^2}} = \frac{\left| \frac{d^2\chi}{d\tau^2} \right|}{\left[ 1 - \left( \frac{d\chi}{d\tau} \right)^2 \right]^{3/2}} = \left| \frac{d^2 x^{(m)}}{d\tau^2} \right|, \\ \chi_R = \chi - \operatorname{ch} \gamma \cdot \mathbf{e}_\alpha \cdot \bar{R}, \quad \left| \operatorname{th} \gamma = \frac{d\chi}{d\tau}. \right. \text{Отсюда следует (80A): } d^2 x^{(m)} = d\gamma \cdot d\tau! \\ \left. \begin{array}{l} \tau_R = \tau - \operatorname{sh} \gamma \cdot \bar{R}, \end{array} \right\} \quad (102A)$$

Для касательных гиперболической косинусоиды и окружности в объемлющей квазиплоскости после преобразования  $\varphi = \varphi(\gamma)$  в  $\tilde{E}_1$  имеем:

$$\left\{ \begin{array}{l} 1/\bar{R} = \operatorname{ch}^2 \gamma \cdot 1/\bar{r} = \operatorname{ch}^2 \gamma \cdot \frac{d\varphi}{d\tau} = \operatorname{ch}^2 \gamma \cdot \frac{d \operatorname{arctg} \left| \frac{d\chi}{d\tau} \right|}{\sqrt{d\tau^2 + d\chi^2}} = \frac{\left| \frac{d^2\chi}{d\tau^2} \right|}{\sqrt{1 + \left( \frac{d\chi}{d\tau} \right)^2}}, \\ 1/\bar{r} = \frac{\left| \frac{d^2\chi}{d\tau^2} \right|}{\left[ 1 + \left( \frac{d\chi}{d\tau} \right)^2 \right]^{3/2}} = \left| \frac{d^2 x^{(m)}}{d\tau^2} \right|, \quad \rightarrow d^2 x^{(m)} = d\varphi \cdot d\tau! \\ \left. \begin{array}{l} \chi_R = \chi - \operatorname{ch} \gamma \cdot \mathbf{e}_\alpha \cdot \bar{R}, \quad \chi_r = \chi + \cos \varphi \cdot \bar{r}, \\ \left. \begin{array}{l} \tau_R = \tau - \gamma \cdot \bar{R}, \quad \tau_r = \tau - \sin \varphi \cdot \bar{r}, \end{array} \right| \operatorname{sh} \gamma = \frac{d\chi}{d\tau} \equiv \operatorname{tg} \varphi(\gamma). \end{array} \right\} \quad (103A)$$

Аналогичным внешним образом в  $\tilde{E}_1$  вычисляются в  $M$  касательные гиперболы и касательные меридианные (то есть большие) окружности к плоским кривым в пространствах  $\langle P^{2+1} \rangle$  и  $\langle Q^{2+1} \rangle$  в гиперболической и в сферической неевклидовых геометриях, в т.ч. с аналогиями  $\gamma \leftrightarrow \varphi$ .

Вообще же тригонометрические формулы для кривизны кривых

$$1/\bar{R} = \frac{d\gamma}{dl}, \quad 1/\bar{r} = \frac{d\varphi}{dl}$$

применимы, в том числе в частных дифференциалах, и для не плоских кривых в ортогональном разложении абсолютной кривизны (гл. 10А).

## Глава 6А. Изоморфное отображение псевдоевклидова пространства в сжатое квазиевклидово пространство

Пространство, само по себе, без движущейся в нём материи не имеет какого-либо *физического* смысла. Это есть математическая абстракция, приспособленная для описания в удобной форме (*концепция Пуанкаре*) общих законов движения материи координатным способом. В главе 5А, согласно (97А), было введено *специальное квазиевклидово* пространство  $\langle \mathcal{E}^{3+1} \rangle$  относительно универсального базиса  $\tilde{E}_1$  в  $\langle P^{3+1} \rangle$ . В этом варианте 3-мерная евклидова составляющая пространства-времени в целом остаётся неизменной. Стрела текущего собственного времени для наблюдателя  $N_m$  в базисе  $\tilde{E}_m$  перманентно сферически ортогонализуется относительно  $\langle \mathcal{E}^3 \rangle^{(1)m}$ . Причём она оказывает этим перманентное воздействие на стрелу  $ct^{(1)}$ , что превращает её в новую мировую линию в  $\langle \mathcal{E}^{3+1} \rangle$  наблюдателя  $N_1$ . Следовательно, для каждого возможного варианта мировой линии в  $\tilde{E}_1$  в  $\langle P^{3+1} \rangle$  есть отклик в  $\langle \mathcal{E}^{3+1} \rangle$  в виде адекватной мировой линии – новой стрелы времени  $\vec{ct}^{(1)}$ , в общем случае криволинейной (вместо  $ct$ ). Квазидекартовы координаты точек М на мировой линии в базисе  $\tilde{E} = \{\chi, ct\}$  фиксируют затраченное собственное время  $ct$  наблюдателя  $N_m$  и им же покрытое собственное расстояние  $\chi$ , измеряемое синхронно с наблюдателем  $N_1$  в  $\langle \mathcal{E}^3 \rangle^{(1)}$ . Условие синхронизации событий в  $\langle \mathcal{E}^{3+1} \rangle$  то же при том  $\langle \mathcal{E}^3 \rangle^{(1)}$ : это параллельность мировых точек событий, в том числе  $N_1$  и  $N_m$ , подпространству  $\langle \mathcal{E}^3 \rangle^{(1)}$ , что отвечает (84А) и (85А) для  $t$  и  $\tau$ !

В данном аспекте  $\langle \mathcal{E}^{3+1} \rangle$  формально синтезируется только из времени подобной составляющей  $\langle P^{3+1} \rangle$  с обменом времени подобных стрел времени. Например, в координатах  $\langle \chi, \vec{ct} \rangle$  – см. рис. 2А (2) линия с *любым наклоном* отображает только временной процесс, то есть это всегда мировая линия. В ином аспекте  $\langle \mathcal{E}^{3+1} \rangle$  синтезируется только из пространству подобной составляющей  $\langle P^{3+1} \rangle$ . В таком особом квазиевклидовом пространстве все линии пространству подобны. Особый интерес представляют эти преобразования пространства  $\langle P^{3+1} \rangle$  вместе с гиперboloидами I и II.

*По 1-му варианту* гиперboloид I, как *геометрическое место* времени подобных гиперболических кривых  $\pm \vec{ct}(\gamma)$  в  $\langle P^{3+1} \rangle$ , преобразуется в цилиндр в  $\langle \mathcal{E}^{3+1} \rangle$ , где его образующие – спрямлённые гиперболы  $\pm \vec{ct}$ , как на рис. 2А (4). Как бы такой же цилиндр, но из кругового множества осей  $\vec{ct}$  в  $\langle P^{3+1} \rangle$ , преобразуется с направлением от оси этого цилиндра в *катеноид* I в  $\langle \mathcal{E}^{3+1} \rangle$ , как *геометрическое место* времени подобных гиперболических косинусоид  $\pm \vec{ct}(\gamma)$ , с заменой ординат  $\vec{ct} \leftrightarrow \vec{ct}$ .

Катеноид I – односвязная (минимальная) гиперповерхность в  $\langle \mathcal{E}^{3+1} \rangle$  с цилиндрической топологией, получаемая ротацией времени подобной косинусоиды  $\pm \text{ct}(\vec{\gamma})$  относительно новой оси  $\vec{\text{ct}}$ . (В неё свернуты обе внутренние полости светового конуса, включая и гиперболоид II.) Координатное время тут – евклидова длина мировой линии  $\vec{\text{ct}}(\gamma)$  в  $\langle \mathcal{E}^{3+1} \rangle$ . Собственное время отображается также евклидовой мерой по новой оси  $\vec{\text{ct}}$ . Поэтому акцентируем особо, что трансформация  $\langle P^{3+1} \rangle \rightarrow \langle \mathcal{E}^{3+1} \rangle$  на примере преобразования гипербол в косинусоиды фактически означает замену псевдоевклидовой меры длины времени ( $\text{ct}^{(1)}$  и  $\text{ct}$ ) на евклидову, разумеется, для специального  $\langle \mathcal{E}^{3+1} \rangle$  и только из универсального базиса!

Катеноид I продуцируется сжатием гиперболоида I по оси времени (при том же его масштабе) с локальным  $k = dt/dt^{(1)} = \text{sch } \gamma < 1$ , согласно (38А). По второму варианту предварительно в уравнениях гиперболы (94А) и косинусоиды (96А) выполним замену:  $\text{ct} \rightarrow l, \chi \rightarrow \text{ct}$  (рис. 4). Аналогично, гиперболоид II как геометрическое место 2-х пространству подобных гиперболических кривых  $\chi(\gamma)$  в  $\langle P^{3+1} \rangle$ , преобразуется в два централизованных круговых множества осей  $\chi$ , исходящих из центров  $C_{II}$  в новом  $\langle \mathcal{E}^{3+1} \rangle$ , как лучи в новом  $\langle \mathcal{E}^3 \rangle^{(2)}$ . Как бы такое же круговое множество, но из осей  $l$  в  $\langle \mathcal{E}^3 \rangle^{(1)}$ , преобразуется с направлением к ординате  $\vec{\text{ct}}$  в катеноид II в новом  $\langle \mathcal{E}^{3+1} \rangle$ , как геометрическое место пространству подобных гиперболических косинусоид  $l(\pm\gamma)$ , с заменой абсцисс  $\chi \leftrightarrow l$ .

Катеноид II – двусвязная гиперповерхность (провисания) в новом  $\langle \mathcal{E}^{3+1} \rangle$  с евклидовой топологией, получаемая ротацией 2-х пространству подобных косинусоид  $l(\gamma)$  относительно ординаты  $\vec{\text{ct}}$ . (Аналогично, в новое подпространство  $\langle \mathcal{E}^3 \rangle^{(2)}$  свернулось внешняя полость светового конуса, включая гиперболоид I.) Катеноид II продуцируется сжатием гиперболоида II по центральным осям пространства  $\langle \mathcal{E}^3 \rangle$  (при том же их масштабе) с локальным  $k = dl/d\chi = \text{sech } \gamma < 1$ .

Между гиперболоидами I, II и катеноидами I, II устанавливается изоморфизм на основе равенства либо пространственных координат  $\chi_k$  (в первом случае), либо временной координаты  $\text{ct}$  (во втором случае). Более того,  $n$ -мерную геометрию гиперболоида I возможно реализовать на изометричной ему вещественной гиперповерхности в объемлющем специальном квазиевклидовом пространстве  $\langle \mathcal{E}^{3+1} \rangle$  (т.е. вообще при  $n \geq 2$ ). Для этого осуществим далее изоморфное преобразование катеноида I.

Известно, эвольвента гиперболической косинусоиды  $\vec{\text{ct}}$  – трактриса. При развёртке косинусоиды её евклидова длина  $\text{ct} = R \cdot \text{sh } \gamma$  – см. (87А) переносится на текущую нормаль-радиус кривизны  $MM'$  трактрисы – см. рис. 2А (4). Мгновенная нормаль трактрисы всегда тождественна касательной  $MM'$  гиперболической косинусоиды как вектор-расстоянию  $\vec{\text{ct}}$  между этими двумя кривыми. Формально это означает спрямление криволинейной стрелы времени  $\vec{\text{ct}}$  в текущую нормаль  $MM'$  трактрисы с их тождественной евклидовой длиной  $\text{ct}$ . В процессе синхронных ротаций времени подобной косинусоиды  $\vec{\text{ct}}$  и времени подобной трактрисы  $\text{ct}_R$  вокруг оси ординат  $\text{ct}_R$  продуцируются катеноид I и трактрисоид I, хорошо известный при  $n = 2$  как псевдосфера Бельтрами. (Двойная трактриса – непрерывная и полная мировая линия в сжатом кваздекартовом  $E_1$ !)



Все 4 указанные *поверхности вращения*: гиперboloид I, цилиндр, катеноид I, трактрисоид I (псевдосфера Бельтрами при  $n = 2$ ) – гомеоморфны и имеют общий определяющий параметр  $R$ . Среди них только гиперboloид I и трактрисоид I в целом имеют одинаковые и постоянные *гауссовы кривизны*, если их рассматривать на всех их *собственных* поверхностях, отвечающих парным собственным значениям рефлектор-тензора: либо  $+1$  и  $-1$ , либо  $+1$  и  $+1$  при  $q = 1$ . При  $n > 2$  имеет место  $n$ -мерная гиперболическая геометрия совместно с её *внутренней*  $(n-1)$ -мерной сферической геометрией, какова, например, по сути  $n$ -мерная геометрия Лобачевского–Больяи или гиперboloида II. При  $n = 2$  имеет место только 2-мерная гиперболическая геометрия с постоянной отрицательной гауссовой кривизной  $-1/R^2$ . Этот факт, согласно *Бельтрами*, определяет локально (в малом) гиперболическую неевклидову  $n$ -метрику плоскости Лобачевского–Больяи. Как известно, гомеоморфизм и одинаковая кривизна поверхностей достаточны для их изометричности в целом, то есть для изометрии их внутренних геометрий в целом. Отсюда (см. также §12.3):

**Вывод.** *Цилиндрическая гиперболическая геометрия на гиперboloиде I в комплексном  $\langle P^{n+1} \rangle$  изометрична  $n$ -мерной геометрии гиперпсевдосферы в вещественном  $\{\mathcal{E}^{n+1}\}$  при их одинаковом определяющем радиусе  $R$ .*

В этих 2-х изометричных отображениях  $(n-1)$ -мерный *центральный пояс* (экватор) гиперboloида I и гиперпсевдосферы отображаются в удалённую границу проективной плоскости (гл. 12). Фигуры, проходящие через него на  $n$ -гиперпсевдосфере, претерпевают излом под углом  $180^\circ$ , что не отражается на их метрических и топологических свойствах. На 1-м этапе псевдоевклидова длина была преобразована в евклидову, на 2-м этапе *сжатия фигуры* обеспечена постоянная кривизна  $K_G = -1/R^2$ !

Далее установим, как преобразуются координаты гиперболы  $\vec{ct}$  при такой трансформации гиперboloида I в  $n$ -мерную гиперпсевдосферу. Асимптотическая ось  $\vec{ct}_R$  образующих трактрис (это собственная ось вращения гиперпсевдосферы) параллельна  $\vec{ct}$  [рис. 2А (4)]. Здесь ось  $\vec{\chi}_R$  трактрис направлена противоположно оси  $\vec{\chi}$  – к центру координат  $O$  на оси  $\vec{ct}_R$ , но имеет тот же вектор направляющих косинусов  $e_a$ . Точка излома трактрисы  $O_1$  отображает центральную точку гиперболы  $\vec{ct}$  и поэтому также принадлежит кривой. При  $\Delta ct > 0$  имеем:  $|v|$  и  $d\gamma > 0$  в верхней и нижней частях, а в точке излома  $v$  нулевая ( $\bar{g} = \text{const} > 0$ ). Из тригонометрических соображений и с учётом (87А), (94А) текущие координаты мировой точки на трактрисе выражаются в новом  $\vec{E}_1$  как:

$$\left. \begin{aligned} \chi_R &= \sin \varphi (\gamma) \cdot ct - \chi \equiv \text{th } \gamma \cdot ct - \chi = \text{sech } \gamma \cdot \chi = k_1 \cdot \chi, \quad (k_1 < 1) \\ (\gamma &= ct/R = -\infty \div +\infty) \\ ct_R &= ct - \cos \varphi (\gamma) \cdot ct \equiv ct - \text{sech } \gamma \cdot ct = [1 - (\text{th } \gamma)/\gamma] \cdot ct = k_2 \cdot ct, \quad (k_2 < 1) \end{aligned} \right\} (105A)$$

где сжатия  $k_1$  и  $k_2$  при движении из центра кривой монотонно изменяются от 1 (0) до 0 (1). Они вносят соответствующие уменьшающие коэффициенты в непрерывные отображения  $\chi \mapsto \chi_R$ ,  $ct \mapsto ct_R$ , в результате чего исходная гипербола преобразуется в *полную непрерывную трактрису*. Здесь  $\chi_R$  и  $ct_R$  определяем как *тригонометрические координаты* собственного расстояния и собственного времени в специальном квазиевклидовом пространстве  $\langle \mathcal{E}^{3+1} \rangle$ .

Применив далее формулы гиперболического движения (86А), (87А), приводим соотношения (105А) к полной *тригонометрической* форме и вместе с тем выводим *гиперболические* параметрическое и прямое определения трактрисы, а также евклидово расстояние  $l_R$  вдоль неё:

$$\left. \begin{aligned} \chi_R &= R \cdot s = R \cdot (1 - \operatorname{sech} \gamma), & \left. \begin{aligned} \frac{d\sigma_{\tau_R}}{d\chi_R} &= \frac{dz}{ds} = \operatorname{sh} \gamma \equiv \operatorname{tg} \varphi(\gamma), \\ \sigma_{\tau_R} &= R \cdot z = R \cdot (\gamma - \operatorname{th} \gamma), & \left. \begin{aligned} dl_R &= R_t d\varphi(\gamma) \equiv \operatorname{ct} \cdot \operatorname{sech} \gamma d\gamma = R \cdot \operatorname{th} \gamma d\gamma. \end{aligned} \right\} (106A) \\ l_R &= R \cdot l = R \cdot \ln \operatorname{ch} \gamma = x^{(m)}, & \left. \begin{aligned} g &= c^2/R \quad (\gamma \rightarrow 0, \quad l_R \rightarrow g \cdot \tau^2/2). \end{aligned} \right\} \end{aligned} \right\}$$

(Длина дуги  $dL_R$  трактрисы по теореме Пифагора та же. Знак тождества действует здесь только в *универсальных* базисах  $\tilde{E}_1$  при  $\langle P^{n+1} \rangle \rightarrow \{ \langle E^{n+1} \rangle \}$ .)

Из этих параметрических уравнений следует, что *все трактрисы подобны друг другу с коэффициентом R* (как и родственные им кривые: равнобочные гиперболы, гиперболические косинусоиды.). При  $R = 1$  имеем *единичную трактрису как уникальный тригонометрический объект*.

Её 4 ветви (как и квадрогоперболы) в явной и параметрической формах:  $\pm z = \pm (\gamma - \operatorname{th} \gamma) = \pm (\operatorname{Arsech} u - \sqrt{1 - u^2})$ ,  $\left. \begin{aligned} u_R &= R - \chi_R = R \cdot \operatorname{sech} \gamma, \\ l &= \ln \operatorname{ch} \gamma = -\ln u = \ln 1/u, \quad (0 \leq u \leq 1.) \end{aligned} \right\} u = u_R/R = \operatorname{sech} \gamma.$  (107А)  
(Евклидова длина времени- и пространству подобных трактрис одинакова!)

$$\left. \begin{aligned} u &= \operatorname{sech} \gamma \equiv \cos \varphi(\gamma), \\ \pm z &= \pm (\gamma - \operatorname{th} \gamma) \equiv \pm [\operatorname{Arth} \sin \varphi(\gamma) - \sin \varphi(\gamma)], \\ l &= \ln \operatorname{ch} \gamma \equiv \ln \sec \varphi(\gamma). \quad (0 \leq \gamma \leq \infty, \quad 0 \leq \varphi(\gamma) \leq 1.) \end{aligned} \right\} (108A)$$

Сравним их с параметрическими уравнениями *сферической циклоиды*:

$$\left. \begin{aligned} u &= \cos \varphi, \\ \pm z &= \varphi - \sin \varphi, \\ l &= 4 \cdot (1 - \cos \varphi/2), \end{aligned} \right\} \begin{aligned} u_R &= R \cdot u, \\ z_R &= R \cdot z, \\ l_R &= R \cdot l. \end{aligned}$$

Следовательно, *трактриса есть гиперболический аналог циклоиды, но с одним циклом*. При  $R = 1$  имеем тоже уникальную единичную циклоиду.

В *фокальной точке трактрисы* – рис. 2А:  $\gamma_F = \omega = \operatorname{Arsh} 1 \approx 0,881$ ,  $u_F = \sqrt{2}/2 \approx 0,707$ ,  $x_F = 1 - u_F$ ,  $z_F = \omega - \sqrt{2}/2 \approx 0,174$ ,  $l_F = \ln 2/2$ ;  $\left(\frac{dz}{dx}\right)_F = 1$ . (Кроме того, на рис. 2А(4) имеем:  $k_F = (1 - \operatorname{sech} \gamma_F) + (\gamma - \operatorname{th} \gamma_F) \approx 0,467$ .)

Отсюда для её точек вытекает *неравенства прямоугольного треугольника*:

$$(1 - \operatorname{sech} \gamma) + (\gamma - \operatorname{th} \gamma) > \ln \operatorname{ch} \gamma > \sqrt{(1 - \operatorname{sech} \gamma)^2 + (\gamma - \operatorname{th} \gamma)^2},$$

$(dy + dz > dl > \sqrt{dy^2 + dz^2})$ , что подтверждает *корректность меры длины*.

Её *квазиевклидов инвариант* при допустимых ортосферических преобразованиях:

$$(R - \chi_R)^2 + (R\gamma - \sigma_{\tau_R})^2 = R^2 = R^2 \cdot [\cos^2 \varphi(\gamma) + \sin^2 \varphi(\gamma)], \text{ где } \gamma = \operatorname{Arsech} [1 - \chi_R/R].$$

$\tilde{E}_1 \leftrightarrow \tilde{E}'_1$  через (105А) связывает его с её *псевдоевклидовым инвариантом* (94А).

Формально скорость равноускоренного движения в сжатом базисе  $\tilde{E}_1$ , согласно (106A), выражается как *собственная суперскорость*:

$$w^* = \frac{d\chi_R}{d\tau_R} = c/\text{sh } \gamma = \text{cosech } \gamma \cdot c = c^2/v^*, \quad w^* < w; \quad (v^* = c \cdot \text{sh } \gamma - \text{см. гл. 5A})$$

в процессе релятивистского движения она изменяется от  $\infty$  до  $\rightarrow 0$ . Через *противолежащий угол*  $\lambda$  есть соответствие:  $w^* = c \cdot \text{sh } \lambda$  от 0 до  $\rightarrow \infty$ !

Кроме того, из (106A) и (105A) следуют полезные предельные формулы:

$$\lim_{\gamma \rightarrow \infty} \chi_R = R; \quad \lim_{\gamma \rightarrow \infty} (c\tau - c\tau_R) = R; \quad \lim_{\gamma \rightarrow \infty} (\iota_R - c\tau_R) = R \cdot (1 - \ln 2); \quad (c\tau > \iota_R > c\tau_R).$$

Из рис. 2A(4) видно, что для точек фокуса F гиперболы и трактрисы:  $c\tau_{R(F)} + \chi_{R(F)} = kR = c\tau_F - \chi_F$ , т. к. они нормальны и в фокусе  $\gamma = \omega$ ,  $\varphi(\omega) = \pi/4$ .

В процессе равноускоренного движения какой-либо материальной точки, согласно его описанию в сжатых координатах, её мировая точка асимптотически приближается по трактрисе к оси  $c\vec{\tau}_R$  [рис. 2A (4)].

Псевдосфера Бельтрами параметра R продуцируется геометрически ротацией *собственной* трактрисы с тем же параметром R относительно своей асимптоты – оси  $c\vec{\tau}_R$ . Аналогично, *все гиперпсевдосферы тоже подобны друг другу с коэффициентом R* в объемлющем квазиевклидовом пространстве  $\langle \mathcal{E}^{2+1} \rangle$  (как и родственные объекты: гиперболоиды I и II, катеноиды I и II, сферы). При  $R = 1$  имеем *единичную гиперпсевдосферу*.

Главные радиусы кривизны в направлениях по образующей трактрисе и нормально к ней – см. рис. 2A (4):

$$\left. \begin{aligned} R_1 = -R_\tau = -R \cdot \text{sh } \gamma \equiv -R \cdot \text{tg } \varphi(\gamma) = -R \cdot \text{ctg } \xi = -R \cdot c/v^* \\ \text{– по меридианам (трактрисам), это же есть длина нормали;} \\ R_2 = r_K = R/\text{sh } \gamma = u_R/\text{th } \gamma \equiv u_R/\sin \varphi(\gamma) = u_R/\cos \xi = R \cdot v^*/c \\ \text{– по локальным параллелям (ортогональным дугам)} \\ (R_{1F} = -R, \quad R_{2F} = +R; \quad \varphi_F = \pi/4). \end{aligned} \right\} \quad (109A)$$

Здесь  $\xi = (\pi/2 - \varphi)$  – угол между нормалью  $c\vec{\tau}$  к поверхности и локальным радиусом ротации  $u_R$ , согласно известной *теореме Менье*. Он, согласно (26A) и синус-котангенсной аналогии, есть сферический *угол параллельности Лобачевского*, но теперь в геометрии Бельтрами. Меридианы и локальные параллели псевдосферы используются здесь в качестве полугеодезических (нормальных) криволинейных координат в её внутренней геометрии. Гауссова кривизна псевдосферы выражается в виде  $K_G = 1/R_1 \cdot 1/R_2 \equiv -1/R^2 = \text{const} < 0$ .

Это, согласно *теореме Бельтрами*, определяет на поверхности псевдосферы метрику геометрии Лобачевского – Больяи (и меру  $\varphi(\gamma)$  длины Ламберта). Но всё это имеет место только в специальном квазиевклидовом пространстве  $\{\langle \mathcal{E}^{n+1} \rangle\}$  (см. выше).

Главные радиусы псевдокривизны гиперboloида I Минковского (гиперболической и сферической) постоянны по всей его поверхности:  
 $R_1 = -R$  – по меридианам (гиперболам),

$R_2 = +R$  – по локальным параллелям (ортогональным дугам).

Эти меридианы и локальные параллели могут использоваться в качестве геодезических (псевдоортогональных) координат в его внутренней геометрии как у вещественной сферы (но  $R \rightarrow iR$ ). (В дополнение, через  $\pm s = f(\pm z)$  определяются *s- и u-образные непрерывные трактрисы!*)

Аналогичное преобразование катеноида II продуцирует "трактрисоид II" с  $K_G$  от  $-\infty$  до 0 (его образующие 2 пространству подобные трактрисы). Он получается ротацией  $2x$  трактрис относительно  $\vec{c}\tau_R$  – рис. 2A(4), т. е. с перестановкой  $\chi_R$  и  $\sigma_R$  в (105A) (на рис. – ротация относительно оси  $\vec{\chi}_R$ ).

В геометрии Лобачевского – Больяи «R» есть некий вселенский параметр, или константа *Гаусса – Швейкарта*. Он характеризует степень искривления пространства Лобачевского – Больяи по отношению к плоскому евклидову пространству. Он как  $iR$  есть радиус гипотетической мнимой сферы Ламберта – Тауринуса, воплощённой впоследствии в гиперboloиде II Минковского. Обратим внимание на то, что гиперboloид II (верхний) повсюду вогнут и его радиус псевдокривизны постоянен во всех точках, как для сферы. А именно он равен « $+iR$ ». Изначальная идея Ламберта и последующее её развитие Тауринусом исторически открывали наиболее простой естественный путь корректной реализации полноценной гиперболической неевклидовой геометрии – таковой на *сфере мнимого радиуса*. Этот путь стал возможен к реализации в полном объёме после открытия Пуанкаре и затем Минковским псевдоевклидова пространства с целью его применения в теории относительности.

Зоммерфельд (1909 г.) впервые установил гиперболический характер закона сложения скоростей в СТО, рассмотрев его действие как бы на сфере мнимого радиуса для случаев двух коллинеарных и двух ортогональных скоростей [62]. Варичак (1910 г.) сделал предположение о тождественности закона сложения скоростей и правила сложения отрезков в геометрии Лобачевского – Больяи [65]. Теоретическое обоснование этому дал Клейн, доказав изоморфизм однородной группы Лоренца и группы движений в пространстве Лобачевского – Больяи. Он же дал корректную трактовку гиперболической геометрии в проективной псевдоплоскости на модели внутри абсолюта Кэли [37, с. 111; 25; 26]. Сценарий дальнейшего развития событий в этой области геометрических исследований был предопределён. Решающую роль в понимании того, что столь различные способы построения одной и той же неевклидовой геометрии приводят к тождественным конечным результатам сыграли классические проективные модели Клейна и Пуанкаре. Отсюда на первый план выходит выбор наиболее простого и наглядного способа отображения и аналитического изучения неевклидовых геометрий!

В этой монографии для изучения различных движений и деформаций в гиперболической, а также в сферической неевклидовых геометриях применяются относительно простые средства *квадратичной тензорной тригонометрии*. Тригонометрический подход к данной проблеме (в скалярной форме) был применён впервые именно в изначальных классических работах Пуанкаре и Минковского по СТО. Неевклидовы геометрии рассматриваются здесь *внешним образом* – с позиции тензорных тригонометрий объемлющих линейных метрических пространств  $\langle P^{n+1} \rangle$  и  $\langle Q^{n+1} \rangle$ . При этом используются соответствующие линейные тригонометрические преобразования ротационного (синусно-косинусного) и деформационного (тангенсно-секансного) типа в элементарных формах.

Кроме того, такая *внешняя* точка зрения позволяет, в принципе, изучать движения в любых многомерных геометриях с постоянной кривизной (в гиперболических – с отрицательной и в сферических – с положительной) в наиболее общем виде. Такого рода геометрии присущи собственному гиперболоиду в  $\langle P^{n+q} \rangle$  и собственному гиперсфероиду в  $\langle Q^{n+q} \rangle$  при  $q \geq 1$ . Для них ротационные и деформационные тригонометрические преобразования применяются в самых общих формах, изложенных в основной части монографии. В частности, каждому рефлектор-тензору объемлющего пространства отвечают собственные множества псевдоевклидовых и квазиевклидовых тригонометрических ротаций, а также рефлексий; и их общие подмножества ортосферических ротаций и рефлексий. Причём тригонометрические ротации образуют группы (для псевдоевклидова пространства с  $q \geq 1$  это группа Лоренца (поименованная так Пуанкаре); для квазиевклидова пространства с  $q \geq 1$  это другая группа, так как такое пространство имеет евклидову метрику. Объединяет эти группы то, что их множество ортосферических ротаций тождественно для данного рефлектор-тензора. Кроме того, это множество образует подгруппу вышеуказанных двух групп тригонометрических ротаций и является их пересечением. Помимо таких ротаций в этих двух группах содержатся собственные *главные ротации*, которые в целом не образуют группу, но их подмножества коллинеарных главных ротаций образуют свои подгруппы. Они рассмотрены в гл. 5А.

В следующих главах рассматриваются возможности, которая даёт тензорная псевдоевклидова тригонометрия, даже в своей элементарной форме (§ 6.5), для констатации и весьма простого изложения законов движений в неевклидовой геометрии гиперболического и сферического типа, а также в СТО, причём в самом общем виде.

## Глава 7А. Тригонометрические модели неколлинеарных двух-, многоступенчатых и интегральных движений в СТО и в гиперболической геометрии

Продолжим изучение двух- и многоступенчатых гиперболических ротаций – движений, но уже не обязательно в пределах одной и той же псевдоплоскости. Как и ранее (§ 11.3), для анализа многоступенчатых, но теперь *элементарных* ротаций применяется полярное разложение итогового преобразования (474), (475) в 2-х вариантах его выполнения. В них сферическая ротационная матрица  $\text{rot } \Theta$  *исходно* задаётся в  $\{I\}$ , т. е. выражается как в базисе действия  $\tilde{E}_1$ . Согласно (497), она имеет в  $\langle P^{n+1} \rangle$  или в  $\langle P^{3+1} \rangle \equiv \langle \mathcal{E}^3 \oplus \vec{ct} \rangle$  общую структуру, отвечающую рефлектор-тензору псевдоевклидова пространства Минковского и (31А) по схеме:

$$\begin{array}{c}
 \text{rot } \Theta \qquad \qquad \qquad I^{\oplus} \\
 \begin{array}{|c|c|} \hline \{ \text{rot } \Theta \}_{3 \times 3} & \mathbf{o} \\ \hline \mathbf{o}' & 1 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline I_{3 \times 3} & \mathbf{o} \\ \hline \mathbf{o}' & -1 \\ \hline \end{array}
 \end{array} \qquad (110A)$$

В свою очередь, гиперболическая ротационная матрица  $\text{roth } \Gamma$  тоже *исходно* задаётся в  $\tilde{E}_1$  и, как и в другом универсальном базисе  $\tilde{E}_{1u} = \text{rot } \Theta \cdot \tilde{E}_1$ , она имеет каноническую форму (363). В них фигурируют тензорные углы:  $\Gamma$  – угол гиперболической ротации;  $\Theta$  – угол ортосферической ротации (ортогональной по отношению к углу  $\Gamma$ ), согласно определению в (349);  $\vec{ct}$  – стрела времени  $t^{(1)}$  и реперная ось для отсчёта угла ротации  $\gamma$  в  $\tilde{E}_1$ .

Вначале рассмотрим двухступенчатую элементарную гиперболическую ротацию с целью наиболее общего – *матричного* вывода закона суммирования двух движений (скоростей) в скалярной, векторной и тензорной формах. Новый псевдодекартов базис представляется двумя способами: в порядке матриц (485), (486) и в полярных формах (491):

$$\begin{aligned}
 \tilde{E}_3 &= (\text{roth } \Gamma_{12})_{\tilde{E}_1} \cdot (\text{roth } \Gamma_{23})_{\tilde{E}_1} \cdot \tilde{E}_1 = (\text{roth } \Gamma_{12} \cdot \text{roth } \Gamma_{23} \cdot \text{roth}^{-1} \Gamma_{12})_{\tilde{E}_2} \cdot \text{roth } \Gamma_{12} \cdot \tilde{E}_1 = \\
 &= (\text{roth } \Gamma_{23})_{\tilde{E}_2} \cdot \text{roth } \Gamma_{12} \cdot \tilde{E}_1 = (\text{roth } \Gamma_{23})_{\tilde{E}_2} \cdot \tilde{E}_2 = T_{13} \cdot \tilde{E}_1 = \qquad (111A) \\
 &= (\text{roth } \Gamma_{13})_{\tilde{E}_1} \cdot (\text{rot } \Theta_{13})_{\tilde{E}_1} \cdot \tilde{E}_1 = (\text{roth } \Gamma_{13} \cdot \text{rot } \Theta_{13} \cdot \text{roth}^{-1} \Gamma_{13})_{\tilde{E}_{1h}} \cdot \text{roth } \Gamma_{13} \cdot \tilde{E}_1 = \\
 &= (\text{rot } \Theta_{13})_{\tilde{E}_1} \cdot (\text{roth } \bar{\Gamma}_{13})_{\tilde{E}_1} \cdot \tilde{E}_1 = (\text{rot } \Theta_{13} \cdot \text{roth } \bar{\Gamma}_{13} \cdot \text{rot}' \Theta_{13})_{\tilde{E}_{1u}} \cdot \text{rot } \Theta_{13} \cdot \tilde{E}_1 .
 \end{aligned}$$

Все матрицы исходно заданы в единичном базисе  $\{I\}$ , т. е. выражаются в базисе действия  $\tilde{E}_1$  (§ 11.3 и § 11.4). А именно, матрица  $\text{roth } \Gamma_{12}$  действует в  $\tilde{E}_1$ , затем матрица  $\text{roth } \Gamma_{23}$  действует в  $\tilde{E}_2 = \text{roth } \Gamma_{12} \cdot \tilde{E}_1$ . При многоступенчатых движениях, согласно общей формуле (485), для итоговых преобразований базисов, применяется *обратный* порядок следования частных матриц, заданных в единичном  $\{I\}$ , но после их преобразований в базис действия  $\tilde{E}_k$  имеет место *прямой порядок матриц*. В полярной форме гиперболическая  $\text{roth } \Gamma_{13}$  и сферическая  $\text{rot } \Theta_{13}$  ротации исходно заданы также в  $\tilde{E}_1 = \{I\}$ , после чего выполняются в базисе действия. Так в *первой* форме сначала в  $\tilde{E}_1$  выполняется  $\text{roth } \Gamma_{13}$ , а затем  $\text{rot } \Theta_{13}$ . Для *пассивного* преобразования координат, с учётом (111А) и (325):

$$\mathbf{u}^{(3)} = \text{rot}(-\Theta_{13}) \cdot \text{roth}(-\Gamma_{13}) \cdot \mathbf{u}^{(1)} = \text{roth}(-\bar{\Gamma}_{13}) \cdot \text{rot}(-\Theta_{13}) \cdot \mathbf{u}^{(1)}.$$

Первые ротации действуют в  $\tilde{E}_1$ , а вторые в  $\tilde{E}_{1h} = \text{roth } \Gamma_{13} \cdot \tilde{E}_1$  и  $\tilde{E}_{1u} = \text{rot } \Theta_{13} \cdot \tilde{E}_1$ . Согласно (352)  $\langle \tilde{E}_{1u} \rangle \equiv \langle \text{rot } \Theta \cdot \tilde{E}_1 \rangle$  – универсальные базисы (в СТО покоя).

$$\text{roth } \bar{\Gamma}_{13} = \text{rot}(-\Theta_{13}) \cdot \text{roth } \Gamma_{13} \cdot \text{rot } \Theta_{13} = \text{rot}' \Theta_{13} \cdot \text{roth } \Gamma_{13} \cdot \text{rot } \Theta_{13}. \quad (112A)$$

Вектор направляющих косинусов в (364) для угла  $\bar{\Gamma}_{13}$  относительно такого для  $\Gamma_{13}$  *формально* смещён в обратную сторону (но  $\theta_{13} < 0!$ ):

$$\mathbf{e}_{\bar{\sigma}} = \{\text{rot}(-\Theta_{13})\}_{3 \times 3} \cdot \mathbf{e}_{\sigma} \quad (\sin \theta_{13} < 0!); \quad \rightarrow \quad \mathbf{e}_{\bar{\sigma}} \cdot \mathbf{e}_{\sigma} = \mathbf{e}_{\sigma} \cdot \mathbf{e}_{\bar{\sigma}} = \cos \theta_{13}. \quad (113A)$$

Согласно полярному представлению (474), (475), а также (111А) и (325):

$$\text{roth } \Gamma_{13} = \sqrt{TT'} = \sqrt{\text{roth } \Gamma_{12} \cdot \text{roth } 2 \Gamma_{23} \cdot \text{roth } \Gamma_{12}} = \sqrt{\text{roth } 2 \Gamma_{13}}, \quad (114A)$$

$$\text{rot } \Theta_{13} = \text{roth } \Gamma_{12} \cdot \text{roth } \Gamma_{23} \cdot \text{roth } \bar{\Gamma}_{31} = \text{roth } \Gamma_{31} \cdot \text{roth } \Gamma_{12} \cdot \text{roth } \Gamma_{23}. \quad (115A)$$

Эта формула даёт дефект  $\Theta_{13}$  для *замкнутого цикла* из  $\text{roth } \Gamma_{ij}$ , т. е. для *замкнутого цикла гиперболических движений по трём сторонам геодезического треугольника 123* из точки 1 в 3. (Если  $\text{roth } \Gamma_{ij}$  коллинеарны, то углы  $\Gamma_{ij}$  суммируют; треугольник 123 вырождается в отрезок 13.)

В базисе  $\tilde{E}_1 = \{I\}$  при смене порядка движений или скоростей на обратный имеем новый (транспонированный) псевдодекартов базис  $\tilde{E}'_3 = \{\Gamma'\}$ :

$$\tilde{E}'_3 = \text{roth } \Gamma_{23} \cdot \text{roth } \Gamma_{12} \cdot \tilde{E}_1 = T' \cdot \tilde{E}_1 = \text{rot}(-\Theta_{13}) \cdot \text{roth } \Gamma_{13} \cdot \tilde{E}_1 = \quad (116A)$$

$$= \{\text{rot}(-\Theta_{13}) \cdot \text{roth } \Gamma_{13} \cdot \text{rot}(+\Theta_{13})\}_{E_1} \cdot \text{rot}(-\Theta_{13}) \cdot \tilde{E}_1 = \text{roth } \bar{\Gamma}_{13} \cdot \text{rot}(-\Theta_{13}) \cdot \tilde{E}_1.$$

Тогда тут ротация  $\text{roth } \Gamma_{23}$  действует в  $\tilde{E}_1 = \{I\}$ ,  $\text{roth } \Gamma_{12}$  в  $\tilde{E}_2 = \text{roth } \Gamma_{23} \cdot \tilde{E}_1$ .

В *первой* полярной форме сначала выполняют  $\text{rot}(-\Theta_{13})$ , затем  $\text{roth } \bar{\Gamma}_{13}$ , во *второй* форме – последовательность обратная. В этом есть *двойственность* во взгляде на матрицу суммарной гиперболической ротации.

Для обратного порядка этих же выраженных в  $\tilde{E}_1$  матриц имеем:

$$\text{roth } \overline{\Gamma}_{13} = \sqrt{\overline{T'}T} = \sqrt{\text{roth } \Gamma_{23} \cdot \text{roth } 2 \Gamma_{12} \cdot \text{roth } \Gamma_{23}} = \sqrt{\text{roth } 2 \overline{\Gamma}_{13}}, \quad (117A)$$

$$\begin{aligned} \text{rot } (-\Theta_{13}) &= \text{rot}^{-1} \Theta_{13} = \text{rot}' \Theta_{13} = \text{rot } \Theta_{31} = \text{roth } \overline{\Gamma}_{13} \cdot \text{roth } \Gamma_{32} \cdot \text{roth } \Gamma_{21} = \\ &= \text{roth } \Gamma_{32} \cdot \text{roth } \Gamma_{21} \cdot \text{roth } \Gamma_{13}. \end{aligned} \quad (118A)$$

Эта формула даёт дефект  $\text{rot } (-\Theta_{13})$  с *обратным циклом* (115A) из  $\text{roth } \Gamma_{ij}$ .

В СТО угол ортосферического сдвига  $\Theta_{13}$  имеет чисто релятивистскую природу. Реально из исходного базиса  $\tilde{E}_1$  этот релятивистский эффект воспринимается таким образом, что неточечный объект в результате суммирования двух поступательных, но неколлинеарных скоростей воспринимается наблюдателем  $N_1$  сферически повернутым в плоскости, задаваемой векторами  $\mathbf{v}_{12}$  и  $\mathbf{v}_{23}$ . Этот геометрический эффект дополняет лоренцево сокращение того же объекта (в повернутом виде) в направлении вектора суммарной скорости  $\mathbf{v}_{13}$ . Аналогичный эффект проявляется во внешних гиперболической, сферической и квазиевклидовой геометриях. При ротационных преобразованиях сохраняется как инвариант радиус тригонометрического гиперboloида  $R = 1$ .

Ортосферическая ротация теоретически объяснила, согласно Томасу [63], поправку «1/2» к прецессии спина электрона [63], которую дали эксперименты. *Это событие стало ярким подтверждением СТО с преобразованиями Лоренца!* Вскоре Зоммерфельд [5] дал её тригонометрическую трактовку как результат сложения двух ортогональных скоростей *на некоей сфере мнимого радиуса*.

Тензорные углы  $\Gamma_{13}$  и  $\overline{\Gamma}_{13}$  отличаются только векторами своих направляющих косинусов. Поэтому результат суммирования двух движений в векторной и в тензорной формах не зависит от порядка их последовательности тогда и только тогда, когда направляющие косинусы этих движений либо равны, либо аддитивно противоположны, то есть когда ротационные матрицы тригонометрически согласованы. Заметим, что результат *в скалярной форме* для движений от порядка не зависит.

Пусть  $\mathbf{e}_\alpha = \{\cos \alpha_{1,3}\}$  – вектор направляющих косинусов для  $\Gamma_{12}$ , **sh**  $\gamma_{12}$ , **th**  $\gamma_{12}$  и  $\mathbf{v}_{12}$  в декартовом суббазисе  $\tilde{E}_1^{(3)}$ ;  $\mathbf{e}_\beta = \{\cos \beta_{1,3}\}$  – вектор направляющих косинусов для  $\Gamma_{23}$ , **sh**  $\gamma_{23}$ , **th**  $\gamma_{23}$  и  $\mathbf{v}_{23}$  в декартовом суббазисе  $\tilde{E}_2^{(3)}$ . Определим *условную характеристику*  $\varepsilon$  – угол между  $\mathbf{e}_\alpha$  и  $\mathbf{e}_\beta$ , как если бы они находились в одном и том же  $\mathcal{E}^3$ , через формальное значение его косинуса:

$$\cos \varepsilon = \begin{vmatrix} \cos \beta_1 \\ \cos \beta_2 \\ \cos \beta_3 \end{vmatrix}' \cdot \begin{vmatrix} \cos \alpha_1 \\ \cos \alpha_2 \\ \cos \alpha_3 \end{vmatrix} = \mathbf{e}_\beta' \cdot \mathbf{e}_\alpha \quad (0 \leq \varepsilon \leq \pi, \quad 0 \leq \sin \varepsilon \leq 1) \quad (119A)$$

$$(\cos^2 \alpha_1 + \cos^2 \alpha_1 + \cos^2 \alpha_3 = 1 = \cos^2 \beta_1 + \cos^2 \beta_2 + \cos^2 \beta_3).$$

Если частные косинусы попарно равны, то  $\cos \varepsilon = +1$ . Если они попарно аддитивно противоположны, то  $\cos \varepsilon = -1$ . Соответственно



тогда  $\mathbf{v}_{12}$  и  $\mathbf{v}_{23}$  условно коллинеарны, но либо однонаправленно, либо разнонаправленно. Если же  $\cos \varepsilon = 0$ , то  $\mathbf{v}_{12}$  и  $\mathbf{v}_{23}$  условно сферически ортогональны. В общем случае эти векторы образуют условно угол  $\varepsilon$ .

Далее вычисляем элементы итоговой гиперболической матрицы  $\text{roth } \Gamma_{13}$ , согласно (114А). Из них найдем значения характеристик суммарного движения, в том числе его направляющие косинусы  $\cos \sigma_1$ ,  $\cos \sigma_2$ ,  $\cos \sigma_3$  в декартовом суббазисе  $\tilde{\mathbf{E}}_1^{(3)}$ . В свою очередь, для обратного порядка последовательности движений скалярный гиперболический угол для суммарного движения (в матрице  $\text{roth } \bar{\Gamma}_{13}$ ) есть тот же  $\gamma_{13}$ . В тензорной форме  $\gamma$  имеет направляющие косинусы  $\cos \bar{\sigma}_1$ ,  $\cos \bar{\sigma}_2$ ,  $\cos \bar{\sigma}_3$ . Из формулы (113А) независимо от знака непосредственно вытекает, что

$$\cos \theta_{13} = \begin{vmatrix} \cos \bar{\sigma}_1 \\ \cos \bar{\sigma}_2 \\ \cos \bar{\sigma}_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \cos \sigma_1 \\ \cos \sigma_2 \\ \cos \sigma_3 \end{vmatrix} = \mathbf{e}'_{\bar{\sigma}} \cdot \mathbf{e}_{\sigma} = \mathbf{e}'_{\sigma} \cdot \mathbf{e}_{\bar{\sigma}}. \quad (120A)$$

(Заметим сразу: для ортосферического угла  $\theta$  действует *евклидова мера* Ламберта, поскольку он проявляется в евклидовых подпространствах!)

Связь между двумя такими вариантами *двухступенчатого* движения (прямым и реверсивным) сводится к замене частных углов по схеме:

$$\gamma_{12} \leftrightarrow \gamma_{23}, \quad \alpha_k \leftrightarrow \beta_k. \quad (121A)$$

Перемножать по блокам  $\text{roth } \Gamma$ , согласно (364) и (111А), громоздко. Этот подход мы реализуем в рамках полярного разложения и формул §§ 11.3 и 12.2 для иллюстрации *генерального закона суммирования движений*.

Поэтому сначала найдём элементы матрицы-произведения в (114А):  $B = \{\text{roth } \Gamma_{12} \cdot \text{roth } 2\Gamma_{23}\} = \{b_{ij}\}$ .

При этом для дальнейших вычислений потребуются только элементы её 4-й строки. Гиперболические матрицы  $\text{roth } \Gamma$  здесь можно использовать в любой из канонических форм (363) или (364). Далее:

$$b_{41} = (\text{sh } \gamma_{12} \cdot \text{ch } 2\gamma_{23} \cdot \cos \varepsilon + \text{ch } \gamma_{12} \cdot \text{sh } 2\gamma_{23}) \cdot \cos \beta_1 + \text{sh } \gamma_{12} \cdot (\cos \alpha_1 - \cos \varepsilon \cdot \cos \beta_1),$$

$$b_{42} = (\text{sh } \gamma_{12} \cdot \text{ch } 2\gamma_{23} \cdot \cos \varepsilon + \text{ch } \gamma_{12} \cdot \text{sh } 2\gamma_{23}) \cdot \cos \beta_2 + \text{sh } \gamma_{12} \cdot (\cos \alpha_2 - \cos \varepsilon \cdot \cos \beta_2),$$

$$b_{43} = (\text{sh } \gamma_{12} \cdot \text{ch } 2\gamma_{23} \cdot \cos \varepsilon + \text{ch } \gamma_{12} \cdot \text{sh } 2\gamma_{23}) \cdot \cos \beta_3 + \text{sh } \gamma_{12} \cdot (\cos \alpha_3 - \cos \varepsilon \cdot \cos \beta_3),$$

$$b_{44} = \text{sh } \gamma_{12} \cdot \text{sh } 2\gamma_{23} \cdot \cos \varepsilon + \text{ch } \gamma_{12} \cdot \text{ch } 2\gamma_{23}.$$

Затем вычисляем нижний диагональный элемент (*скаляр*) матрицы  $\text{roth}^2 \Gamma_{13} = \text{roth } 2\Gamma_{13}$ , перемножая 4-ю строку  $B$  на 4-й столбец  $\text{roth } \Gamma_{12}$ :

$$s_{44} = \text{ch } 2\gamma_{13} = 2\text{ch}^2 \gamma_{13} - 1 =$$

$$= \text{ch } 2\gamma_{12} \cdot \text{ch } 2\gamma_{23} + \cos \varepsilon \cdot \text{sh } 2\gamma_{12} \cdot \text{sh } 2\gamma_{23} - 2\sin^2 \varepsilon \cdot \text{sh}^2 \gamma_{12} \cdot \text{sh}^2 \gamma_{23} =$$

$$= 2 \cdot (\text{ch } \gamma_{12} \cdot \text{ch } \gamma_{23} + \cos \varepsilon \cdot \text{sh } \gamma_{12} \cdot \text{sh } \gamma_{23})^2 - 1.$$

Отсюда следует известная формула гиперболической неевклидовой геометрии Лобачевского – Больяи для косинуса угла  $\gamma_{13}$  как скаляра:

$$\begin{aligned} \operatorname{ch} \gamma_{13} &= \operatorname{ch} \gamma_{12} \cdot \operatorname{ch} \gamma_{23} + \cos \varepsilon \cdot \operatorname{sh} \gamma_{12} \cdot \operatorname{sh} \gamma_{23} = \\ &= \operatorname{ch} \gamma_{12} \cdot \operatorname{ch} \gamma_{23} - \cos (\pi - \varepsilon) \cdot \operatorname{sh} \gamma_{12} \cdot \operatorname{sh} \gamma_{23}, \quad (\pi - \varepsilon) = A_{123}. \end{aligned} \quad (122A)$$

В неевклидовой геометрии  $(\pi - \varepsilon) = A_{123}$  – *внутренний* угол треугольника между сторонами «12» и «23»; в СТО  $\varepsilon$  – смежный ему *внешний* угол. При релятивистском физическом движении в  $\langle P^{n+1} \rangle$ , что отображается на гиперboloиде  $\Pi$  – здесь для гиперболических углов скоростей (гл. 12) и при движении в геометрии Лобачевского – Больяи все  $\gamma > 0$  (в СТО это соответствует  $\Delta ct > 0$ , то есть движению в будущее). Из (122A) для таких положительных углов движений и длин мерой Ламберта имеем:

$$|\gamma_{12} - \gamma_{23}| \leq \gamma_{13} \leq \gamma_{12} + \gamma_{23}. \quad (\text{неравенство параллелограмма}) \quad (123A)$$

При этом направляющие косинусы углов движения или их тригонометрических проекций в евклидовых подпространствах изменяются в пределах от  $-1$  до  $+1$ . Неравенства (123A) и  $\gamma > 0$  относят расстояние в гиперболической геометрии в категорию норм. (Для ортосферических дуг и фигур в  $\langle \mathcal{E}^3 \rangle$  мера длины остаётся евклидовой!)

Квадрат модуля *векторного синуса* следует из (122A) тригонометрически, в том числе в виде суммы квадратов (!), где  $\gamma_{12} \leftrightarrow \gamma_{23}$ :

$$\begin{aligned} \operatorname{sh}^2 \gamma_{13} &= \operatorname{sh}^2 \gamma_{12} + \operatorname{sh}^2 \gamma_{23} + \operatorname{sh}^2 \gamma_{12} \cdot \operatorname{sh}^2 \gamma_{23} \cdot (1 + \cos^2 \varepsilon) + \\ &+ 2 \cdot \operatorname{sh} \gamma_{12} \cdot \operatorname{ch} \gamma_{12} \cdot \operatorname{sh} \gamma_{23} \cdot \operatorname{ch} \gamma_{23} \cdot \cos \varepsilon = \\ &= (\operatorname{sh} \gamma_{12} \cdot \operatorname{ch} \gamma_{23} + \cos \varepsilon \cdot \operatorname{sh} \gamma_{23} \cdot \operatorname{ch} \gamma_{12})^2 + (\sin \varepsilon \cdot \operatorname{sh} \gamma_{23})^2. \end{aligned} \quad (124A)$$

Тригонометрическая формула для квадрата модуля *векторного тангенса* следует из (122A) и (124A) в виде суммы квадратов (!), где  $\gamma_{12} \leftrightarrow \gamma_{23}$ :

$$\begin{aligned} \operatorname{th}^2 \gamma_{13} &= [(\operatorname{th} \gamma_{12} + \cos \varepsilon \cdot \operatorname{th} \gamma_{23}) / (1 + \cos \varepsilon \cdot \operatorname{th} \gamma_{23} \cdot \operatorname{th} \gamma_{12})]^2 + \\ &+ [(\sin \varepsilon \cdot \operatorname{th} \gamma_{23} \cdot \operatorname{sch} \gamma_{12}) / (1 + \cos \varepsilon \cdot \operatorname{th} \gamma_{23} \cdot \operatorname{th} \gamma_{12})]^2. \end{aligned} \quad (125A)$$

Отсюда следует релятивистский закон сложения двух координатных скоростей Пуанкаре – Эйнштейна [37, с. 34-35], а именно формула для модуля вектора суммарной скорости, но в тригонометрической форме:

$$\begin{aligned} \operatorname{th} \gamma_{13} &= v_{13}/c = \sqrt{\operatorname{th}^2 \gamma_{12} + \operatorname{th}^2 \gamma_{23} + 2 \cdot \cos \varepsilon \cdot \operatorname{th} \gamma_{23} \cdot \operatorname{th} \gamma_{12} - \sin^2 \varepsilon \cdot \operatorname{th}^2 \gamma_{23} \cdot \operatorname{th}^2 \gamma_{12} /} \\ &/ (1 + \cos \varepsilon \cdot \operatorname{th} \gamma_{12} \cdot \operatorname{th} \gamma_{23}). \end{aligned} \quad (126A)$$

Из формул (122A), (124A) и (126A) следует *независимость скалярного модуля общего движения или суммарной скорости ( $v_{13}$ ) от порядка суммирования движений или скоростей*. Но, как следует из (111A),

закон сложения двух и более движений или скоростей *в полном виде* (для применения к неточечным объектам или к базису) должен содержать в себе информацию об *ортосферической ротации*. Из (124А) также следует *родственный закон сложения двух собственных скоростей*, в том числе коллинеарных (77А), но пока в скалярной форме (см. далее).

Ещё в одном варианте закон сложения двух скоростей выражается через *релятивистские факторы*, которым здесь отвечают секансы углов движений. Непосредственно из формулы (122А) вытекает секансное соотношение (через релятивистские факторы, например, в [11, с. 222]):

$$\operatorname{sech} \gamma_{13} = \sqrt{1 - \operatorname{th}^2 \gamma_{13}} = \operatorname{sech} \gamma_{12} \cdot \operatorname{sech} \gamma_{23} / (1 + \cos \varepsilon \cdot \operatorname{th} \gamma_{23} \cdot \operatorname{th} \gamma_{12}). \quad (127A)$$

Кроме того, формулы (122А), (124А), (126А), (127А) позволяют трактовать тригонометрическим образом правило сложения двух гиперболических отрезков или углов гиперболического движения в скалярной форме со стороны различных гиперболических функций. Если  $\cos \varepsilon = \pm 1$ , то из них следует простейшее аддитивное правило (69А). Если  $\cos \varepsilon = 0$ , то для суммы двух условно ортогональных друг другу гиперболических отрезков или движений следуют частные тригонометрические формулы:

$$\operatorname{th}^2 \gamma_{13} = \operatorname{th}^2 \gamma_{12} + \operatorname{th}^2 \gamma_{23} - \operatorname{th}^2 \gamma_{12} \cdot \operatorname{th}^2 \gamma_{23}, \quad (128A)$$

$$\operatorname{ch} \gamma_{13} = \operatorname{ch} \gamma_{12} \cdot \operatorname{ch} \gamma_{23} \quad (\operatorname{sech} \gamma_{13} = \operatorname{sech} \gamma_{12} \cdot \operatorname{sech} \gamma_{23}), \quad (129A)$$

$$\operatorname{sh}^2 \gamma_{13} = \operatorname{sh}^2 \gamma_{12} + \operatorname{sh}^2 \gamma_{23} + \operatorname{sh}^2 \gamma_{12} \cdot \operatorname{sh}^2 \gamma_{23}. \quad (130A)$$

Но в трёхмерном евклидовом пространстве взаимно ортогональными могут быть максимально три вектора. Выполнив последовательно два акта суммирования трёх условно ортогональных отрезков или движений, выводим соответствующие трёхступенчатые скалярные тригонометрические формулы. (В данном частном случае суммарный скалярный угол также не зависит от порядка последовательности частных движений.) Для суммы трёх ортогональных отрезков имеем:

$$\begin{aligned} \operatorname{th}^2 \gamma_{14} = & \operatorname{th}^2 \gamma_{12} + \operatorname{th}^2 \gamma_{23} + \operatorname{th}^2 \gamma_{34} - (\operatorname{th}^2 \gamma_{12} \cdot \operatorname{th}^2 \gamma_{23} + \operatorname{th}^2 \gamma_{12} \cdot \operatorname{th}^2 \gamma_{34} + \\ & + \operatorname{th}^2 \gamma_{23} \cdot \operatorname{th}^2 \gamma_{34}) + \operatorname{th}^2 \gamma_{12} \cdot \operatorname{th}^2 \gamma_{23} \cdot \operatorname{th}^2 \gamma_{34}, \end{aligned} \quad (131A)$$

$$\operatorname{ch} \gamma_{14} = \operatorname{ch} \gamma_{12} \cdot \operatorname{ch} \gamma_{23} \cdot \operatorname{ch} \gamma_{34} \quad (\operatorname{sch} \gamma_{14} = \operatorname{sch} \gamma_{12} \cdot \operatorname{sch} \gamma_{23} \cdot \operatorname{sch} \gamma_{34}), \quad (132A)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{sh}^2 \gamma_{14} = & \operatorname{sh}^2 \gamma_{12} + \operatorname{sh}^2 \gamma_{23} + \operatorname{sh}^2 \gamma_{34} + (\operatorname{sh}^2 \gamma_{12} \cdot \operatorname{sh}^2 \gamma_{23} + \operatorname{sh}^2 \gamma_{12} \cdot \operatorname{sh}^2 \gamma_{34} + \\ & + \operatorname{sh}^2 \gamma_{23} \cdot \operatorname{sh}^2 \gamma_{34}) + \operatorname{sh}^2 \gamma_{12} \cdot \operatorname{sh}^2 \gamma_{23} \cdot \operatorname{sh}^2 \gamma_{34}. \end{aligned} \quad (133A)$$

Если здесь хотя бы один из частных углов бесконечен (то есть  $\gamma = \infty$ ,  $\operatorname{th} \gamma = 1$ ,  $v = \pm c$ ), то аналогичное справедливо и для общего угла.

Этот факт соответствует скоростному постулату Эйнштейна (15 А). Условно ортогональное суммирование движений (например, в виде проекций в ортогональных криволинейных координатах Гаусса) естественным образом обобщается для  $n$ -мерной геометрии Лобачевского – Больяи формулой суммы в мультипликативно-коммутативной косинусной и секансной интерпретации, например:

$$\text{ch } \gamma_{1t} = \prod_{\substack{i=1, t-1 \\ j=2, t}} \text{ch } \gamma_{ij} \quad (\varepsilon_{ij} = \pm \pi/2), \quad \text{где } 3 \leq t \leq n.$$

Итоговый *скалярный* угол  $\gamma_{1t}$  (и соответствующее ему расстояние  $a_{1t} = R \cdot \gamma_{1t}$ ) не зависит от порядка последовательности частных условно ортогональных движений. Например, общая протяжённость суммарного условно ортогонального движения по гиперлоиду в  $\langle P^{n+1} \rangle$  и также в  $n$ -мерном пространстве Лобачевского – Больяи определяется в виде:

$$a_{1t} = R \cdot \text{arch} \prod_{\substack{i=1, t-1 \\ j=2, t}} \text{ch } a_{ij}/R, \quad (\varepsilon_{ij} = \pm \pi/2), \quad \text{где } 3 \leq t \leq n.$$

Далее с точки зрения тензорной тригонометрии вычисляем направляющие косинусы итоговой двухступенчатой ротации  $\Gamma_{13}$  и соответственно векторов  $\mathbf{th} \gamma_{13}$ ,  $\mathbf{sh} \gamma_{13}$  и  $\mathbf{v}_{13}$  в декартовом суббазисе  $\mathbf{E}_1^{(3)}$ . Воспользуемся тем фактом, что они тождественны для матриц  $\text{roth } \Gamma$  и  $\text{roth } 2\Gamma$ . Вслед за элементом  $S_{44}$  матрицы  $\text{roth}^2 \Gamma_{13} = \text{roth } 2\Gamma_{13}$  в (114А) вычисляем её остающиеся нижние элементы, перемножая четвёртую строку В на  $k$ -й столбец  $\text{roth } \Gamma_{12}$  ( $k = 1 \div 3$ ):

$$s_{4k} = s_{k4} = \text{sh } 2\gamma_{13} \cdot \cos \sigma_k = 2 \cdot \text{ch } \gamma_{13} \cdot \text{sh } \gamma_{13} \cdot \cos \sigma_k = 2 \cdot \text{ch } \gamma_{13} \cdot [(\text{sh } \gamma_{12} \cdot \text{ch } \gamma_{23} + \cos \varepsilon \cdot \text{sh } \gamma_{23} \cdot \text{ch } \gamma_{12}) \cdot \cos \alpha_k + \text{sh } \gamma_{23} \cdot (\cos \beta_k - \cos \varepsilon \cdot \cos \alpha_k)]. \quad (134А)$$

Отсюда выводятся тригонометрические формулы для двухступенчатого движения в *векторных* формах, зависящих от порядка неколлинеарных движений. Векторный синус в 3-х тождественных вариантах имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} \text{sh } \gamma_{13} \cdot \cos \sigma_k &= (\text{sh } \gamma_{12} \cdot \text{ch } \gamma_{23} + \cos \varepsilon \cdot \text{sh } \gamma_{23} \cdot \text{ch } \gamma_{12}) \cdot \cos \alpha_k + \\ &+ \text{sh } \gamma_{23} \cdot (\cos \beta_k - \cos \varepsilon \cdot \cos \alpha_k), \quad (k = 1 \div 3) \\ \mathbf{sh} \gamma_{13} &= \text{sh } \gamma_{13} \cdot \mathbf{e}_\sigma = (\text{sh } \gamma_{12} \cdot \text{ch } \gamma_{23} + \cos \varepsilon \cdot \text{sh } \gamma_{23} \cdot \text{ch } \gamma_{12}) \cdot \mathbf{e}_\alpha + \sin \varepsilon \cdot \text{sh } \gamma_{23} \cdot \mathbf{e}_\eta = \\ &= [\text{sh } \gamma_{12} \cdot \text{ch } \gamma_{23} + \cos \varepsilon \cdot \text{sh } \gamma_{23} \cdot (\text{ch } \gamma_{12} - 1)] \cdot \mathbf{e}_\alpha + \text{sh } \gamma_{23} \cdot \mathbf{e}_\beta, \end{aligned} \right\} (135А)$$

где  $\mathbf{e}_\sigma = \{\cos \sigma_k\}$  – *единичный вектор направляющих косинусов суммарного гиперболического движения*  $\gamma_{13}$  в структуре (364) в порядке  $\gamma_{12}, \gamma_{23}$ .

$$\mathbf{e}_\eta = \{(\cos \beta_k - \cos \varepsilon \cdot \cos \alpha_k) / \sin \varepsilon\} = (\mathbf{e}_\beta - \cos \varepsilon \cdot \mathbf{e}_\alpha) / \sin \varepsilon = \overline{\mathbf{e}_\alpha}^{\rightarrow} \cdot \mathbf{e}_\beta / \|\overline{\mathbf{e}_\alpha}^{\rightarrow} \cdot \mathbf{e}_\beta\| \quad (136A)$$

– единичный вектор направляющих косинусов условно ортогонального приращения общего движения по отношению к  $\mathbf{e}_\alpha$ , то есть к вектору первого движения. Имеем соотношение ортогональности:

$$\mathbf{e}_\eta' \cdot \mathbf{e}_\alpha = 0 \quad (\mathbf{e}_\eta \perp \mathbf{e}_\alpha). \text{ В свою очередь, из (136A): } \mathbf{e}_\eta' \cdot \mathbf{e}_\beta = \sin \varepsilon.$$

Единичный вектор  $\mathbf{e}_\eta$  в дальнейшем широко используется при биортогональных разложениях приращений движения, в том числе дифференциальных или связанных с физическим ускорением (общим, тангенциальным и нормальным). Естественным образом он выводится из биортогонального представления второго вектора в сумме:

$$\mathbf{e}_\beta = \cos \varepsilon \cdot \mathbf{e}_\alpha + \sin \varepsilon \cdot \mathbf{e}_\eta. \quad (137A)$$

Соответственно вектор  $\mathbf{e}_\eta$  применяется для обратного порядка суммирования движений (см. далее). Из векторных формул (135A) и скалярной формулы (122A) получаем родственные векторные соотношения для тангенсов (координатных скоростей) тоже в порядке  $\gamma_{12}, \gamma_{23}$ :

$$\begin{aligned} \text{th } \gamma_{13} &= \text{th } \gamma_{13} \cdot \mathbf{e}_\sigma = \frac{\text{th } \gamma_{12} + \cos \varepsilon \cdot \text{th } \gamma_{23}}{1 + \cos \varepsilon \cdot \text{th } \gamma_{12} \cdot \text{th } \gamma_{23}} \cdot \mathbf{e}_\alpha + \frac{\sin \varepsilon \cdot \text{th } \gamma_{23} \cdot \text{sech } \gamma_{12}}{1 + \cos \varepsilon \cdot \text{th } \gamma_{12} \cdot \text{th } \gamma_{23}} \cdot \mathbf{e}_\eta = \\ &= \frac{\text{sh } \gamma_{13}}{\text{ch } \gamma_{13}} = \frac{\text{th } \gamma_{12} + \cos \varepsilon \cdot \text{th } \gamma_{23} \cdot (1 - \text{sech } \gamma_{12})}{1 + \cos \varepsilon \cdot \text{th } \gamma_{12} \cdot \text{th } \gamma_{23}} \cdot \mathbf{e}_\alpha + \frac{\text{th } \gamma_{23} \cdot \text{sech } \gamma_{12}}{1 + \cos \varepsilon \cdot \text{th } \gamma_{12} \cdot \text{th } \gamma_{23}} \cdot \mathbf{e}_\beta. \end{aligned} \quad (138A)$$

Геометрическая интерпретация синусных формул (135A), (124A) наглядно сводится к следующему. Второй вектор  $\gamma_{23}$  на гиперboloиде П разлагаем на пару, чтобы их проекции на  $\langle \mathcal{E}^{3,(2)} \rangle$  направлялись по  $\mathbf{e}_\alpha$  и  $\mathbf{e}_\eta$ :  $\gamma_{23} = \overline{\gamma}_{23} + \overset{\perp}{\gamma}_{23}$ . Выполняем их и  $\gamma_{12}$  синусное ортопроецирование на  $\langle \mathcal{E}^{3,(1)} \rangle$  параллельно  $\overline{\text{ct}}^{(1)}$ . В итоге для  $\gamma_{13}$  имеем 2 синусные ортопроекции:

$$\text{sh } \gamma_{23} = \overline{\text{sh}} \gamma_{23} + \overset{\perp}{\text{sh}} \gamma_{23} \rightarrow \text{sh } \gamma_{13} = (\text{sh } \gamma_{12} + \overline{\text{sh}} \gamma_{23}) + \overset{\perp}{\text{sh}} \gamma_{23} \rightarrow (135) \rightarrow$$

$$\text{sh } \gamma_{13} = \overline{\text{sh}} \gamma_{13} + \overset{\perp}{\text{sh}} \gamma_{23} \rightarrow \text{sh}^2 \gamma_{13} = \overline{\text{sh}}^2 \gamma_{13} + \overset{\perp}{\text{sh}}^2 \gamma_{23} \rightarrow \text{Теорема Пифагора (124A),}$$

где  $\overline{\text{sh}} \gamma_{13} = \cos \varepsilon \cdot \text{sh } \gamma_{13}$ ,  $\overset{\perp}{\text{sh}} \gamma_{13} = \overset{\perp}{\text{sh}} \gamma_{23} = \sin \varepsilon \cdot \text{sh } \gamma_{23}$  (рис. 4A). (Скалярный косинус по (122A) есть их ортопроекция на  $\overline{\text{ct}}^{(1)}$  параллельно  $\langle \mathcal{E}^{3,(1)} \rangle$ ). Здесь  $\gamma_{kj}$  относятся к пространству  $\langle \mathcal{E}^{3,(k)} \rangle$  – см. комментарий к (80A)!

Тангенсные формулы (138A), (125A) получаем в результате указанного разложения  $\gamma_{23}$  с последующим *перекрёстным* *проецированием* (гл. 4A) его компонентов и  $\gamma_{12}$  на  $\langle \mathcal{E}^{3,(1)} \rangle$  параллельно  $\overline{\text{ct}}^{(2)}$ , с учётом поправки на изменение знаменателя – косинуса (или релятивистской поправки ко времени в  $\langle \mathcal{E}^{3,(2)} \rangle$ ). В итоге исходные гиперболические отрезки  $\gamma_{12}$  и  $\gamma_{23}$  отображаются в  $\langle \mathcal{E}^{3,(1)} \rangle$  в *однородных координатах*  $\tilde{E}_1^{(3)}$  (гл. 12). См. далее на *тангенсной модели* (модели Клейна) – (156A) и (157).

Итак, векторы синуса и тангенса итогового двухступенчатого гиперболического движения в суббазисе  $\tilde{E}_1^{(3)}$  разлагаются биортогонально на проекции – параллельные и условно перпендикулярные  $\mathbf{e}_\alpha$ . В связи с этим ортопроекции, согласно (124А) и (125А), подчиняются теореме Пифагора. Это важное свойство векторов общего движения **sh**  $\gamma_{13}$ , **th**  $\gamma_{13}$  и  $\mathbf{v}_{13}$  объединяет в определённой степени евклидову и неевклидову *гиперболическую* и *сферическую* геометрии. Различие тут состоит в том, что в евклидовой геометрии *частные векторы движений* суммируются коммутативно, *геометрически одной теореме Пифагора* подчиняются ортопроекции векторов синуса и тангенса общего движения как на  $\mathbf{e}_\alpha$  и  $\mathbf{e}_\eta$ , так и на  $\mathbf{e}_\beta$  и  $\mathbf{e}_{\eta^c}$ , а в неевклидовой геометрии – **первой** на  $\mathbf{e}_\alpha$  и  $\mathbf{e}_\eta$  (при прямом порядке последовательности частных движений) и **второй** – на  $\mathbf{e}_\beta$  и  $\mathbf{e}_{\eta^c}$  (при обратном порядке). Хотя модули гипотенуз в двух случаях одинаковы, но направляющие орты отличаются как в (120А). Формулы (124А), (125А), (135А) и (138А) можно представить также в биортогональной форме с разложением проекции  $\gamma_{12}$  относительно  $\mathbf{e}_\beta$ . Таким образом, *установлена теорема о приведении произвольной суммы 2-х движений к особой биортогональной форме – коммутативной для евклидовой геометрии и некоммутативной для неевклидовой геометрии.* (В псевдоевклидовой геометрии эта теорема действует именно в  $\langle \mathcal{E}^3 \rangle$  – в псевдодекартовом базисе с центром в начале данного суммирования.)

Отмеченная геометрическая закономерность формально позволила Пуанкаре и Эйнштейну вывести известным способом релятивистский закон суммирования двух неколлинеарных скоростей в векторной и скалярной формах, не нарушая общности выводов, при исходных углах:  $\cos \alpha_1 = 1, \cos \alpha_2 = \cos \alpha_3 = 0 \rightarrow \cos \varepsilon = \cos \beta_1$ . Ортогональные проекции векторов двух скоростей (по оси  $x_1$  и по осям  $x_2, x_3$ ) *были приняты ими независимыми и просуммированы* (что позволяет выше указанная специальная теорема). Положим в векторной формуле (138А) значения:

$$\text{th } \gamma_{12} \cdot \cos \alpha_1 = \pm v/c \approx 10^{-4}, \quad \cos \alpha_1 = \pm 1; \quad \rightarrow \cos \varepsilon = \pm \cos \beta_1 - \text{см. (119А);}$$

$$\text{th } \gamma_{23} = c/c = 1 \rightarrow \text{th } \gamma_{13} = 1;$$

Здесь  $v \approx 30$  км/сек – орбитальная скорость движения Земли. Имеем:

$$\begin{aligned} \text{th } \gamma_{13} = \mathbf{e}_\sigma &= \frac{[\text{th } \gamma_{12} \pm \cos \beta_1 (1 - \text{sech } \gamma_{12})] \cdot \mathbf{e}_\alpha + \text{sech } \gamma_{12} \cdot \mathbf{e}_\beta}{1 \pm \cos \beta_1 \cdot \text{th } \gamma_{12}} = \\ &= \frac{1}{1 \pm \cos \beta_1 \cdot \text{th } \gamma_{12}} \cdot \begin{vmatrix} \pm \text{th } \gamma_{12} + \cos \beta_1 \\ \text{sch } \gamma_{12} \cdot \cos \beta_2 \\ \text{sch } \gamma_{12} \cdot \cos \beta_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \sigma_1 \\ \cos \sigma_2 \\ \cos \sigma_3 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

где  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  и  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  – истинные и кажущиеся углы наблюдения какого-либо светила (Звезды) на небесной сфере с их косинусами!

Отсюда следует *полный ряд релятивистских формул для аберрации*:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \beta'_1 &= \frac{\cos \sigma_2}{\cos \sigma_1} = \frac{\operatorname{sch} \gamma_{12} \cdot \cos \beta_2}{\pm \operatorname{th} \gamma_{12} + \cos \beta_1}, \left[ \begin{array}{l} \cos \zeta^\pm = (\mathbf{e}_\sigma^+) \cdot \mathbf{e}_\sigma^- = \\ = \frac{\operatorname{sch}^2 \gamma_{12} - \sin^2 \beta_1 \cdot \operatorname{th}^2 \gamma_{12}}{1 - \cos^2 \beta_1 \cdot \operatorname{th}^2 \gamma_{12}} \end{array} \right] (R_a = \zeta^\pm/2) \\ \operatorname{tg} \beta'_2 &= \frac{\cos \sigma_3}{\cos \sigma_1} = \frac{\operatorname{sch} \gamma_{12} \cdot \cos \beta_3}{\pm \operatorname{th} \gamma_{12} + \cos \beta_1}, \end{aligned}$$

$$\beta_1 = \pi/2 \rightarrow \cos \zeta^m = \operatorname{sch}^2 \gamma_{12} - \operatorname{th}^2 \gamma_{12} = \cos 2\varphi(\gamma_{12}), \quad \sin \zeta^m = 2\operatorname{th} \gamma_{12} \cdot \operatorname{sch} \gamma_{12} = \sin 2\varphi(\gamma_{12})!$$

В частности, при  $\beta_3 = \pi/2 \rightarrow \cos \beta_2 = \sin \beta_1$ , следует *тригонометрический вариант* формулы Эйнштейна для аберрации [37, с. 36–39]:

$$\operatorname{tg} \beta'_1 = \frac{\sin \beta_1 \cdot \operatorname{sch} \gamma_{12}}{\cos \beta_1 \pm \operatorname{th} \gamma_{12}} \quad (\sin \beta'_1 = \frac{\sin \beta_1 \cdot \operatorname{sch} \gamma_{12}}{1 \pm \cos \beta_1 \cdot \operatorname{th} \gamma_{12}}, \cos \beta'_1 = \frac{\cos \beta_1 \pm \operatorname{th} \gamma_{12}}{1 \pm \cos \beta_1 \cdot \operatorname{th} \gamma_{12}});$$

$\sin \beta'_1 = \cos \sigma_2$ ,  $\cos \beta'_1 = \cos \sigma_1 \rightarrow \beta'_1 = \sigma_1 = \pi/2 - \sigma_2$  (*при данном упрощении*).

Отсюда либо  $\beta'_1 < \beta_1$  (если +), либо  $\beta'_1 > \beta_1$  (если -);  $(\beta_1 \leftrightarrow \beta'_1) \leftrightarrow (\pm \leftrightarrow \mp)$ !

Все формулы следуют сразу из указанной общей формулы для  $\operatorname{th} \gamma_{13} = \mathbf{e}_\sigma^!$

В формулу Брэдли (1727г) Эйнштейн ввёл релятивистскую поправку

$\operatorname{sch} \gamma_{12}$  в части времени с *одноступенчатым* преобразованием Лоренца

взамен преобразований Галилея. Простая, казалось бы, поправка сделала

формулы для аберрации тождественными в 2-х инерциальных системах,

связанных либо с Землёй, либо со Звездой. Т. е. имеем:  $(\mathbf{e}_\beta \leftrightarrow \mathbf{e}_\sigma) \leftrightarrow (\pm \leftrightarrow \mp)$ !

Максимальный *угловой радиус аберрации* при  $\beta_1 = \pi/2$  есть  $R_a = \theta^m/2 \approx 10^{-4} \text{rad}$ .

Ввиду *одноступенчатости* здесь применена *синус-тангенсная аналогия*!

Из формул (135А), (136А) следует, что  $\mathbf{e}_\sigma$  и  $\mathbf{e}_\eta$  – линейные комбинации

$\mathbf{e}_\alpha$  и  $\mathbf{e}_\beta$ . Поэтому все 4 вектора условно лежат в одной и той же евклидовой

плоскости  $\langle \mathcal{E}^2 \rangle \equiv \langle \mathbf{e}_\alpha, \mathbf{e}_\beta \rangle$ . Повторяя эти рассуждения для обратного

порядка последовательности движений, получаем аналогичные соотно-

шения и выводы, но уже с *первым* исходным вектором  $\mathbf{e}_\beta$  и со *вторым*

исходным вектором  $\mathbf{e}_\alpha$ . Вектор ортогонального приращения общего

движения определяется в форме, аналогичной (136А):

$$\mathbf{e}_\eta = \{(\cos \alpha_k - \cos \varepsilon \cdot \cos \beta_k) / \sin \varepsilon\} = (\mathbf{e}_\alpha - \cos \varepsilon \cdot \mathbf{e}_\beta) / \sin \varepsilon, \quad (139A)$$

$$\mathbf{e}_\beta = \cos \varepsilon \cdot \mathbf{e}_\alpha + \sin \varepsilon \cdot \mathbf{e}_\eta^-, \quad (\mathbf{e}_\eta^+ \cdot \mathbf{e}_\beta = 0 \rightarrow \mathbf{e}_\eta^+ \perp \mathbf{e}_\beta, \quad \mathbf{e}_\eta^+ \cdot \mathbf{e}_\alpha = \sin \varepsilon). \quad (140A)$$

Новые векторы  $\operatorname{th} \vec{\gamma}_{13}$ ,  $\operatorname{sh} \vec{\gamma}_{13}$  и  $\vec{\mathbf{v}}_{13}$  направлены в декартовом суб-

базисе  $\tilde{\mathbf{E}}_1^{(3)}$  по  $\mathbf{e}_\sigma$ , но их модули остались прежними. Векторы  $\mathbf{e}_\sigma$  и  $\mathbf{e}_\eta$  –

также линейные комбинации  $\mathbf{e}_\alpha$  и  $\mathbf{e}_\beta$  и лежат в той же  $\langle \mathcal{E}^2 \rangle$ . С другой

стороны, ротация (113А) осуществляется в тригонометрической плос-

кости матрицы  $\operatorname{rot} \Theta_{13}$ . Следовательно, последняя тождественна  $\langle \mathcal{E}^2 \rangle$ .

Матрицу  $\operatorname{rot} \Theta_{13}$ , кроме (115А), в  $\langle P^{3+1} \rangle$  можно найти в канонической

форме (497). Нормальная ось сферической ротации  $\mathbf{e}_N$  находится через

векторное (синусное) произведение  $\mathbf{r}_N$  (499) применительно к любой паре из

6-ти независимых компланарных единичных векторов ( $\det \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_N\} > 0$ )!

Для  $\Theta_{13}$ : через  $\mathbf{e}_\sigma$  и  $\mathbf{e}_\epsilon$  с множителем  $\sin \theta_{13}$ , определяющим знак угла  $\theta_{13}$  ( $\cos \theta_{13}$  вычисляется ниже); а через  $\mathbf{e}_\alpha$  и  $\mathbf{e}_\beta$  с множителем  $\sin \epsilon$  без знака  $\theta_{13}$ . (В  $\langle P^{2+1} \rangle$  знак угла  $\theta_{13}$  обратен знаку угла  $\epsilon$  между движениями  $\gamma_{12}$  и  $\gamma_{23}$ .) При изменении порядка следования движений (скоростей) на обратный каждый характеристический вектор заменяется на свой спарринг-вектор.

Все 6 характеристических векторов  $\mathbf{e}_\alpha$ ,  $\mathbf{e}_\beta$ ,  $\mathbf{e}_\sigma$ ,  $\mathbf{e}_\epsilon$ ,  $\mathbf{e}_\eta$ ,  $\mathbf{e}_\eta$  расположены в  $\langle \mathcal{L}^2 \rangle$  в пределах угла  $\pi$ . Из (136А) и (139А), с учётом (122А), следует:

$$\mathbf{e}_\eta' \cdot \mathbf{e}_\eta = -\cos \epsilon = +\cos(\pi - \epsilon) = +\cos A_{123}, \quad (141A)$$

$$\mathbf{e}_\eta' \cdot \mathbf{e}_\alpha = \mathbf{e}_\eta' \cdot \mathbf{e}_\beta = +\sin \epsilon = +\sin(\pi - \epsilon) = +\sin A_{123}. \quad (142A)$$

Кроме того, векторы  $\mathbf{e}_\sigma$ ,  $\mathbf{e}_\epsilon$  и  $\mathbf{r}_N$  универсально образуют правую тройку в  $\langle \mathcal{L}^3 \rangle$ , чтобы соответствовать принятому направлению отсчёта угла  $\theta$  против часовой стрелки. В свою очередь, значение  $\cos \theta_{13}$  в структуре (497) вычисляется через соотношения (120А), (135А) и реверсивный аналог последнего. В итоге (релятивистский) сферический сдвиг относительно исходного  $\tilde{\mathbf{E}}_1$  в косинусном варианте составляет:

$$\cos \theta_{13} = \mathbf{e}_\sigma' \cdot \mathbf{e}_\sigma = (A + \cos \epsilon \cdot B + \cos^2 \epsilon \cdot C + \cos^3 \epsilon \cdot D) / \text{sh}^2 \gamma_{13} > 0, \quad (143A)$$

$$A = \text{sh}^2 \gamma_{12} \cdot \text{ch} \gamma_{23} + \text{sh}^2 \gamma_{23} \cdot \text{ch} \gamma_{12} = (\text{ch} \gamma_{12} \cdot \text{ch} \gamma_{23} - 1) \cdot (\text{ch} \gamma_{12} + \text{ch} \gamma_{23}) > 0,$$

$$B = \text{sh} \gamma_{12} \cdot \text{sh} \gamma_{23} \cdot (\text{ch} \gamma_{12} \cdot \text{ch} \gamma_{23} + \text{ch} \gamma_{12} + \text{ch} \gamma_{23} - 1) > 0,$$

$$C = \text{sh}^2 \gamma_{12} \cdot \text{ch} \gamma_{23} \cdot (\text{ch} \gamma_{23} - 1) + \text{sh}^2 \gamma_{23} \cdot \text{ch} \gamma_{12} \cdot (\text{ch} \gamma_{12} - 1) > 0,$$

$$D = \text{sh} \gamma_{12} \cdot \text{sh} \gamma_{23} \cdot (\text{ch} \gamma_{12} - 1) \cdot (\text{ch} \gamma_{23} - 1) > 0,$$

$$\text{sh}^2 \gamma_{13} = (\text{ch} \gamma_{12} \cdot \text{ch} \gamma_{23} + \cos \epsilon \cdot \text{sh} \gamma_{12} \cdot \text{sh} \gamma_{23})^2 - 1 > 0.$$

Последняя формула есть удобный вариант скалярной формулы (124А).

Для (143А) как функции от  $\cos \epsilon$  имеют место три экстремума:  $\cos \theta_{13} = +1$  при  $\cos \epsilon = \pm 1$  (максимумы) и  $\cos \theta_{13} = A / \text{sh}^2 \gamma_{13}$  при  $\cos \epsilon = 0$  (минимум).

$$\text{При } \cos \epsilon = +1 \text{ имеем: } A + B + C + D = \text{sh}^2 \gamma_{13} = \text{sh}^2 (\gamma_{12} + \gamma_{23}).$$

$$\text{При } \cos \epsilon = -1 \text{ имеем: } A - B + C - D = \text{sh}^2 \gamma_{13} = \text{sh}^2 (\gamma_{12} - \gamma_{23}).$$

Эти два случая тривиальны и отображают условно коллинеарные движения – однонаправленные и разнонаправленные. Минимум  $\cos \theta_{13}$  и соответственно максимум по абсолютной величине угла сферического сдвига  $\theta_{13}$  достигается при условной ортогональности  $\mathbf{e}_\alpha$  и  $\mathbf{e}_\beta$ . Для суммы ортогональных движений, при  $\epsilon = \pm \pi/2$  ( $\cos \epsilon = 0$ ), из (143А) следует:

$$\cos \theta_{13} = A / \text{sh}^2 \gamma_{13} = (\text{th}^2 \gamma_{12} \cdot \text{sch} \gamma_{23} + \text{th}^2 \gamma_{23} \cdot \text{sch} \gamma_{12}) / (\text{th}^2 \gamma_{12} + \text{th}^2 \gamma_{23} - \text{th}^2 \gamma_{12} \cdot \text{th}^2 \gamma_{23}) = (\text{ch} \gamma_{12} + \text{ch} \gamma_{23}) / (\text{ch} \gamma_{12} \cdot \text{ch} \gamma_{23} + 1) > 0,$$

$$\sin \theta_{13} = \mp \text{th} \gamma_{12} \cdot \text{th} \gamma_{23} / (1 + \text{sch} \gamma_{12} \cdot \text{sch} \gamma_{23}) = \mp \text{sh} \gamma_{12} \cdot \text{sh} \gamma_{23} / (\text{ch} \gamma_{12} \cdot \text{ch} \gamma_{23} + 1).$$



Эта частная синусная скалярная формула, установленная впервые Зоммерфельдом, даёт релятивистский коэффициент «1/2» в **прецессии Томаса** [5, 63], так как в ней  $\gamma_{ij} \rightarrow 0$ . В *тангенсных формулах* имеем:

$$\left. \begin{aligned} \text{th } \gamma_{13} \cdot \mathbf{e}_\sigma &= \text{th } \gamma_{12} \cdot \mathbf{e}_\alpha + \text{th } \gamma_{23} \cdot \text{sch } \gamma_{12} \cdot \mathbf{e}_\beta \\ \text{th } \gamma_{13} \cdot \mathbf{e}_\sigma &= \text{th } \gamma_{23} \cdot \mathbf{e}_\beta + \text{th } \gamma_{12} \cdot \text{sch } \gamma_{23} \cdot \mathbf{e}_\alpha \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \text{tg } \theta_{13} &= \mp \text{sh } \gamma_{12} \cdot \text{sh } \gamma_{23} / (\text{ch } \gamma_{12} + \text{ch } \gamma_{23}) \\ (\mathbf{e}'_\alpha \cdot \mathbf{e}'_\beta &= \mathbf{e}'_\beta \cdot \mathbf{e}'_\alpha = \cos \varepsilon = 0) \end{aligned}$$

Если одна из скоростей равна скорости света, например  $\text{th } \gamma_{23} = \pm 1$ , то  $\cos \theta_{13} = \text{sech } \gamma_{12}$ ,  $\sin \theta_{13} = \mp \text{th } \gamma_{12}$  и  $\text{th } \gamma_{13} = 1$ . Теоретически максимальный релятивистский сферический сдвиг ( $\theta_{13} = \mp \pi/2$ ) имеет место при суммировании условно ортогональных световых скоростей. В гиперболической геометрии вращения  $\theta$  в плоскости  $\langle \mathcal{E}^2 \rangle \equiv \langle \mathbf{e}_\alpha, \mathbf{e}_\beta \rangle$  осуществляется именно против направления суммирования отрезков. Вышеуказанная система, выраженная в *биортогональной форме*, то есть при  $\varepsilon = \pm \pi/2$ , для суммы ортогональных движений (скоростей) даёт более простой и наглядный вывод частных формул для  $\cos \theta_{13}$  и  $\sin \theta_{13}$ .

Согласно ротационной формуле (113А), положительные значения угла  $\theta_{13}$  отсчитываются в тригонометрической плоскости  $\langle \mathcal{E}^2 \rangle \subset \langle \mathcal{E}^3 \rangle$  в направлении от  $\mathbf{e}_\sigma$  к  $\mathbf{e}_\sigma$ . Причём, как указывалось ранее,  $\mathbf{e}_\sigma$ ,  $\mathbf{e}_\sigma$  и  $\mathbf{r}_N$  составляют правую тройку, что однозначно определяет направление ортосферической ротации  $\text{rot } \Theta$  в структуре (497).

Пусть в  $\langle P^{3+1} \rangle$  с  $\tilde{E}_1$  в (135А):  $\gamma_{12} = \gamma$ ,  $\gamma_{23} = d\gamma$  – дифференциал дуги  $\gamma$  под углом  $\varepsilon$ . Тогда  $\cos \theta_{13} \rightarrow \cos d\theta = 1 - (d\theta)^2/2$  при приращении  $d\gamma$ . Подставляя эти значения в (499), учтя, что  $\text{ch } d\gamma = 1 + (d\gamma)^2/2$ , имеем:  $d\theta = [\text{sh}\gamma / (\text{ch}\gamma + 1)] \otimes d\gamma = \text{th}(\gamma/2) d\gamma \cdot \mathbf{r}_N = \mp \sin \varepsilon \cdot [\text{th}\gamma / (1 + \text{sech}\gamma)] d\gamma \cdot \mathbf{e}_N$  (144А) (в  $\langle P^{2+1} \rangle$  знак « $\rightarrow$ » в формуле получается сразу из-за обратности  $\theta$  и  $\varepsilon$ .)

Это *дифференциальный вариант* (143А) для различных приложений; например, в (172А) – *ротационное применение* этой общей формулы.

Особый случай отвечает ортогональной (*и теперь не условно!*) сумме бесконечно малых частных углов движения или их первых дифференциалов. Например, из формул (130А, 133А) при  $\cos \varepsilon = 0$  имеем:

$$\lim_{\gamma_{12} \rightarrow 0} \gamma_{13} = \sqrt{\gamma_{12}^2 + \gamma_{23}^2}; \quad \theta_{13} = \mp \gamma_{12} \cdot \gamma_{23} / 2 = \mp (a_{12} \cdot a_{23} / 2) / R^2 = s_\Delta \cdot K_G \rightarrow 0.$$

Кроме того, из формулы (144А) для  $d\gamma_{12}$  и  $d\gamma_{23}$  с их внешним углом  $\varepsilon$  вытекает дифференциальная формула:  $d\theta_{13} = -\sin \varepsilon d\gamma_{12} d\gamma_{23} / 2 = \mp ds_\Delta < 0$ .

*Во-первых*, это выражает *инфинитезимальную вклидову метрику* “а” на обоих гиперблоидах Минковского, а также площадь инфинитезимального прямоугольного треугольника 123:  $s_\Delta = \theta_{13} / K_G$  с точностью до знака; с этой же микрометрикой по формулам евклидовой геометрии вычисляются  $k \leq n$  мерные объёмы и т. д. (с возможностью их интегрирования).

*Во-вторых*, это означает равенство угла ортосферической ротации  $\theta_{13}$  и сферической угловой девиации  $\delta_{\Delta}$  гиперболического треугольника, что следует из площади  $S_{\Delta}$  и теоремы Гаусса – Бонне для неё же в случае поверхностей постоянного радиуса кривизны, взяв интегралы по контуру и по поверхности с их инфинитезимальным тождеством. (Для геодезического треугольника на *гиперсфереоиде* в квазиевклидовом пространстве в формуле-аналоге для скалярной ротации  $\theta$  (гл. 8А) применяется знак «±».) Тензорная ортосферическая ротация  $\Theta_{13}$ , согласно матричной формуле (115А), тоже тождественна дефекту геодезического треугольника на гиперблоидах. Угловой дефект возникает из-за того, что на поверхности с кривизной параллельный перенос вектора зависит от пути, но он вызывается математически именно ортосферической ротацией  $\Theta$ !

Инфинитезимальная теорема Пифагора может проявляться для бесконечно малых гиперболических отрезков (углов) с их количеством  $k \leq n$ . Повторив, согласно (128А)–(130А), ортогональное суммирование для  $k$  бесконечно малых независимых частных углов, получаем:

$$\lim_{\gamma_{(j)} \rightarrow 0} \gamma = \sqrt{\sum_{j=1}^k \gamma_{(j)}^2}, \quad (\varepsilon_{ij} = \pm \pi/2).$$

Как и при  $k = 2$ , имеет место коммутативность частных углов движения в векторной и скалярной формах суммирования. **Следствие:** *Гиперболическая геометрия гиперблоидов I и II инфинитезимально евклидова!* Элемент площади  $ds = d\gamma_{(1)} d\gamma_{(2)} \cdot R^2$ ; элемент  $k$ -мерного объёма  $dv = d\gamma_{(1)} \dots d\gamma_{(k)} \cdot R^k$ . Мультипликативные косинусные формулы при  $\gamma \rightarrow 0$  для скалярной суммы ортогональных движений тоже продуцируют теорему Пифагора, с учётом разложены в ряд:  $\text{ch } \gamma \rightarrow 1 + \gamma^2/2 \dots$ . 1-й дифференциал общего угла движения, согласно инфинитезимальной теореме Пифагора на гиперблоидах, выражается в двух вариантах  $d\gamma$ :

$$(d\gamma)^2 = \sum_{j=1}^n [d\gamma_{(j)}]^2, \quad (\varepsilon_{ij} = \pm \pi/2)$$

где  $d\gamma_{(j)}$  – ортопроекция  $d\gamma$  на  $j$ -ю ось ортогональных координат  $\tilde{E}_m^{(3)}$ ; и ортопроекции  $d\gamma$  условно в  $\tilde{E}_m^{(3)}$  с учётом (135А) и (137А) относительно  $\mathbf{e}_\alpha$ :

$$\overline{d\gamma} = d\gamma \cdot \mathbf{e}_\beta = d\gamma \cdot \mathbf{e}_\alpha + d\gamma \cdot \mathbf{e}_\eta, \rightarrow (\mathbf{g} = c^2 d\gamma/ct = g \cdot \mathbf{e}_\beta = \overline{g} \cdot \mathbf{e}_\alpha + \frac{1}{g} \cdot \mathbf{e}_\eta) \quad (145А)$$

$$(d\gamma)^2 = \overline{(d\gamma)}^2 + (\frac{1}{d\gamma})^2 = (\cos \varepsilon \cdot d\gamma)^2 + (\sin \varepsilon \cdot d\gamma)^2, \quad g^2 = \overline{g}^2 + \frac{1}{g^2} = (\cos \varepsilon \cdot g)^2 + (\sin \varepsilon \cdot g)^2,$$

где  $\overline{d\gamma}$  и  $\frac{1}{d\gamma}$  – ортопроекции  $d\gamma$  в *мгновенном декартовом суббазисе*  $\tilde{E}_m^{(2)} \equiv \{\mathbf{e}_\alpha, \mathbf{e}_\eta\}$ , задаваемом в точке М гиперблоида на плоскости  $\langle \mathcal{E}^2 \rangle^{(m)}$ . Разложения (145А) следуют непосредственно из формул (124А) и (135А), если положить:  $\gamma_{12} = \mathbf{0}$ ,  $\gamma_{23} = d\gamma$  (физически:  $\mathbf{v}_{12} = \mathbf{v}_0^{(m)} = \mathbf{0}$  и  $\mathbf{v}_{23} = d\mathbf{v}^{(m)}$ );  $d\gamma$  и *внутреннее ускорение*  $\mathbf{g}$  тут пространству подобны, см. (80А), (81А)! Имеется изоморфизм между родственными геометрическими объектами (прямые, окружности, предельные окружности, сферы и т.д.) в пространстве Лобачевского – Больяи, на псевдосфере (в малом) и на гиперблоидах Минковского II и I (в малом), и на проективных моделях – см. также в [43].

В частности, для рассмотренной *аберрации* ( $\mathbf{th} \gamma_{13} = \mathbf{e}_\sigma$ ,  $\mathbf{th} \bar{\gamma}_{13} = \mathbf{e}_\sigma = \mathbf{e}_\beta$ ) вычислим косинус угла ортосферического сдвига с учётом (138А, 359):

$$\cos \theta_{13} = \mathbf{e}'_\sigma \cdot \mathbf{e}_\sigma = 1 - \frac{(1 - \operatorname{sech} \gamma_{12}) \cdot \sin^2 \beta_1}{1 \pm \cos \beta_1 \cdot \operatorname{th} \gamma_{12}}, \quad (\beta_1 = \pi/2 \rightarrow \sin \theta_{13} = -\operatorname{th} \gamma_{12}).$$

Вместе с тем  $\theta_{13}$  – есть также дефект геодезического треугольника, образуемого на единичном гиперboloиде II Минковского векторами:  $\gamma_{12}$ , вызванным движением Звезды относительно Земли (в обратную сторону её орбитальному движению);  $\gamma_{23}$ , вызванным движением света от Звезды к земному наблюдателю по направлению  $\mathbf{e}_\beta$  и гиперболической суммой  $\gamma_{13}$  с её направлением  $\mathbf{e}_\sigma$ . После смены порядка векторов треугольника на противоположный, получаем в итоге изменение их гиперболической суммы путём её ротации на угол  $-\theta_{13}$ . В течение полугода  $\mathbf{e}_\alpha$  изменяет знак на противоположный, что отвечает  $\cos \alpha_1 = \pm 1 \rightarrow \cos \varepsilon = \pm \cos \beta_1$ . Угол ортосферического сдвига, как отмечалось выше, относится только к ротации евклидовой плоскости  $\langle \mathcal{E}^2 \rangle$ , заданной  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{c}$ .

Релятивистские формулы **эффекта Доплера** для частоты света [37, с. 39] имеют простые гиперболические аналоги. Они получаются тригонометрически с применением тангенс-тангенсной аналогии в  $\tilde{E}_1$  (§ 6.4):

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{c} \tau = \mathbf{v}^{(1)} \cdot \Delta \mathbf{c} t^{(1)} = \mathbf{v}^{(1)} \cdot \{ \mathbf{c} t^{(1)} \cdot [1 - \cos \alpha \cdot \operatorname{tg} \varphi_R(\gamma)] \} \equiv \mathbf{v}^{(1)} \cdot \mathbf{c} t \cdot \operatorname{ch} \gamma (1 - \cos \alpha \cdot \operatorname{th} \gamma),$$

$$\mathbf{v}^{(1)}/\mathbf{v} = \operatorname{sech} \gamma / (1 - \cos \alpha \cdot \operatorname{th} \gamma) = 1 / (\operatorname{ch} \gamma - \cos \alpha \cdot \operatorname{sh} \gamma),$$

где  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{v}^{(1)}$  – частота света движущегося источника и его же частота, воспринимаемая наблюдателем  $\tilde{N}_1$  в исходном универсальном базисе;  $\mathbf{c} \tau$  и  $\mathbf{c} t^{(1)}$  – одновременные интервалы времени с точки зрения  $\tilde{N}_1$ ;  $\Delta \mathbf{c} t^{(1)}$  – продолжительность в  $\tilde{E}_1$  заданного интервала излучения  $\mathbf{c} t$ ;  $\alpha$  – угол между направлением движения источника и лучом света.

Отметим частные случаи.

А) *Продольный встречный эффект*,  $\alpha = 0$ ,  $\cos \alpha = +1$  (источник приближается):  $\mathbf{v}^{(1)}/\mathbf{v} = 1 / (\operatorname{ch} \gamma - \operatorname{sh} \gamma) = \exp \gamma > 1$ . То есть здесь наблюдается “синее смещение” частоты света.

В) *Продольный обратный эффект*,  $\alpha = \pi$ ,  $\cos \alpha = -1$  (источник удаляется):  $\mathbf{v}^{(1)}/\mathbf{v} = 1 / (\operatorname{ch} \gamma + \operatorname{sh} \gamma) = \exp(-\gamma) < 1$ . То есть здесь наблюдается “красное смещение” частоты света.

С) *Поперечный эффект*,  $\alpha = \pm \pi/2$ ,  $\cos \alpha = 0$ :  $\mathbf{v}^{(1)}/\mathbf{v} = \operatorname{sech} \gamma$ . То есть здесь наблюдается меньшее “красное смещение” частоты света, вследствие обычного эйнштейнова замедления времени в относительно движущемся источнике света.

Далее рассмотрим *внешнюю* векторную тригонометрию единичных гиперboloидов Минковского II и I. (Скалярная на плоскости – в § 6.4.)

\* \* \*

Гиперboloид II (рис. 4,  $R = i$ ), например, и  $R = ic$  – 4-скорость Пуанкаре.

$$\mathbf{i}_k = \frac{\text{sh } \gamma}{\text{ch } \gamma} = \frac{\text{sh } \gamma \cdot \mathbf{e}_\alpha}{\text{ch } \gamma} \quad \text{при } \Delta ct > 0: \gamma > 0, \quad \mathbf{i}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (146A)$$

–  $4 \times 1$  псевдоединичный радиус-вектор точки гиперboloида II в  $\tilde{E}_1$ . Тригонометрический времени подобный инвариант имеет вид:

$$\mathbf{i}_k' \cdot \mathbf{1}^{\oplus} \cdot \mathbf{i}_k = \mathbf{sh}' \gamma_{1k} \cdot \mathbf{sh} \gamma_{1k} - \text{ch}^2 \gamma_{1k} = \text{sh}^2 \gamma_{1k} \cdot \mathbf{e}_\alpha' \mathbf{e}_\alpha - \text{ch}^2 \gamma_{1k} = -1 = i^2. \quad (147A)$$

$\mathbf{sh} \gamma_{1k}$  – векторная  $3 \times 1$  ортопроекция  $\mathbf{i}_k$  на  $\langle \mathcal{E}^3 \rangle^{(1)}$  параллельно  $\vec{ct}^{(1)}$ ,  
 $\text{ch} \gamma_{1k}$  – скалярная  $1 \times 1$  ортопроекция  $\mathbf{i}_k$  на  $\vec{ct}^{(1)}$  параллельно  $\langle \mathcal{E}^3 \rangle^{(1)}$ .

Остальные существенные здесь тригонометрические функции:

$\mathbf{th} \gamma_{1k}$  – перекрёстная  $3 \times 1$  ортопроекция  $\mathbf{i}_k$  на  $\langle \mathcal{E}^3 \rangle^{(1)}$  параллельно  $\vec{ct}^{(k)}$ ,  
 $\text{sech} \gamma_{1k}$  – перекрёстная  $1 \times 1$  ортопроекция  $\mathbf{i}_k$  на  $\vec{ct}^{(1)}$  параллельно  $\langle \mathcal{E}^3 \rangle^{(k)}$ .

Гиперболическое преобразование (движение) какого-либо *точечного элемента*  $\mathbf{i}_2 \rightarrow \mathbf{i}_3$  единичного гиперboloида II в активной форме в  $\tilde{E}_1$  и  $\tilde{E}_2$  наглядно представляется в обратной последовательности  $\mathbf{i}_3 \rightarrow \mathbf{i}_2$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{i}_3 & \quad \mathbf{i}_1 & \quad \mathbf{i}_1 \\ \frac{\text{sh } \gamma_{13} \cdot \mathbf{e}_\sigma}{\text{ch } \gamma_{13}} &= \text{roth } \Gamma_{13} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \end{bmatrix} = \text{roth } \Gamma_{13} \cdot \text{rot } \Theta_{13} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \end{bmatrix} = & (148A) \\ & \mathbf{i}_1 & \quad \mathbf{i}_1 \\ & \text{roth } \Gamma_{12} \cdot \text{roth } \Gamma_{23} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \end{bmatrix} = \{ \text{roth } \Gamma_{12} \cdot \text{roth } \Gamma_{23} \cdot \text{roth}^{-1} \Gamma_{12} \}_{\tilde{E}_2} \cdot \text{roth } \Gamma_{12} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \end{bmatrix} = \\ & \mathbf{i}_1 & \quad \mathbf{i}_2 \\ & \{ \text{roth } \Gamma_{23} \}_{\tilde{E}_2} \cdot \text{roth } \Gamma_{12} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \end{bmatrix} = \{ \text{roth } \Gamma_{23} \}_{\tilde{E}_2} \cdot \begin{bmatrix} \text{sh } \gamma_{12} \cdot \mathbf{e}_\alpha \\ \text{ch } \gamma_{12} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

(“Через две точки проводится геодезическая, причём одна.” – решение!)

Траектория гиперболического (геодезического) движения  $\mathbf{i}_2 \rightarrow \mathbf{i}_3$  принадлежит сечению гиперboloида II псевдоплоскостью ротации матрицы  $\{ \text{roth } \Gamma_{12} \cdot \text{roth } \Gamma_{23} \cdot \text{roth}^{-1} \Gamma_{12} \}_{\tilde{E}_2}$ . Аналитически она производится при непрерывном преобразовании  $\mathbf{i} \rightarrow (\mathbf{i} + d\mathbf{i})$  путём изменения в матрице  $\{ \text{roth } \Gamma_{23} \}_{\tilde{E}_2}$  значения скалярного угла от 0 до  $\gamma_{23}$  при  $\mathbf{e}_\beta = \text{const}$ . В модели Клейна внутри абсолюта, или тангенсной модели эта траектория отображается и реализуется прямолинейным отрезком  $\mathbf{th} \gamma_{23}$ . На гиперboloидае II нетрудно реализовать гиперболический треугольник:  $\text{roth } \Gamma_{12} \cdot \mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2 \rightarrow \{ \text{roth } \Gamma_{12} \cdot \text{roth } \Gamma_{23} \cdot \text{roth}^{-1} \Gamma_{12} \}_{\tilde{E}_2} \cdot \mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_3 \rightarrow \{ \text{roth } \Gamma_{31} \}_{\tilde{E}_3} \cdot \mathbf{u}_3 = \mathbf{u}_1$  – учтя полярное разложение (111A). Причём  $\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3 \rangle$  трансформируется в произвольный треугольник активным преобразованием координат в  $\tilde{E}_1$ . При построении *неточечного* линейного треугольника 3-е (последнее) движение даёт результат  $\{ \text{rot } \Gamma_{31} \}_{\tilde{E}_3} \cdot A_3 = \{ \text{rot } (-\Gamma_{13}) \}_{\tilde{E}_3} \cdot A_3 = \text{rot } \Theta_{13} \cdot A_1$ !

Гиперboloид I (рис. 4,  $R = \pm 1$ ), например, и  $R = c$  – 4-антискорость, или для гиперболического движения (гл. 5A, 6A),  $R(ct) = R = \text{const}$ .

$$\mathbf{j}_2 = \begin{pmatrix} \text{ch } \gamma \\ \text{sh } \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{ch } \gamma \cdot \mathbf{e}_\alpha \\ \text{sh } \gamma \end{pmatrix} \text{ при } \Delta ct > 0: \gamma > 0, \quad \mathbf{j}_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_\alpha \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (149A)$$

–  $4 \times 1$  единичный радиус-вектор точки гиперboloида I в  $\langle P^{n+1} \rangle$ .

Тригонометрический пространству подобный инвариант имеет 2 формы:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{j}' \cdot I^{\oplus} \cdot \mathbf{j} &= \mathbf{ch}' \gamma \cdot \mathbf{ch} \gamma - \text{sh}^2 \gamma = \text{ch}^2 \gamma \cdot \mathbf{e}_\alpha' \cdot \mathbf{e}_\alpha - \text{sh}^2 \gamma = +1 = 1^2, \\ \mathbf{j}' \cdot I^{\oplus} \cdot \mathbf{j} &= \mathbf{cth}' \lambda \cdot \mathbf{cth} \lambda - \text{csch}^2 \lambda = \text{cth}^2 \lambda \cdot \mathbf{e}_\alpha' \cdot \mathbf{e}_\alpha - \text{csch}^2 \lambda = +1 = 1^2 \end{aligned} \right\} (150A)$$

$\mathbf{ch} \gamma_{1k}$  – векторная  $3 \times 1$  ортопроекция  $\mathbf{j}_k$  на  $\langle \mathcal{E}^{3,(1)} \rangle$  параллельно  $\text{ct}^{(1)}$ ,

$\text{sh} \gamma_{1k}$  – скалярная  $1 \times 1$  ортопроекция  $\mathbf{j}_k$  на  $\text{ct}^{(1)}$  параллельно  $\langle \mathcal{E}^{3,(1)} \rangle$ ;

$\mathbf{cth} \gamma_{1k}$  – перекрёстная  $3 \times 1$  ортопроекция  $\mathbf{j}_k$  на  $\langle \mathcal{E}^{3,(1)} \rangle$  параллельно  $\text{ct}^{(k)}$ ,

$\text{cosech} \gamma_{1k}$  – перекрёстная  $1 \times 1$  ортопроекция  $\mathbf{j}_k$  на  $\text{ct}^{(1)}$  параллельно  $\langle \mathcal{E}^{3,(k)} \rangle$ .

Причём, согласно формулам псевдоевклидовой тригонометрии (358), на гиперboloиде I имеем  $\mathbf{cth} \lambda_{1k} = \mathbf{ch} \gamma_{1k}$ ,  $\text{cosech} \lambda_{1k} = \text{sh} \gamma_{1k}$ , что строго трактует геометрическую связь углов как на рис. 4, так и поясняет, что эти 2 проекции вместе представимы и как перекрёстные, и как обычные ортогональные. В (150) мы имеем два псевдоевклидовых инварианта относительно I. Как ротациям, им соответствуют 2 матрицы-функции:

$$\overline{\text{roth}} \Gamma = \begin{pmatrix} \text{cth } \gamma \cdot \overleftarrow{\mathbf{e}}_\sigma \cdot \mathbf{e}'_\sigma + \overrightarrow{\mathbf{e}}_\sigma \cdot \mathbf{e}'_\sigma & \text{csch } \gamma \cdot \mathbf{e}_\sigma \\ \text{csch } \gamma \cdot \mathbf{e}'_\sigma & \text{cth } \gamma \end{pmatrix}, \quad \text{roth } \Gamma = \begin{pmatrix} \text{ch } \gamma \cdot \overleftarrow{\mathbf{e}}_\sigma \cdot \mathbf{e}'_\sigma + \overrightarrow{\mathbf{e}}_\sigma \cdot \mathbf{e}'_\sigma & \text{sh } \gamma \cdot \mathbf{e}_\sigma \\ \text{sh } \gamma \cdot \mathbf{e}'_\sigma & \text{ch } \gamma \end{pmatrix}.$$

2-я матрица, как (31A), гл. 2A, поворачивает вектор в  $\langle P^{1+1} \rangle$  на угол  $\gamma$ , но

1-я матрица поворачивает вектор в  $\langle P^{n+1} \rangle$  на дополнительный угол  $\lambda$ !

Как в 1-й, так и во 2-й, углы можно поменять местами согласно  $I^{\oplus}$ . См. аналогичные два типа сферических ротаций в конце § 5.8 для  $\phi$  и  $\xi$ .

Первая ротация реализуется нагляднее в цилиндрической модели геометрии, вторая ротация в плоской модели вне абсолюта Кэли (рис. 4). Отличие в том, что для гиперboloида I как бы роль стрелы времени выполняет вектор, симметричный относительно изотропного конуса. Гиперболическое движение точечного элемента  $\mathbf{j}_2 \rightarrow \mathbf{j}_3$  на единичном гиперboloиде I в активной форме в  $\hat{E}_1$  представляется в виде:

$$\mathbf{j}_3 = \begin{pmatrix} \text{ch } \gamma_{13} \cdot \mathbf{e}_\alpha \\ \text{sh } \gamma_{13} \end{pmatrix} = \{ \text{roth } \Gamma_{12} \cdot (\text{roth } \Gamma_{2 \rightarrow 3})_{\hat{E}_1} \cdot \text{roth}^{-1} \Gamma_{12} \}_{\hat{E}_2} \cdot \text{roth } \Gamma_{12} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{j}_2 \\ \text{ch } \gamma_{12} \cdot \mathbf{e}_\alpha \\ \text{sh } \gamma_{12} \end{pmatrix}. \quad (151A)$$

Движение  $\text{roth } \Gamma_{2 \rightarrow 3}$  реализуется тогда и только тогда, когда котангенсные проекции элементов  $\mathbf{j}_2$  и  $\mathbf{j}_3$  в модели Клейна вне абсолюта можно соединить прямолинейным отрезком  $\mathbf{cth} \gamma_{23}$ , не пересекая и не касаясь овального абсолюта *внутри отрезка* (рис. 4).

\* \* \*

Далее, используя ротационную псевдоевклидову тригонометрию и её матричный аппарат для преобразований в  $\langle P^{n+1} \rangle$  и в  $\langle P^{3+1} \rangle \equiv \langle \mathcal{E}^3 \oplus \overleftarrow{ct} \rangle$  (§ 11.3. и § 11.4., а также этой главы), установим в самом общем виде теоретически и практически реализуемый алгоритм вычисления основных определяющих характеристик геометрической суммы многоступенчатого движения в этих пространствах – в скалярной, векторной и тензорной формах. Что равнозначно, это позволяет установить в тех же формах и также в общем виде закон суммирования многоступенчатых движений в гиперболическом неевклидовом пространстве и, в частности, общий закон суммирования скоростей в СТО. Как исходные, применяются формулы и правила для активного преобразования начального базиса и элементов пространства в начальном базисе в процессе реализации многоступенчатого движения – (485) и (489). Для финального вывода характеристик суммы движений применяется полярное представление, согласно формулам (474)–(476) и (111А)–(120А). Матрица однородного преобразования Лоренца выражается в этом случае общей формулой:

$$\tilde{E}_t = \text{roth } \Gamma_{12} \cdot \text{roth } \Gamma_{23} \cdot \dots \cdot \text{roth } \Gamma_{(t-1)t} \cdot \tilde{E}_1 = T_{1t} \cdot \tilde{E}_1, \quad (152A)$$

причём  $T_{1t} = \text{roth } \Gamma_{1t} \cdot \text{rot } \Theta_{1t} = \text{rot } \Theta_{1t} \cdot \text{roth } \overleftarrow{\Gamma}_{1t}$  (полярное представление)

$$(\text{roth } \Gamma = \text{roth}' \Gamma, \text{roth } (-\Gamma) = \text{roth}^{-1} \Gamma; \text{rot } (-\Theta) = \text{rot}' \Theta = \text{rot}^{-1} \Theta),$$

$$\text{roth}^2 \Gamma_{1t} = T_{1t} \cdot T_{1t}' = \text{roth } 2\Gamma_{1t} \quad (\text{roth}^2 \overleftarrow{\Gamma}_{1t} = T_{1t}' \cdot T_{1t} = \text{roth } 2\overleftarrow{\Gamma}_{1t}),$$

$$\text{roth } \overleftarrow{\Gamma}_{1t} = \text{rot}' \Theta_{1t} \cdot \text{roth } \Gamma_{1t} \cdot \text{rot } \Theta_{1t} = \text{rot } (-\Theta_{1t}) \cdot \text{roth } \Gamma_{1t} \cdot \text{rot } \Theta_{1t},$$

$$\text{rot } \Theta_{1t} = \text{roth}^{-1} \Gamma_{1t} \cdot T_{1t} = \text{roth } (-\Gamma_{1t}) \cdot T_{1t} = \text{roth } \Gamma_{1t} \cdot T_{1t} \text{ (дефект ротации!)}$$

$e_\sigma$  и  $e_\sigma$  – вектор направляющих косинусов в структурах (363) для  $\Gamma$  и  $\overleftarrow{\Gamma}$ .

$\cos \theta_{1t} = e_\sigma' \cdot e_\sigma = (\text{tr rot } \Theta_{1t} - 2)/(n-1)$  для  $\langle P^{n+1} \rangle$ , согласно (497) и (120А), – косинусная форма скалярного угла ортосферической ротации в канонической структуре (497) и в общей структуре (110А); полезно будет ниже  $e_1' \cdot e_2 = \cos \varphi_{12}$ ,  $e_1 \cdot e_2' = \cos \varphi_{12}$ ,  $e_1' \cdot e_2' = \sec \varphi_{12} \cdot e_1 \cdot e_2$  – частный случай (196).

Матрицы  $\text{roth } \Gamma_{1t}$  и  $\text{rot } \Theta_{1t}$  вычисляют в их канонических структурах. Кроме того, для вычисления лоренцева сокращения с использованием угла  $\Gamma_{1t}$  для суммарного движения может применяться деформационная гиперболическая матрица в канонических структурах (364), (365), в том числе для объектов главы 4А. Хотя тангенс (скорость) и секанс (релятивистский фактор) вычисляются сразу из синуса и косинуса в  $\Gamma_{1t}$ . (Если же соседние  $\text{roth } \Gamma_{ii}$  коллинеарны, то их группируют.) Имеем преобразования Лоренца в  $\tilde{E}_1$  в полярной и канонической форме (154А):

$$T = \text{roth } \Gamma \cdot \text{rot } \Theta = \text{rot } \Theta \cdot \text{roth } \overleftarrow{\Gamma} = \text{roth } \Gamma_{12} \dots \text{roth } \Gamma_{(t-1)t} \quad (153A, 154A)$$

$$= \begin{array}{|c|c|} \hline \text{ch } \gamma \cdot \overleftarrow{\mathbf{e}}_{\sigma} \mathbf{e}'_{\sigma} + \mathbf{e}_{\sigma} \overrightarrow{\mathbf{e}}'_{\sigma} & \text{sh } \gamma \cdot \mathbf{e}_{\sigma} \\ \hline \text{sh } \gamma \cdot \mathbf{e}'_{\sigma} & \text{ch } \gamma \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|c|} \hline \text{rot } \Theta_{3 \times 3} & \mathbf{o} \\ \hline \mathbf{o}' & 1 \\ \hline \end{array} =$$

$$= \begin{array}{|c|c|} \hline \text{rot } \Theta_{3 \times 3} & \mathbf{o} \\ \hline \mathbf{o}' & 1 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|c|} \hline \overleftarrow{\mathbf{e}}_{\sigma} \mathbf{e}'_{\sigma} + \mathbf{e}_{\sigma} \overrightarrow{\mathbf{e}}'_{\sigma} & \text{sh } \gamma \cdot \mathbf{e}_{\sigma} \\ \hline \text{sh } \gamma \cdot \mathbf{e}'_{\sigma} & \text{ch } \gamma \\ \hline \end{array} =$$

$$= \begin{array}{|c|c|} \hline (\text{ch } \gamma - 1) \cdot \mathbf{e}_{\sigma} \mathbf{e}'_{\sigma} + \text{rot } \Theta_{3 \times 3} & \text{sh } \gamma \cdot \mathbf{e}_{\sigma} \\ \hline (\mathbf{e}_{\sigma} \cdot \mathbf{e}'_{\sigma} = \cos \theta_{13} \cdot \overleftarrow{\mathbf{e}}_{\sigma} \overrightarrow{\mathbf{e}}'_{\sigma}) & \\ \hline \text{sh } \gamma \cdot \mathbf{e}'_{\sigma} & \text{ch } \gamma \\ \hline \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} \text{(Генеральный закон суммирования} \\ \text{движений в гиперболической и} \\ \text{псевдоевклидовой геометрии и СТО!)} \end{array} \right\}$$

Матрица суммарного движения  $T$  (от частных матриц в канонической форме!) содержит угловой и крайние элементы  $\text{roth } \Gamma$  ( $s_{44}$  и  $s_{4k}$ ). Далее они дают возможность выразить её в канонической форме, а также сразу вычислить скалярные и векторные тригонометрические функции угла суммарного движения и его направляющий вектор (как единичный!). Матрица  $\text{rot } \Theta$  вычисляется, например, с последовательным применением формул (498), (499) и тоже в канонической форме (497). В итоге имеем:

$$\left. \begin{array}{l} \text{ch } \gamma = s_{nn}; \quad \text{sh } \gamma = + \sqrt{s_{nn}^2 - 1} = \|\text{sh } \gamma \cdot \mathbf{e}_{\sigma}\| > 0, \quad \text{th } \gamma = \text{sh } \gamma / \text{ch } \gamma = v/c \quad (n=3); \\ \cos \sigma_k = s_{kn} / \text{sh } \gamma, \quad \cos \bar{\sigma}_k = s_{nk} / \text{sh } \gamma, \quad \text{th } \gamma_k = s_{kn} / s_{nn} = \cos \sigma_k \cdot \text{th } \gamma = v_k / c; \\ \cos \theta_{13} = \mathbf{e}_{\sigma} \cdot \mathbf{e}'_{\sigma} = \mathbf{e}'_{\sigma} \cdot \mathbf{e}_{\sigma} = 0,5 \text{ tr rot } \Theta - 1, \quad \vec{\mathbf{r}}_N = \mathbf{e}_{\sigma} \otimes \mathbf{e}_{\sigma} = \sin \theta \cdot \vec{\mathbf{e}}_N. \end{array} \right\} \quad (155A)$$

Значение  $\sin \theta$  со знаком в  $\langle P^{3+1} \rangle$  (при  $n=3$ ) даёт (499). При любом  $n$  скалярные параметры итогового главного движения  $\text{roth } \Gamma$  не изменяются при зеркальной перестановке частных движений. Зеркальная перестановка вызывает *транспонирование матрицы* суммы движений  $T$  в базисе  $\vec{\mathbf{E}}_1 = \{I\}$ . Теперь можно вернуться к суммированию 2-х ступенчатых движений и убедиться, но по (154A), в верности полученных вначале формул и подхода с полярным представлением! Например, суммарная формула (154A) наглядно подтверждает вывод, что в  $\vec{\mathbf{E}}_1$  в главном (первом) полярном представлении в (111A) применение ротаций идёт в последовательности:  $\text{roth } \Gamma$  (основная),  $\text{rot } \Theta$  (ортосферическая)!

Тензорная тригонометрия в изложенном псевдоевклидовом варианте применима к решению задач гиперболической геометрии Лобачевского–Больяи, кинематики и динамики СТО. Она представляет также интерес для изучения геометрических объектов, задаваемых внешним образом.

\* \* \*

Вернёмся к закону суммирования движений в скалярной и векторной тангенсных формах (125А) и (138А). С точки зрения модели Клейна внутри абсолюта (§12.1, рис. 4) в универсальном базисе  $\tilde{E}_1$  суммирование тангенсных проекций начинается из центра проектирования  $O$  – общего центра всех псевдодекартовых базисов  $\tilde{E}$ . Первая тангенсная проекция угла  $\text{th } \gamma_{12}$  евклидово не искажается. Как вектор она исходит из точки  $O$  (рис. 4А). Последующие тангенсные проекции  $\text{th } \gamma_{23}$ ,  $\text{th } \gamma_{34}$ , ... прилагаются в конце предыдущего вектора – в  $\tilde{E}_2$  и так далее. В общем случае в  $\tilde{E}_1^{(3)}$  они евклидово искажаются по длине. Суббазис тангенсов  $\tilde{E}_t^{(3)}$  играет роль *однородных координат*. Согласно ортогональному представлению (125А), (138А), перпендикулярная проекция искажённого вектора  $\text{th } \gamma_{23}$  вычисляется в  $\tilde{E}_t^{(3)}$  в суббазисе  $\tilde{E}_1^{(3)}$  следующим образом:

$$\text{th } \bar{\gamma}_{23}^{\perp} = \frac{\sin \varepsilon \cdot \text{th } \gamma_{23} \cdot \text{sch } \gamma_{12}}{1 + \cos \varepsilon \cdot \text{th } \gamma_{23} \cdot \text{th } \gamma_{12}}. \quad (156A)$$

Соответствующая ей параллельная проекция искажённого вектора  $\text{th } \gamma_{23}$  вычисляется как разность искажённой параллельной проекции в (138А) и её неискажённой части  $\text{th } \gamma_{12}$ : также в  $\tilde{E}_t^{(3)}$ :

$$\text{th } \bar{\gamma}_{23}^{\parallel} = \frac{\cos \varepsilon \cdot \text{th } \gamma_{23} \cdot \text{sch}^2 \gamma_{12}}{1 + \cos \varepsilon \cdot \text{th } \gamma_{23} \cdot \text{th } \gamma_{12}}. \quad (157A)$$

В (156А), (157А) фигурируют три коэффициента искажения:

$1/k_1 = 1 + \cos \varepsilon \cdot \text{th } \gamma_{23} \cdot \text{th } \gamma_{12}$  – коэффициент, вызванный гиперболическим суммированием отрезков  $\gamma_{12}$  и  $\bar{\gamma}_{23}$ ;

$k_2 = \text{sch } \gamma_{12}$  – коэффициент, вызванный релятивистской поправкой на изменение координатного времени в точке  $O'$ , где осуществляется суммирование, при его преобразовании  $t^{(2)} \rightarrow t^{(1)}$ ;

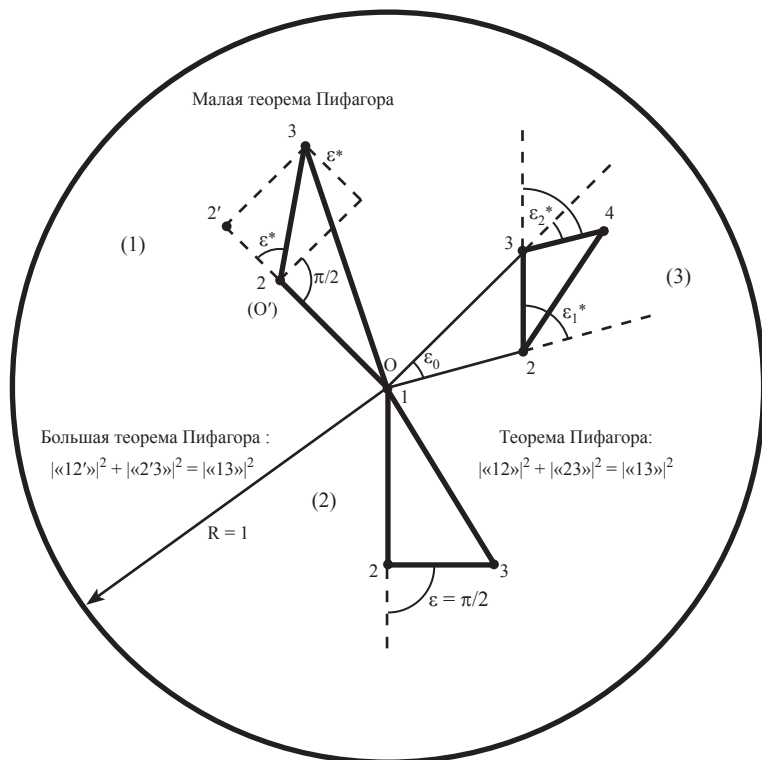
$k_3 = \text{sch } \gamma_{12}$  – коэффициент, вызванный тангенсным *перекрёстным проектированием* в модели Клейна вектора  $\text{th } \gamma_{23} \in \langle \mathcal{E}^3 \rangle^{(2)}$  на  $\langle \mathcal{E}^3 \rangle^{(1)}$  параллельно  $\vec{ct}^{(2)}$  (как в *тождественном* ему лоренцевом сокращении).

В отличие от предыдущих, коэффициент  $k_3$  воздействует только на параллельную проекцию вектора  $\text{th } \gamma_{23}$ . Заметим, что  $\langle \mathcal{E}^3 \rangle^{(2)}$  есть собственное евклидово подпространство с базисом  $\tilde{E}_2 = \text{roth } \Gamma_{12} \cdot \tilde{E}_1$ , где матрица  $\text{roth } \Gamma_{23}$  определяется матрицей (363) с значениями  $\gamma_{23}$  и его  $\mathbf{e}_\beta$ .

В векторной сумме, составляющей  $\text{th } \gamma_{13}$  [рис. 4А (1)], искажается только второй вектор  $\text{th } \gamma_{23}$ . Согласно теореме Пифагора (125А), (138А):

$$\begin{aligned} \text{th } \gamma_{23} &= \text{th } \gamma_{13} - \text{th } \gamma_{12} \rightarrow \text{th}^2 \gamma_{23} = \text{sch } \gamma_{12} \cdot (\cos^2 \varepsilon \cdot \text{sch}^2 \gamma_{12} + \sin^2 \varepsilon) \cdot k_1 \cdot \{\text{th}^2 \gamma_{23}\}_{\tilde{E}_2} = \\ &= \{\text{th}^2 \gamma_{23}\}_{\tilde{E}_1} = \{\text{th}^2 \gamma_{23}\}_{\tilde{E}_1} + \{\text{th}^2 \gamma_{23}^{\perp}\}_{\tilde{E}_1} \quad (\text{то есть в тангенсном базисе } \tilde{E}_t^{(3)}) \end{aligned}$$





**Рис. 4А.** Суммирование двух тангенсных проекций гиперболических отрезков в плоской модели Клейна по теореме о приведении их суммы к биортогональной форме в *тангенсных* (однородных) координатах:

Вариант 1. Централизованный в  $\tilde{E}_t^{(3)}$  треугольник.

$$\langle\langle 12 \rangle\rangle - \mathbf{th} \gamma_{12}, \quad \langle\langle 2'2 \rangle\rangle - \mathbf{th} \bar{\gamma}_{23},$$

$$\langle\langle 23 \rangle\rangle - \mathbf{th} \gamma_{23},$$

$$\langle\langle 13 \rangle\rangle - \mathbf{th} \gamma_{13}, \quad \langle\langle 2'3 \rangle\rangle - \mathbf{th} \perp \gamma_{23}, \quad \varepsilon^* = \pi - A_{123}^*.$$

Вариант 2. Централизованный в  $\tilde{E}_t^{(3)}$  прямоугольный треугольник.

$$\langle\langle 12 \rangle\rangle - \mathbf{th} \gamma_{12}, \quad \langle\langle 23 \rangle\rangle - \mathbf{th} \gamma_{23} \cdot \operatorname{sch} \gamma_{12}, \quad \langle\langle 13 \rangle\rangle - \mathbf{th} \gamma_{13}; \quad \varepsilon = \pi/2 = A_{123}.$$

Вариант 3. Децентрализованный в  $\tilde{E}_t^{(3)}$  треугольник, компланарный с центром O.

$$\langle\langle 23 \rangle\rangle - \mathbf{th} \gamma_{23}, \quad \varepsilon_1^* = \pi - A_{123}^*,$$

$$\langle\langle 34 \rangle\rangle - \mathbf{th} \gamma_{34}, \quad \varepsilon_2^* = \pi - A_{134}^*,$$

$$\langle\langle 24 \rangle\rangle - \mathbf{th} \gamma_{24}, \quad \varepsilon_0 = A_{213}, \quad \rightarrow \quad \varepsilon^* = \pi - A_{234}^* = \varepsilon_1^* + \varepsilon_2^* - \varepsilon_0.$$

Мы имеем и *малую теорему Пифагора* в  $\tilde{E}_2$  – см. рис. 4А(1) и прямоугольный треугольник 22'3 в дополнение к большой теореме в  $\tilde{E}_1$ :

$$\text{th}^2 \gamma_{13} = \text{th}^2 (\gamma_{12} + \bar{\gamma}_{23}) + \text{th}^2 \bar{\gamma}_{23} \quad (\text{в тангенсном базисе } \tilde{E}_t^{(3)}) - \text{см. (138А)}.$$

(Теоремы справедливы и для синусных проекций, но без  $k_3$ , и обе антикоммутативны в неевклидовой и коммутативны в евклидовой геометрии!)

В процессе перекрёстного проецирования начало искажаемого вектора в однородных координатах переносится в точку  $O'$  – конец вектора  $\text{th } \gamma_{12}$  (рис. 4А). Искажённый угол  $\varepsilon^*$  между векторами  $\text{th } \gamma_{12}$  и  $\text{th } \gamma_{23}$  в модели Клейна вычисляется через искажённые проекции  $\text{th } \gamma_{23}$ , согласно формулам евклидовой скалярной тригонометрии в 22'3:

$$\cos \varepsilon^* = \text{th} \bar{\gamma}_{23} / \sqrt{\text{th}^2 \bar{\gamma}_{23} + \text{th}^2 \bar{\gamma}_{23}^{\perp}} = \cos \varepsilon \cdot \text{sch } \gamma_{12} / \sqrt{\cos^2 \varepsilon \cdot \text{sch}^2 \gamma_{12} + \sin^2 \varepsilon} < \cos \varepsilon \quad (158А)$$

(если  $\varepsilon = \pi/2$ , то он не искажается:  $\cos \varepsilon^* = \cos \varepsilon = 0$ ).

В формуле фигурируют коэффициент сокращения времени  $k_2$  для модуля вектора  $\text{th } \gamma_{23}$  в целом и коэффициент перекрёстного проецирования  $k_3$ . Заметим, что в СТО  $\varepsilon^*$  есть *реально искажаемый* в  $\langle \mathcal{E}^3 \rangle^{(1)}$  сферический угол между векторами скоростей  $\mathbf{v}_{12}$  и  $\mathbf{v}_{23}$  (гл. 4А).

В общем случае (рис. 4А(3)) искажённый угол  $\varepsilon^*$  между векторами  $\text{th } \gamma_{23}$  и  $\text{th } \gamma_{34}$  в *плоской* модели Клейна вычисляется через искажённые частные углы  $\varepsilon_1^*$  и  $\varepsilon_2^*$  (между  $\text{th } \gamma_{34}$  и  $\text{th } \gamma_{13}$ ), а также неискажённый центральный угол  $\varepsilon_0$  (между  $\text{th } \gamma_{12}$  и  $\text{th } \gamma_{13}$ ):

$$\varepsilon^* = \varepsilon_1^* + \varepsilon_2^* - \varepsilon_0, \quad (159А)$$

$$\cos \varepsilon_1^* = \cos \varepsilon_1 \cdot \text{sch } \gamma_{12} / \sqrt{\cos^2 \varepsilon_1 \cdot \text{sch}^2 \gamma_{12} + \sin^2 \varepsilon_1},$$

$$\sin \varepsilon_1^* = \sin \varepsilon_1 / \sqrt{\cos^2 \varepsilon_1 \cdot \text{sch}^2 \gamma_{12} + \sin^2 \varepsilon_1},$$

$$\cos \varepsilon_2^* = \cos \varepsilon_2 \cdot \text{sch } \gamma_{13} / \sqrt{\cos^2 \varepsilon_2 \cdot \text{sch}^2 \gamma_{13} + \sin^2 \varepsilon_2},$$

$$\sin \varepsilon_2^* = \sin \varepsilon_2 / \sqrt{\cos^2 \varepsilon_2 \cdot \text{sch}^2 \gamma_{13} + \sin^2 \varepsilon_2},$$

$$\begin{aligned} \cos \varepsilon^* = & [\cos \varepsilon_0 \cdot (\cos \varepsilon_1 \cdot \cos \varepsilon_2 \cdot \text{sch } \gamma_{12} \cdot \text{sch } \gamma_{13} - \sin \varepsilon_1 \cdot \sin \varepsilon_2) + \\ & + \sin \varepsilon_0 \cdot (\sin \varepsilon_1 \cdot \cos \varepsilon_2 \cdot \text{sch } \gamma_{13} + \sin \varepsilon_2 \cdot \cos \varepsilon_1 \cdot \text{sch } \gamma_{12})] / \\ & / (\sqrt{\cos^2 \varepsilon_1 \cdot \text{sch}^2 \gamma_{12} + \sin^2 \varepsilon_1} \cdot \sqrt{\cos^2 \varepsilon_2 \cdot \text{sch}^2 \gamma_{13} + \sin^2 \varepsilon_2}) \end{aligned} \quad (160А)$$

(если  $\cos \varepsilon_1 = \cos \varepsilon_2 = 0$ , то  $\cos \varepsilon = \pm \cos \varepsilon_0$  в зависимости от знаков  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$ ).

В этом случае суммирование векторов  $\text{th } \gamma_{23}$  и  $\text{th } \gamma_{34}$ , компланарных с центром  $O$ , но в исходной точке  $O'$ , реализуется в два его этапа:

1) [12] и [23] под углом  $\varepsilon_1^*$ ; 2) суммирование [13] и [34] под углом  $\varepsilon_2^*$ .

Искажённая проекция [34] вычисляется, как выше [22'] по формуле (156А).

В самом же общем случае суммирование векторов  $\mathbf{th} \gamma_{23}$  и  $\mathbf{th} \gamma_{34}$ , некопланарных с центром  $O$ , в исходной точке  $O'$ , реализуется – см. также рис. 4A(3), то есть в *пространственной* модели Клейна, можно реализовать так. Выберем  $\mathbf{th} \gamma_{13}$  (см. предыдущий вариант) как вектор тангенса 1-го движения (он вычислен с направляющим вектором  $\mathbf{e}_\alpha$ ), и как вектор тангенса следующего (3-го) движения  $\mathbf{th} \gamma_{34}$ , применяя для суммирования те же формулы 2-х ступенчатого движения и вычисляя все искажения длин и углов по тем же формулам (156A)-(160A).

Таким образом, формулы тензорной тригонометрии позволяют нам находить в любых вариантах главных движений на проективной модели Клейна (как в аналогичной ей тангенсной проективной модели) все возникающие искажения геометрических параметров.

Далее мы переходим с применением векторных и скалярных форм гиперболических тригонометрических функций от угла  $\gamma$  (пока в 3-х мерном варианте) к анализу геометрических и физических движений в псевдоевклидовом пространстве и, главным образом, в пространстве-времени Минковского. И в конце обратимся к ортосферической части.

\* \* \*

Кинематика *поступательного* движения материального тела в целом определяется по кинематике материальной точки  $M$  – центра его инерции. Принципиальное отличие релятивистской кинематики материальной точки  $M$  от нерелятивистской видно из её *проективного* представления.

В пространстве-времени Лагранжа  $\langle \mathcal{L}^{3+1} \rangle \equiv \langle \mathcal{E}^3 \oplus \vec{t} \rangle$  дифференциалы расстояний суммируют *геометрически* как принято в  $\langle \mathcal{E}^3 \rangle$ . Имеем в точке  $M$ :

$$\Delta \mathbf{x}^{(1)} = d\mathbf{x}^{(1)} + d^2\mathbf{x}^{(m)}/2! + \dots = d\mathbf{x}^{(1)} \cdot \mathbf{e}_\alpha + d^2\mathbf{x}^{(m)} \cdot \mathbf{e}_\beta / 2! + \dots, \text{ далее } x^{(1)} = \chi;$$

$$d\mathbf{x}^{(1)} = d\chi \cdot \mathbf{e}_\alpha, \quad d^2\mathbf{x}^{(m)} = d^2x^{(m)} \cdot \mathbf{e}_\beta = d^2x^{(m)} \cdot (\cos \varepsilon \cdot \mathbf{e}_\alpha + \sin \varepsilon \cdot \mathbf{e}_\eta) = \overline{d^2\chi} \cdot \mathbf{e}_\alpha + d^{\frac{1}{2}}\chi \cdot \mathbf{e}_\eta \equiv$$

$$\equiv d(d\chi \cdot \mathbf{e}_\alpha) = [\partial d\chi]_\alpha \cdot \mathbf{e}_\alpha + d\chi [\partial \mathbf{e}_\alpha]_{d\chi} = [\partial d\chi]_\alpha \cdot \mathbf{e}_\alpha + d\chi \left\{ \|\partial \mathbf{e}_\alpha\| \cdot \left\| \frac{\partial \mathbf{e}_\alpha}{\partial \chi} \right\| \right\}_{d\chi} =$$

$$= [\partial d\chi]_\alpha \cdot \mathbf{e}_\alpha + d\chi [\partial \alpha]_{d\chi} \cdot \mathbf{e}_\eta \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} [\partial d\chi]_\alpha = \cos \varepsilon d^2x^{(m)} = \overline{d^2\chi}, \\ d\chi [\partial \alpha]_{d\chi} = \sin \varepsilon d^2x^{(m)} = d^{\frac{1}{2}}\chi; \end{cases}$$

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{x}^{(m)}}{dt} = v_0 \cdot \mathbf{e}_\alpha(t_0) + \int_{t_0}^t \mathbf{g}(t) dt;$$

$$\mathbf{g}(t) = \frac{d^2\mathbf{x}^{(m)}}{dt^2} = g(t) \cdot \mathbf{e}_\beta(t) = \frac{\overline{d^2\chi}}{dt^2} \cdot \mathbf{e}_\alpha(t) + \frac{d^{\frac{1}{2}}\chi}{dt^2} \cdot \mathbf{e}_\eta(t) = \overline{g}(t) \cdot \mathbf{e}_\alpha(t) + \frac{1}{g}(t) \cdot \mathbf{e}_\eta(t),$$

$$\overline{\underline{g}}(t) = \cos \varepsilon(t) \cdot \underline{g}(t) = \left[ \frac{\partial d\chi}{dt^2} \right]_{\alpha},$$

$$\perp \underline{g}(t) = \sin \varepsilon(t) \cdot \underline{g}(t) = \frac{d\chi}{dt} \cdot \left[ \frac{d\alpha}{dt} \right]_{dx} = v(t) \cdot w(t) \text{ с теоремой Пифагора для них.}$$

При указанном *биортогональном разложении* движения вектор  $\mathbf{e}_\eta$ , как и ранее, вычисляется, согласно (136А). Вращение  $w(t)$  не изменяет *поступательный* характер движения материального тела в целом.

В пространстве-времени Минковского  $\langle P^{3+1} \rangle \equiv \langle \mathcal{L}^3 \oplus \vec{ct} \rangle$  имеем:

$$\left. \begin{aligned} \Delta \mathbf{x}^{(1)} &\neq d\mathbf{x}^{(1)} + d^2\mathbf{x}^{(m)} / 2! + \dots, \quad d\mathbf{x}^{(1)} = d\chi \cdot \mathbf{e}_\alpha, \quad (\text{где также обозначено } x^{(1)} = \chi) \\ d^2\mathbf{x}^{(m)} &= d^2x^{(m)} \cdot \mathbf{e}_\beta = d^2x^{(m)} \cdot (\cos \varepsilon \cdot \mathbf{e}_\alpha + \sin \varepsilon \cdot \mathbf{e}_\eta) = \overline{\underline{d^2x}}^{(m)} \cdot \mathbf{e}_\alpha + \frac{1}{d^2x} \cdot \mathbf{e}_\eta, \\ d\gamma &= d\gamma \cdot \mathbf{e}_\beta = \cos \varepsilon d\gamma \cdot \mathbf{e}_\alpha + \sin \varepsilon d\gamma \cdot \mathbf{e}_\eta = \overline{\underline{d\gamma}} \cdot \mathbf{e}_\alpha + \frac{1}{d\gamma} \cdot \mathbf{e}_\eta. \end{aligned} \right\} (161A)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{sh } \gamma &= \frac{d\mathbf{x}^{(1)}}{dct} = \frac{d\chi}{dct} \cdot \mathbf{e}_\alpha = \text{sh } \gamma \cdot \mathbf{e}_\alpha, \\ \text{th } \gamma &= \frac{d\mathbf{x}^{(1)}}{dct} = \frac{d\chi}{dct} \cdot \mathbf{e}_\alpha = \text{th } \gamma \cdot \mathbf{e}_\alpha, \end{aligned} \right\} \text{ch } \gamma = \frac{dct}{dct} = \frac{dt}{d\tau} \quad (\text{sh } \gamma = \text{ch } \gamma \cdot \text{th } \gamma).$$

В  $\langle P^{3+1} \rangle$  дифференциалы  $d\mathbf{x}^{(1)}$  и  $d^2\mathbf{x}^{(m)}$  не суммируются, как в  $\langle \mathcal{L}^{3+1} \rangle$ , так как они находятся в различных  $\langle \mathcal{L}^3 \rangle$  и подлежат гиперболическому суммированию через углы движения  $\gamma^{(1)}$  в  $\tilde{E}_1$  и  $d\gamma^{(m)}$  в  $\tilde{E}_m$  (см. выше). При интегральном неколлинеарном движении точечного объекта в общем случае непрерывно изменяются, например в  $\tilde{E}_1$ , характеристический угол  $\gamma = \gamma^{(1)}$  (скаляр) и его  $3 \times 1$  вектор направляющих косинусов  $\mathbf{e}_\alpha = \mathbf{e}_\alpha^{(1)}$ . Параметры исходного и интегрального углов движения представляются в  $\tilde{E}_1$ , в то время как линейное приращение угла  $d\gamma^{(m)}$  (дифференциал) представляется в мгновенном базисе  $\tilde{E}_m$ . При вычислении ортопроекции этого дифференциала в *суббазисе*  $\tilde{E}_m^{(3)}$ , направляющие векторы  $\mathbf{e}_\alpha$  и  $\mathbf{e}_\eta$  выражаются *условно* также как в  $\tilde{E}_1^{(3)}$  (то есть не только  $\mathbf{e}_\beta$ ).

Заметим,  $d^2x^{(m)}$  и  $d\gamma$ , согласно формуле (80А), связаны между собой пропорционально через  $dct$ :  $d^2x^{(m)} = d\gamma dct$  как при  $\mathbf{e}_\alpha = \mathbf{e}_\beta$ , так и для 2-х ортопроекции. Но ортопроекция от  $d\gamma$  уже не чисто гиперболическая.

$$\text{с} \cdot \frac{d\gamma}{d\tau} = \frac{d^2x^{(m)}}{d\tau^2} = g(\tau) - \text{внутреннее ускорение (как скаляр – инвариант).}$$

$$\text{с} \cdot \frac{\overline{\underline{d\gamma}}}{d\tau} = \overline{\underline{g}}(\tau) = \cos \varepsilon \cdot g(\tau) - \text{тангенциальное внутреннее ускорение,}$$

$$\text{с} \cdot \frac{\perp d\gamma}{d\tau} = \perp \underline{g}(\tau) = \sin \varepsilon \cdot g(\tau) - \text{нормальное внутреннее ускорение.}$$

Теорему Пифагора в  $\tilde{E}_m^{(3)}$  имеем, согласно (145А):  $g^2(\tau) = \overline{\underline{g}}^2(\tau) + \perp \underline{g}^2(\tau)$ .

Согласно (119А),  $0 \leq \varepsilon \leq \pi$ . В интервале  $0 \div \pi/2$  косинусные скалярные проекции положительные, а в интервале  $\pi/2 \div \pi$  они отрицательные.

Сначала найдём отдельно изменения тригонометрических функций и пропорциональных им векторных скоростей. Из (122А) для  $\text{ch } \gamma$  следует:

$$\left. \begin{aligned} d \text{ch } \gamma &= \cos \varepsilon \cdot \text{sh } \gamma \, d\gamma = \text{sh } \gamma \, \overline{d\gamma} = \overline{d \text{ch } \gamma} = d \frac{d \text{ct}}{d \text{ct}} = d \frac{d \text{t}}{d \text{t}}, \\ \text{ch } \gamma &= \text{ch } \gamma_0 + \int_{\gamma_0}^{\gamma} \cos \varepsilon \cdot \text{sh } \gamma \, d\gamma = \frac{d \text{ct}}{d \text{ct}} = \frac{d \text{t}}{d \text{t}}. \end{aligned} \right\} \quad (162\text{A})$$

Из (135А) с учётом  $\mathbf{sh } \gamma = \mathbf{v}^*/c$ ,  $\text{sh } \gamma = v^*/c$ ; в  $\langle \mathcal{E}^2 \rangle^{(m)}$  и  $\tilde{E}_1$  следует:

$$\left. \begin{aligned} d \mathbf{sh } \gamma &= d \text{sh } \gamma \cdot \mathbf{e}_\sigma = \text{ch } \gamma \cdot (\cos \varepsilon \, d\gamma) \cdot \mathbf{e}_\alpha + (\sin \varepsilon \, d\gamma) \cdot \mathbf{e}_\eta = \text{ch } \gamma \, \overline{d\gamma} \cdot \mathbf{e}_\alpha + \frac{1}{d\gamma} \cdot \mathbf{e}_\eta \\ |d \mathbf{sh } \gamma|^2 &= \text{ch}^2 \gamma \cdot (\cos \varepsilon \, d\gamma)^2 + (\sin \varepsilon \, d\gamma)^2 = \text{ch}^2 \gamma \, \overline{d\gamma}^2 + \frac{1}{d\gamma}^2 = \text{ch}^2 \gamma \, \partial \xi_\gamma^2 + \partial \eta_\gamma^2, \\ \mathbf{sh } \gamma &= \text{sh } \gamma \cdot \mathbf{e}_\alpha = \mathbf{sh } \gamma_0 + \int_{\gamma_0}^{\gamma} [\cos \varepsilon \cdot \text{ch } \gamma \, d\gamma \cdot \mathbf{e}_\alpha + \sin \varepsilon \, d\gamma \cdot \mathbf{e}_\eta]. \end{aligned} \right\} \quad (163\text{A})$$

Из (157А), (158А), с учётом  $\mathbf{th } \gamma = \mathbf{v}/c$ ,  $\text{th } \gamma = v/c$ , в  $\langle \mathcal{E}^2 \rangle^{(m)}$  и  $\tilde{E}_m$  следует:

$$\left. \begin{aligned} d \mathbf{th } \gamma &= d (\text{th } \gamma \cdot \mathbf{e}_\alpha) = \text{sech}^2 \gamma \cdot (\cos \varepsilon \, d\gamma) \cdot \mathbf{e}_\alpha + \text{sech } \gamma \cdot (\sin \varepsilon \, d\gamma) \cdot \mathbf{e}_\eta, \\ |d \mathbf{th } \gamma|^2 &= \text{sech}^4 \gamma \cdot (\cos \varepsilon \, d\gamma)^2 + \text{sech}^2 \gamma \cdot (\sin \varepsilon \, d\gamma)^2 \equiv \cos^2 \varphi [\cos \varepsilon \, d\varphi(\gamma)]^2 + [\sin \varepsilon \, d\varphi(\gamma)]^2 = \\ &= \cos^2 \varphi(\gamma) \, \overline{d\varphi(\gamma)}^2 + \frac{1}{d\varphi(\gamma)}^2 \equiv \cos^2 \varphi(\gamma) \, \partial \xi_{\varphi(\gamma)}^2 + \partial \eta_{\varphi(\gamma)}^2 < 1, \\ \mathbf{th } \gamma &= \text{th } \gamma \cdot \mathbf{e}_\alpha = \mathbf{th } \gamma_0 + \int_{\gamma_0}^{\gamma} [\cos \varepsilon \cdot \text{sech}^2 \gamma \, d\gamma \cdot \mathbf{e}_\alpha + \sin \varepsilon \cdot \text{sech } \gamma \, d\gamma \cdot \mathbf{e}_\eta]. \end{aligned} \right\} \quad (164\text{A})$$

В (163А)  $\xi$  и  $\eta$  – нормальные полугеодезические координаты для  $\gamma$  на гиперboloиде движений  $\Pi (R=1)$ ;  $\gamma(\varphi) \leftrightarrow \varphi(\gamma)$  – угол параллельности (26А).

$\xi_\gamma$  и  $\eta_\gamma$  тут имеют псевдоевклидову меру в его внутренней геометрии (§ 12).

Гиперболический угол  $\gamma$  и направляющие векторы являются функциями параметра движения, например  $\tau$  или  $t$ ; но  $\varphi(\gamma)$  только транслятор  $\gamma \rightarrow \varphi$ . Т. е. в  $\tilde{E}_m$  проявилась сферическо-гиперболическая аналогия, позволяющая придать эту аналогию квадратичной форме движений в сферической и гиперболической геометриях на гиперсфереоиде и гиперboloиде (рис. 4)!

Собственная векторная скорость материальной точки выражается из (163А) также как синусная проекция на проективную « $\mathcal{E}^n$ »:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}^*(\tau) &= c \cdot \mathbf{sh } \gamma = v^*(\tau) \cdot \mathbf{e}_\alpha(\tau) = v_0^* \cdot \mathbf{e}_\alpha(\tau_0) + c \cdot \int_{\tau_0}^{\tau} \cos \varepsilon(\tau) \cdot \text{ch } \gamma(\tau) \cdot \frac{d\gamma}{d\tau} \, d\tau \cdot \mathbf{e}_\alpha(\tau) + \\ &+ c \cdot \int_{\tau_0}^{\tau} \sin \varepsilon(\tau) \cdot \frac{d\gamma}{d\tau} \, d\tau \cdot \mathbf{e}_\eta(\tau) = \\ &= v_0^* \cdot \mathbf{e}_\alpha(\tau_0) + c \cdot \int_{\tau_0}^{\tau} \text{ch } \gamma(\tau) \cdot \frac{\overline{d\gamma}}{d\tau} \, d\tau \cdot \mathbf{e}_\alpha(\tau) + c \cdot \int_{\tau_0}^{\tau} \frac{1}{d\tau} \, d\tau \cdot \mathbf{e}_\eta(\tau) = \\ &= v_0^* \cdot \mathbf{e}_\alpha(\tau_0) + \int_{\tau_0}^{\tau} \text{ch } \gamma(\tau) \cdot \overline{\mathbf{g}}(\tau) \, d\tau \cdot \mathbf{e}_\alpha(\tau) + \int_{\tau_0}^{\tau} \frac{1}{\mathbf{g}}(\tau) \, d\tau \cdot \mathbf{e}_\eta(\tau), \end{aligned} \quad (165\text{A})$$

где:  $\text{ch } \gamma(\tau) \cdot \overline{\underline{\underline{g}}}(\tau) = \frac{\overline{\underline{\underline{d}}}\underline{\underline{v}}^*}{d\tau} = \overline{\underline{\underline{g}}}^*(\tau)$  – тангенциальное собственное ускорение, обобщающее (82А); то есть оно больше внутреннего, как и координата  $\chi$ ,  
 $\frac{\perp}{\underline{\underline{g}}}(\tau) = \frac{\perp}{\underline{\underline{d}}}\underline{\underline{v}}^* = \frac{\perp}{\underline{\underline{g}}}(\tau) = v^*(\tau) \cdot w^*(\tau)$  – нормальная проекция собственного и внутреннего ускорений. Но как характеристики  $\overline{\underline{\underline{g}}}$  и  $\frac{\perp}{\underline{\underline{g}}}$ , так и  $\frac{\overline{\underline{\underline{d}}}\underline{\underline{v}}^*}{d\tau}$  и  $\frac{\perp}{\underline{\underline{d}}}\underline{\underline{v}}^*$ , согласно (145А) и (163А), следуют теоремам Пифагора. Параллельная собственная скорость геометрически представляется в квазидекартовых координатах в  $\langle \mathcal{E}^{3+1} \rangle$  через тангенс сферического угла наклона мировой линии относительно  $\overrightarrow{ct}$  (гл. 5А) или в псевдодекартовых координатах в  $\langle P^{3+1} \rangle$  через синус гиперболического угла наклона мировой линии по отношению к  $\overrightarrow{ct}^{(1)}$  (см. рис. 2А).

*Координатная векторная скорость* материальной точки выражается из (164А) как *тангенсная проекция* на проективную  $\langle \mathcal{E}^3 \rangle$ :

$$\begin{aligned} v(t) &= c \cdot \mathbf{th} \gamma = v(t) \cdot \mathbf{e}_a(t) = v_0 \cdot \mathbf{e}_a(t_0) + c \cdot \int_{t_0}^t \cos \varepsilon(t) \cdot \text{sch}^2 \gamma(t) \cdot \frac{d\gamma}{dt} dt \cdot \mathbf{e}_a(t) + \\ &+ c \cdot \int_{t_0}^t \sin \varepsilon[\tau(t)] \cdot \text{sch} \gamma[\tau(t)] \cdot \frac{d\gamma}{d\tau} d\tau(t) \cdot \mathbf{e}_\eta[\tau(t)] = \quad (166A) \\ &= v_0 \cdot \mathbf{e}_a(t_0) + c \cdot \int_{t_0}^t \text{sch}^3 \gamma(t) \cdot \frac{\overline{\underline{\underline{d}}}\underline{\underline{\gamma}}}{d\tau} dt \cdot \mathbf{e}_a(t) + c \cdot \int_{t_0}^t \text{sch} \gamma[\tau(t)] \cdot \frac{\perp}{d\tau} d\tau(t) \cdot \mathbf{e}_\eta[\tau(t)] = \\ &= v_0 \cdot \mathbf{e}_a(t_0) + \int_{t_0}^t \text{sch}^3 \gamma(t) \cdot \overline{\underline{\underline{g}}}(\tau) dt \cdot \mathbf{e}_a(t) + \int_{t_0}^t \text{sch} \gamma[\tau(t)] \cdot \frac{\perp}{\underline{\underline{g}}}(\tau) d[\tau(t)] \cdot \mathbf{e}_\eta[\tau(t)], \end{aligned}$$

где:  $t_0 = \tau_0$ ,  $t = t(\tau)$  по (85 А);

$$\text{sch}^3 \gamma[\tau(t)] \cdot \overline{\underline{\underline{g}}}[\tau(t)] = \frac{\overline{\underline{\underline{d}}}\underline{\underline{v}}}{d\tau} = \overline{\underline{\underline{g}}}^{(1)}(t) \quad (167A)$$

– тангенциальное *координатное ускорение*, обобщающее (83 А);

$$\text{sch} \gamma[\tau(t)] \cdot \frac{\perp}{\underline{\underline{g}}}[\tau(t)] = \frac{\perp}{\underline{\underline{d}}}\underline{\underline{v}} = \frac{\perp}{\underline{\underline{g}}}^{(1)}[\tau(t)] = v(t) \cdot w^*[\tau(t)] \quad (168A)$$

– нормальное *координатное ускорение*. Вместе эти характеристики не подчиняются теореме Пифагора. Параллельная скорость геометрически естественным образом представляется в псевдодекартовом базисе  $\tilde{\mathbf{E}}_1$  в  $\langle P^{3+1} \rangle$  через тангенс гиперболического угла наклона мировой линии по отношению к  $\overrightarrow{ct}^{(1)}$  и как вектор – проекция на  $\langle \mathcal{E}^3 \rangle^{(1)}$  (см. рис. 2А).

В том, что *внутреннее* ускорение инвариантно по модулю и подвержено биортогональному разложению по теореме Пифагора, имеется глубокий физический смысл. В самом общем виде этот факт обоснуется и объясняется в главах 9А и 10А.

Собственное вектор-расстояние соответственно вычисляется двумя способами с идентичной разбивкой на три составляющие [ $t_0 = \tau_0$ ,  $v_0 = v_0^* = 0$ ;  $t = t(\tau)$ ]. Из (165A) и (166A) имеем в  $\langle \mathcal{E}^3 \rangle^{(1)}$ :

$$\begin{aligned} \chi &= \mathbf{x}_\tau(\tau) \equiv \mathbf{x}_t(t) = \\ &= \mathbf{x}_0 + \iint_{\tau_0 \tau_0} \text{ch } \gamma(\tau) \cdot \overline{\mathbf{g}}(\tau) \cdot \mathbf{e}_\alpha(\tau) \, d\tau^2 + \iint_{\tau_0 \tau_0} \frac{1}{\tau} \overline{\mathbf{g}}(\tau) \cdot \mathbf{e}_\eta(\tau) \, d\tau^2 = \\ &= \mathbf{x}_0 + \iint_{\tau_0 \tau_0} \overline{\mathbf{g}}^*(\tau) \cdot \mathbf{e}_\alpha(\tau) \, d\tau^2 + \iint_{\tau_0 \tau_0} \frac{1}{\tau} \overline{\mathbf{g}}(\tau) \cdot \mathbf{e}_\eta(\tau) \, d\tau^2 \equiv \end{aligned} \quad (169A)$$

$$\begin{aligned} &\equiv \mathbf{x}_0 + \iint_{t_0 t_0} \text{sch}^3 \gamma(t) \cdot \overline{\mathbf{g}}[\tau(t)] \cdot \mathbf{e}_\alpha(t) \, dt^2 + \iint_{t_0 t_0} \text{sch } \gamma[\tau(t)] \cdot \frac{1}{\tau} \overline{\mathbf{g}}[\tau(t)] \cdot \mathbf{e}_\eta[\tau(t)] \, d\tau \, dt = \\ &= \mathbf{x}_0 + \iint_{t_0 t_0} \overline{\mathbf{g}}^{(1)}(t) \cdot \mathbf{e}_\alpha(t) \, dt^2 + \iint_{t_0 t_0} \frac{1}{\tau} \overline{\mathbf{g}}^{(1)}[\tau(t)] \cdot \mathbf{e}_\eta[\tau(t)] \, d\tau \, dt. \end{aligned} \quad (170A)$$

При условии одновременности в параллельном направлении (85A), мировые точки  $\chi = \mathbf{x}_t(t) = \mathbf{x}_\tau(\tau)$  в  $\langle \mathcal{E}^{3+1} \rangle$  в  $\langle P^{3+1} \rangle$  и в  $\langle \mathcal{E}^{3+1} \rangle$  (гл. 5A) выражаются тождественно в следующих координатных формах:

$$\mathbf{u}^{(1)} = \left| \frac{\mathbf{x}}{ct} \right| \quad \text{и} \quad \mathbf{q}^{(1)} = \left| \frac{\mathbf{x}}{c\tau} \right|.$$

В свою очередь, изменение скалярного косинуса, согласно (162A), прямо пропорционально текущей работе собственной силы (81A) при поступательном физическом движении той же материальной точки:

$$\begin{aligned} \text{ch } \gamma - \text{ch } \gamma_0 &= \int_{\gamma_0}^{\gamma} \cos \varepsilon \cdot \text{sh } \gamma \, d\gamma \equiv \left. \frac{dct}{d\tau} \right|_{\tau_0}^{\tau} = \left. \frac{d\tau}{d\tau} \right|_{\tau_0}^{\tau} \equiv \\ &\equiv 1/c^2 \cdot \int_{\tau_0}^{\tau} \cos \varepsilon(\tau) \cdot v^*(\tau) \cdot \mathbf{g}(\tau) \, d\tau \equiv 1/c^2 \cdot \int_{t_0}^t \cos \varepsilon(t) \cdot v(t) \cdot \mathbf{g}[\tau(t)] \, dt \equiv \quad (171A) \\ &\equiv 1/c^2 \cdot \int_{\chi_0}^{\chi} \cos \varepsilon(\chi) \cdot \mathbf{g}(\chi) \, d\chi \equiv 1/m_0 c^2 \cdot \int_{\chi_0}^{\chi} \cos \varepsilon(\chi) \cdot F(\chi) \, d\chi = 1/E_0 \cdot \int_{\chi_0}^{\chi} \overline{F}(\chi) \, d\chi = A/E_0, \end{aligned}$$

$$\text{где } A = \int_{\chi_0}^{\chi} \cos \varepsilon(\chi) \cdot F(\chi) \, d\chi = \int_{\chi_0}^{\chi} \overline{F}(\chi) \, d\chi.$$

При  $\gamma_0^* = 0$  ( $v_0^* = v_0 = 0$ ) имеем:

$$\text{ch } \gamma = 1 + A/E_0, \quad \text{или} \quad \text{ch } \gamma \cdot E_0 = E = m_0 c^2 + A = mc^2, \quad A = mc^2 - m_0 c^2.$$

Отсюда следует классическая формула Эйнштейна для полной энергии, где  $E = mc^2$  имеет косинусную и поэтому скалярную природу!

В процессе произвольного поступательного движения в  $\langle P^{3+1} \rangle$  полная энергия материального тела  $E = mc^2$  в каждой точке мировой линии есть скалярная проекция мгновенного тензора энергии-импульса (101А) на с.т. Тригонометрические функции угла движения изменяются согласованно:

$$\text{ch } \gamma = \text{sh } \gamma / \text{th } \gamma = (\text{ch } \gamma_0 + \int_{\gamma_0}^{\gamma} d \text{ sh } \gamma) / (\text{th } \gamma_0 + \int_{\gamma_0}^{\gamma} d \text{ th } \gamma) = \text{ch } \gamma_0 + \int_{\gamma_0}^{\gamma} d (\text{sh } \gamma / \text{th } \gamma) = \\ = \text{ch } \gamma_0 + \int_{\gamma_0}^{\gamma} d \text{ ch } \gamma. \quad (\text{Причина в том, что синус и тангенс имеют общий } \mathbf{e}_\alpha.)$$

Наглядная тригонометрическая трактовка импульса состоит в том, что в базисе  $\tilde{E}_1$  собственный импульс есть гипотенуза псевдоевклидова треугольника импульсов на мировой линии (касательная к ней) – гл. 5А:  $\mathbf{P}_0 = m_0 \cdot \mathbf{c}$ . Её пропорциональные скалярные косинусные проекции на ось координатного времени есть  $P = P_0 \cdot \text{ch } \gamma$ ,  $E = E_0 \cdot \text{ch } \gamma$ ,  $m = m_0 \cdot \text{ch } \gamma$ . Псевдомодуль собственного импульса  $\|\mathbf{P}_0\|_p$  (гипотенузы треугольника) есть скаляр  $P_0 = m_0 c$ . Масса – инерционный параметр:  $m_0 = P_0/c = E_0/c^2!$  Импульс  $\mathbf{p}$  есть синусная векторная характеристика в проекции на  $\langle \mathcal{E}^3 \rangle^{(1)}$ :

$$\mathbf{p} = P_0 \cdot \text{sh } \gamma = m_0 c \cdot \text{sh } \gamma = \mathbf{p}(\tau_0) + \int_{\tau_0}^{\tau} \text{ch } \gamma \cdot \bar{\mathbf{F}}(\tau) d\tau \cdot \mathbf{e}_\alpha(\tau) + \int_{\tau_0}^{\tau} \frac{1}{c} \bar{\mathbf{F}}(\tau) d\tau \cdot \mathbf{e}_\eta(\tau) = m\mathbf{v}.$$

В СТО синусную проекцию логично представлять в виде  $\mathbf{p} = m_0 \cdot \mathbf{v}^*$ . Скалярный модуль  $P_0$  – псевдоевклидов инвариант  $P_0^2 = P^2 - \mathbf{p}' \cdot \mathbf{p}$ . Полная энергия  $E$  – квазиевклидов квазинвариант  $E^2 = (P_0 c)^2 + (\mathbf{p}\mathbf{c})' \cdot \mathbf{p}\mathbf{c}$  только в  $\tilde{E}_1$ .

Весьма также интересно, что из формул (135А) и (143А) для, казалось, чисто поступательного, но неколлинеарного движения объекта в  $\langle P^{3+1} \rangle$  следуют математически, но в рамках СТО, релятивистские эффекты: ортосферическая ротация и ортосферическая прецессия объекта вместе с мгновенной плоскостью  $\langle \mathcal{E}^2 \rangle^{(m)} \equiv \{\mathbf{e}_\alpha, \mathbf{e}_\beta\}$  в касательном  $\langle \mathcal{E}^3 \rangle^{(m)} \subset \langle P^{3+1} \rangle$  в точке М мировой линии – см. (499), (144А), (161А) и (166А). Ротацию и прецессию выражают параметры в  $\tilde{E}_1$  и  $\tilde{E}_m$  ( $\text{th } (\gamma/2) = \text{th } \gamma/2 \cdot \mathbf{e}_\alpha$ ,  $d\gamma = d\gamma \cdot \mathbf{e}_\beta$ ):

$$\left. \begin{aligned} d\boldsymbol{\theta} &= \text{th } (\gamma/2) \otimes d\gamma = \text{th } (\gamma/2) d\gamma \cdot \mathbf{r}_N = -\sin \varepsilon(\gamma) \cdot [\text{th } \gamma / (1 + \text{sech } \gamma)] d\gamma \cdot \mathbf{e}_N, \\ (\sin \varepsilon(\gamma) d\gamma &= \frac{1}{c} d\gamma, \frac{1}{c} d\gamma = \frac{1}{c} d\gamma \cdot \mathbf{e}_\eta; d\gamma/d\tau = \eta_k(\tau) = \mathbf{g}^{(m)}(c) \end{aligned} \right\} (172A)$$

$$d\boldsymbol{\theta}/d\tau = -\sin \varepsilon(\tau) \cdot \eta_k(\tau) \cdot \text{th } [\gamma/2] \cdot \mathbf{e}_N = -\sin \varepsilon(\tau) \cdot \mathbf{v}^{(1)} \cdot \mathbf{g}^{(m)} / [c^2 \cdot (1 + \text{sech } \gamma)] \cdot \mathbf{e}_N.$$

Прецессия пропорциональна площади треугольника со сторонами  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{g}$  с углом  $\varepsilon$  между ними и сообразно коррекции изменяется при движении. Векторные соотношения (172А) представляют в тригонометрической форме формулу Томаса для прецессии спина электрона ( $\varepsilon = \pm \pi/2$ ) [32, с. 152]. Она объясняется физически так. В пространстве-времени Минковского мгновенные касательные евклидовы подпространства  $\langle \mathcal{E}^3 \rangle^{(m)} \subset \langle P^{3+1} \rangle$ , движущиеся относительно  $\langle \mathcal{E}^3 \rangle^{(1)}$  со скоростью  $\mathbf{v} = \mathbf{c} \cdot \text{th } \gamma$ , получая в М под углом прибавку  $d\mathbf{v}$ , теряют свою ротационную инерциальность в  $\langle P^{3+1} \rangle$ .



Это в  $\langle \mathcal{E}^3 \rangle^{(m)}$  компенсирует евклидова ротация  $d\theta$  плоскости  $\langle \mathcal{E}^2 \rangle^{(m)}$  в точке  $M$  как центре её приложения, что и вызывает перманентную прецессию, но также восстанавливает ротационную инерциальность  $\langle \mathcal{E}^2 \rangle^{(m)}$  в целом. С точки зрения наблюдателя  $N_1$  в  $\tilde{E}_1$  к материальному объекту в точке  $M$  относительно  $\vec{e}_M$  как бы прикладывается крутящий момент, что придаёт объекту главный момент количества движения, возникший из-за ротации по аналогии с законами механики Ньютона. Если сугубо теоретически его компенсировать с затратой момента  $M(t)$ , прецессия при *поступательном неколлинеарном движении* исчезнет. При  $v(t) \ll c$  из (172A) имеем:

$$\frac{d\theta}{dt} \approx -\sin \varepsilon \cdot v(t) \cdot g(t) / 2c^2; \quad L = J_0 \cdot \frac{d\theta}{dt}, \quad M = \frac{dL}{dt} \approx -(J_0 / 2c^2) \cdot [v(t) \otimes \frac{d\mathbf{g}}{dt}]^{(m)}; \quad (\mathbf{g}^{(m)} = \vec{F}^{(m)} / m_0)$$

(параллельная и перпендикулярная проекции ускорения  $\mathbf{g}^{(m)}$  аннигилируют!) При  $M(t) = \mathbf{0}$  соответственно мгновенная система  $\tilde{E}_m$  остаётся инерциальной и ортопрецессия остаётся той же без вмешательства момента сил извне.

Знак « $\rightarrow$ » в формулах для ротации и прецессии иллюстрирует факт, что в гиперболической геометрии и СТО ортосферическая ротация на гиперboloиде движений и на евклидовой плоскости их ортопроекций направлена против направления суммирования движений (тут  $\gamma$  и  $d\gamma$ ).

Из-за того, что в формуле (172A) параметры движения выражаются в своих базисах  $\mathbf{th} \gamma(\mathbf{v})$  в  $\tilde{E}_1$  и  $d\gamma(\mathbf{g})$  в  $\tilde{E}_m$ , ортосферическая ротация и прецессия имеют относительный характер при  $\mathbf{e}_{\beta(0)} \equiv \mathbf{const}$ , т. е. для 3-х мерной мировой линии при её ненулевой псевдокривизне, но при также эфемерном ненулевом псевдокручении. Такое имеет место тогда, когда вектор  $\mathbf{g}$  имеет  $\mathbf{e}_\beta = \mathbf{const}$ , причём не обязательно тождественный  $\mathbf{e}_\alpha$ . Это ускоренное физическое движение в  $\langle \mathcal{E}^2 \rangle \equiv \langle \mathbf{e}_{\alpha(0)}, \mathbf{e}_\beta \rangle \equiv \langle \mathbf{e}_\alpha, \mathbf{e}_\beta \rangle \equiv \mathbf{Const}$  с начальной скоростью  $\mathbf{v}_0$  под углом  $\varepsilon_0$  к  $\mathbf{e}_\beta = \mathbf{const}$ . При этом в начале координат базиса  $\tilde{E}_1 = \{\Gamma\}$  наклон мировой линии отвечает начальному  $\mathbf{th} \gamma_0$  с  $\mathbf{e}_{\alpha(0)}$ . Выполнив чисто гиперболическое преобразование базиса  $\tilde{E}_1$  в  $\tilde{E}_{1h} = \text{roth } \Gamma \cdot \tilde{E}_1$ , где  $\gamma$  и  $\mathbf{e}_\alpha$  определяются  $\mathbf{th} \gamma_0 = \mathbf{v}_0/c$ , нивелируем в новом базисе  $d\theta$ , так как в нём  $\mathbf{th} \gamma(\mathbf{v})$  и  $d\gamma(\mathbf{g})$  коллинеарны ( $\sin \varepsilon = 0$ )! Это преобразование тождественно переходу к системе отсчёта с  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0$ . В итоге имеем *коллинеарную мировую линию* в  $\langle P^{3+1} \rangle$  с  $\mathbf{e}_\alpha = \mathbf{e}_\beta \equiv \mathbf{const}$ !

Для истинно закрученной мировой линии, т. е. при значении  $\mathbf{e}_\beta \neq \mathbf{const}$ , ротация и прецессия могут нивелироваться в точке  $M$  только локально.

В изложенной в главах 5А–7А *относительной* тригонометрической трактовке кинематики и динамики абсолютного движения материальных точек в форме его 3-векторной проекции в  $\langle P^{3+1} \rangle$  природа активной силы  $F$  и вызываемого внутреннего ускорения  $\mathbf{g} = F/m_0$  не имеет значения. Абсолютная тригонометрическая трактовка движения материи в форме абсолютных  $4 \times 1$  векторов вдоль мировой линии дана в гл. 10А.

## Глава 8А. Тригонометрические модели движений в сферической геометрии

Квазиевклидово ориентированное пространство  $\langle Q^{n+1} \rangle$  индекса  $q = 1$ , определяется аналогично псевдоевклидову пространству Минковского  $\langle P^{n+1} \rangle$  (§§ 6.3, 12.3). В задании  $\langle Q^{n+1} \rangle$  тоже существенную роль играет рефлектор-тензор  $I^{\oplus}$ , а именно в задании его ориентации и допускаемых преобразований. Однако квазиевклидово пространство имеет евклидову метрику. Важнейшая часть его геометрии – тензорная элементарная ( $q = 1$ ) квазиевклидова тригонометрия со сферическими функциями – ротацией  $\text{rot } \Phi$ , выраженной в базисе  $\{I\}$  в канонической форме с реперной осью (313) при  $n = 2$  и (314) и той же вторичной  $\text{rot } \Theta$  как в (259). В  $\langle Q^{n+1} \rangle$  как тригонометрический объект задаётся ориентированный гиперсфероид радиуса  $R$ . Внешнюю и внутреннюю геометрию гиперсфероида задают радиус  $R$  и направленная в  $\langle Q^{n+1} \rangle$  ось  $\vec{y}$  отсчёта главных сферических ротаций. Его начальная точка – центр универсальных квазидекартовых базисов  $\tilde{E}_{1u}$ . Относительно этого гиперсфероида,  $\text{rot } \Theta$  внешним образом выражает ортосферический сдвиг от суммировании неколлинеарных движений  $\text{rot } \Phi_{(k)}$ ; а внутренним образом для геометрических фигур из геодезических линий (больших окружностей) на его поверхности также выражает угловой эксцесс. Аналогично (462),  $\langle Q^{n+1} \rangle$  в квазидекартовом базисе  $\tilde{E}$  представимо прямой сферически ортогональной суммой:

$$\langle Q^{n+1} \rangle \equiv \langle \mathcal{E}^n \rangle \oplus \vec{y} \equiv \text{CONST}, \quad (173A)$$

где  $\langle \mathcal{E}^n \rangle$  – евклидова гиперплоскость,  $\vec{y}$  – ориентированная реперная ось для отсчёта угла главной сферической ротации  $\Phi$  в данном базисе.

С точки зрения квазиевклидовой тригонометрии, в  $\langle Q^{n+1} \rangle$  подпространство  $\langle \mathcal{E}^{n(k)} \rangle$  – синусная гиперплоскость,  $\vec{y}^{(k)}$  – косинусная ось. Заметим, что мнимонизация реперной оси  $\vec{y}$  трансформирует  $\langle Q^{n+1} \rangle$  в комплексное квазиевклидово пространство индекса  $q = 1$  (§ 6.1) – изоморфизм псевдоевклидова пространства Минковского  $\langle P^{n+1} \rangle$ . В  $\langle Q^{n+1} \rangle$  допускаются операции: как линейные – ортогональные ротации 2х типов и трансляции, сохраняющие пространственную структуру (173А) (что отвечает рефлектор-тензору  $I^{\oplus}$ ) и правую ориентацию базисов:

$$\langle \text{rot } \Phi \rangle: \text{rot } \Phi \cdot I^{\oplus} \cdot \text{rot } \Phi = I^{\oplus} = \text{rot } (-\Phi) \cdot I^{\oplus} \cdot \text{rot } (-\Phi) \quad (174A)$$

– основные сферические ротации;

$$\langle \text{rot } \Theta \rangle: \text{rot}' \Theta \cdot I^{\oplus} \cdot \text{rot } \Theta = I^{\oplus} = \text{rot } \Theta \cdot I^{\oplus} \cdot \text{rot}' \Theta \quad (175A)$$

– ортосферические ротации (аналоги таковых в  $\langle P^{n+1} \rangle$  с тем же  $I^{\oplus}$ ).

Применяя тензорную тригонометрию, можно решать разнообразные геометрические задачи на сферической поверхности, т. е. с положительной кривизной. в том числе инфинитезимальные (сфера не изгибается!). Если воспользоваться аналогией с пространством Минковского, то в пространстве  $\langle Q^{n+1} \rangle$  возможно анализировать проблемы, связанные со вращательными движениями с заданной или переменной реперной осью  $\vec{Y}$  (как аналога стрелы времени). Но для этого надо принять исходный универсальный базис, как правило, с правой системой координат:

$$\vec{E} = T \cdot \vec{E}_1 = \text{rot } \Phi \cdot \text{rot } \Theta \cdot \vec{E}_1, \quad (\det T = +1) \quad (176A)$$

В этом пространстве реализуется общая квазиевклидова тензорная тригонометрия индекса  $q=1$  в элементарной форме (§§ 5.6, 5.12). а на вложенном в него гиперсфереоиде радиуса  $R$  реализуется внутренняя сферическая геометрия, соответствующая однозначно и весьма наглядно внешней тензорной тригонометрии с той же самой заданной ориентацией в пространстве  $\langle Q^{n+1} \rangle$ . В псевдо- и квазидекартовых базисах имеет место абстрактная сферическо-гиперболическая аналогия, в универсальных базисах  $\vec{E}_{1u} = \text{rot } \Theta \cdot \vec{E}_1$  действует конкретная аналогия и как главная синустангенсная (§§ 6.1, 6.2). Общая сферическая ротация  $T$  выражается по абстрактной аналогии типа (323) с (111A) как полярное представление:

$$T = \text{rot } \Phi \cdot \text{rot } \Theta = \text{rot } \Theta \cdot \text{rot } \vec{\Phi}. \quad (177A)$$

$$\Gamma \leftrightarrow i\Gamma \leftrightarrow \Phi \quad (\gamma \leftrightarrow i\gamma \leftrightarrow \varphi), \quad (178A)$$

( $\text{roth } \Gamma \leftrightarrow \text{rot } i\Gamma \leftrightarrow \text{rot } \Phi$ ).

Матрица основной сферической ротации  $\text{rot } \Phi$  с реперной осью  $\vec{u}$  и её ортогональным дополнения  $\langle \mathcal{E}^n \rangle$  в (173A) имеет каноническую структуру в  $\vec{E}_1$ , согласно (314), отвечающую рефлектор-тензору как:

rot $\Phi$		-----	I	
$\cos \varphi \cdot \overleftarrow{e}_\alpha e'_\alpha + \overrightarrow{e}_\alpha e'_\alpha$	$-\sin \varphi \cdot e_\alpha$		$I_{n \times n}$	$\mathbf{o}$
$+\sin \varphi \cdot e'_\alpha$	$\cos \varphi$		$\mathbf{o}'$	$-1$

(179A)

С другой стороны, ортосферическая ротация  $\text{rot } \Theta$  в базисе  $\vec{E}_1$ , согласно (179A), отвечает рефлектор-тензору по схеме (110A). В связи с вышеуказанной аналогией в исходных универсальных базисах формулы гиперболической геометрии (гл. 7A) логично преобразуются в формулы-аналоги сферической геометрии. Если учесть соответствие для углов основного движения в гиперболической и сферической мере Ламберта

$$\left. \begin{aligned} a_{(h)} &= \gamma \cdot R, \\ a_{(s)} &= \varphi \cdot R, \end{aligned} \right\} \quad (180)$$

то формулы 2х геометрий в малом переходят друг в друга во внутренней и внешней интерпретациях. Поэтому далее приводится, главным образом, сводка формул для преобразований и ряда характеристик в сферической геометрии с небольшими пояснениями для выведенных посредством квази-евклидовой тензорной тригонометрии. Интерпретацию результатов можно осуществлять внешним и внутренним образом. При ротационных преобразованиях сохраняется как инвариант радиус тригонометрического гиперсфероиде  $R = 1$ . Для двухступенчатого неколлинеарного движения на гиперсфероиде с учётом полярного разложения (177А)

$$\tilde{E}_3 = \text{rot } \Phi_{12} \cdot \text{rot } \Phi_{23} \cdot \tilde{E}_1 = \{\text{rot } \Phi_{12} \cdot \text{rot } \Phi_{23} \cdot \text{rot}' \Phi_{12}\}_{\tilde{E}_2} \cdot \text{rot } \Phi_{12} \cdot \tilde{E}_1 = T \cdot \tilde{E}_1 = \text{rot } \Phi_{13} \cdot \text{rot } \Theta_{13} \cdot \tilde{E}_1 = \text{rot } \Theta_{13} \cdot \text{rot } \bar{\Phi}_{13} \cdot \tilde{E}_1 = \{\text{rot } \Theta_{13} \cdot \text{rot } \bar{\Phi}_{13} \cdot \text{rot}' \Theta_{13}\} \cdot \text{rot } \Theta_{13} \cdot \tilde{E}_1 \quad (181A)$$

имеем аналог (111А) (порядок задания и действия матриц такой же).

$$\text{rot } \bar{\Phi}_{13} = \text{rot}' \Theta_{13} \cdot \text{rot } \Phi_{13} \cdot \text{rot } \Theta_{13} = \text{rot}(-\Theta_{13}) \cdot \text{rot } \Phi_{13} \cdot \text{rot } \Theta_{13} \quad (182A)$$

$$e_{\sigma} = \{\text{rot}(+\Theta_{13})\}_{3 \times 3} \cdot e_{\sigma} \quad (\sin \theta_{13} > 0!) \rightarrow e_{\sigma}' \cdot e_{\sigma} = e_{\sigma}' \cdot e_{\sigma} = \cos \theta_{13}$$

– сферические аналоги формул (112А) и (113А), (но при этом  $\theta_{13} > 0!$ );

$$\text{rot } \Phi_{13} = \sqrt{\text{rot } \Phi_{12} \cdot \text{rot } 2\Phi_{23} \cdot \text{rot } \Phi_{12}} = \sqrt{\text{rot } 2\Phi_{13}} = \sqrt{TT^*} \quad (183A)$$

$$\text{rot } \Theta_{13} = \text{rot } \Phi_{12} \cdot \text{rot } \Phi_{23} \cdot \text{rot } \bar{\Phi}_{31} = \text{rot } \Phi_{31} \cdot \text{rot } \Phi_{12} \cdot \text{rot } \Phi_{23} \quad (184A)$$

– аналоги формул (114А), (115А), где корни *тригонометрические* (§ 5.6).

В случае  $\tilde{E}_1 = \{I\}$  при перемене порядка следования 2-х сферических движений на противоположный новый квазидекартов базис задаёт матрица – *квазианалог*  $T^*$  для матрицы  $T'$  из (116А), но здесь  $T^* \neq T'$ :

$$\tilde{E}_3^* = \text{rot } \Phi_{23} \cdot \text{rot } \Phi_{12} \cdot \tilde{E}_1 = T^* \cdot \tilde{E}_1 = \text{rot}(-\Theta_{13}) \cdot \text{rot } \Phi_{13} \cdot \tilde{E}_1 = \text{rot } \bar{\Phi}_{13} \cdot \text{rot}(-\Theta_{13}) \cdot \tilde{E}_1 \quad (185A)$$

*Формально преобразование  $T^*$  связано с  $T$  операцией простого транспонирования, но реализуемой в бинарном комплексном базисе как (443) из § 10.3, или (271) из § 5.9. Для обратного порядка в итоге имеем:*

$$\text{rot } \bar{\Phi}_{13} = \sqrt{\text{rot } \Phi_{23} \cdot \text{rot } 2\Phi_{12} \cdot \text{rot } \Phi_{23}} = \sqrt{\text{rot } 2\bar{\Phi}_{13}} = \sqrt{T^*T}, \quad (186A)$$

$$\text{rot}(-\Theta_{13}) = \text{rot}^{-1} \Theta_{13} = \text{rot } \Theta_{31} = \text{rot } \bar{\Phi}_{13} \cdot \text{rot } \Phi_{32} \cdot \text{rot } \Phi_{21} = \text{rot } \Phi_{32} \cdot \text{rot } \Phi_{21} \cdot \text{rot } \Phi_{13} \quad (187A)$$

– аналоги формул (117А), (118А), но где корни тригонометрические; (184А) и (187А) тоже представляют замкнутые циклы в треугольнике 123!

Здесь сохраняется двойственность во взгляде на матрицу суммарной гиперболической ротации. Но и  $\text{rot } \Theta_{13}$ , с одной стороны, связана с возникающим сферическим сдвигом при суммировании частных

неколлинеарных движений *неточечных объектов*; но, с другой стороны, согласно (112А) и (182А), она же преобразует модально основную суммарную ротацию при перемене порядка следования двух частных движений на противоположный. Связь между двумя такими вариантами двухступенчатого сферического движения (прямым и реверсивным) сводится к замене частных углов по схеме:

$$\varphi_{12} \leftrightarrow \varphi_{23}, \quad \alpha_k \leftrightarrow \beta_k \quad (188A)$$

– аналог (121А).

Перемножая элементы матриц в (183А) или применяя аналогию *абстрактного типа*, получаем формулы двухступенчатого движения в  $\langle Q^{n+1} \rangle$ . Например, в косинусной интерпретации имеем:

$$\begin{aligned} \cos \varphi_{13} &= \cos \varphi_{12} \cdot \cos \varphi_{23} - \cos \varepsilon \cdot \sin \varphi_{12} \cdot \sin \varphi_{23} = \\ &= \cos \varphi_{12} \cdot \cos \varphi_{23} + \cos A_{123} \cdot \sin \varphi_{12} \cdot \sin \varphi_{23} \cdot (A_{123} = \pi - \varepsilon) \end{aligned} \quad (189A)$$

Отсюда непосредственно видна независимость суммарного *скалярного* угла движения от порядка следования двух частных движений  $\varphi_{12}$  и  $\varphi_{23}$ . Это классическая формула сферической геометрии (и эллиптической геометрии Римана) для косинуса угла  $\varphi_{13}$  как *скаляра*. При движении по гиперсфере с возрастанием значений ординаты  $\vec{y}$  все углы  $\varphi > 0$ . В связи с этим обстоятельством для положительных углов движения  $\varphi$  (и расстояний – здесь в *сферической мере* Ламберта) с учётом (189А) следует правило “параллелограмма”, как в евклидовой геометрии:

$$|\varphi_{12} - \varphi_{23}| \leq \varphi_{13} \leq \varphi_{12} + \varphi_{23} \quad (190A)$$

– аналог (123А). Неравенства (190А) и  $\varphi > 0$  относят расстояние в сферической геометрии в категорию норм. Однако поскольку в квази-евклидовой геометрии в целом сохраняется евклидова метрика, то длины геодезических сферических дуг и ортосферических дуг *евклидовы*. В тангенсной модели, или в проективной модели данный гиперсфероид в целом отображается на всю *двустороннюю* (замкнутую) проективную гиперплоскость « $\mathcal{E}^n$ » (см. § 12.1), то есть он гомеоморфен ей.

Соответствующие формулы для скалярных синуса и тангенса – аналоги (124А) и (125А) даются с учётом *теоремы о приведении к биортogonalной (квадратичной) некоммутативной форме* (гл. 7А):

$$\sin^2 \varphi_{13} = (\sin \varphi_{12} \cdot \cos \varphi_{23} + \cos \varepsilon \cdot \sin \varphi_{23} \cdot \cos \varphi_{12})^2 + (\sin \varepsilon \cdot \sin \varphi_{23})^2, \quad (191A)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \varphi_{23}^2 &= [(\operatorname{tg} \varphi_{12} + \cos \varepsilon \cdot \operatorname{tg} \varphi_{23}) / (1 - \cos \varepsilon \cdot \operatorname{tg} \varphi_{23} \cdot \operatorname{tg} \varphi_{12})]^2 + \\ &+ [(\sin \varepsilon \cdot \operatorname{tg} \varphi_{23} \cdot \sec \varphi_{12}) / (1 - \cos \varepsilon \cdot \operatorname{tg} \varphi_{23} \cdot \operatorname{tg} \varphi_{12})]^2. \end{aligned} \quad (192A)$$

Формула (143А) для  $\cos \theta_{13}$  тоже преобразуется просто по аналогии. Напомним, что она выразит также и угловой эксцесс треугольника 123.

Для условно ортогональных частных движений из (189А) следует мультипликативная косинусная формула, трактующая скалярно их суммирование как *интегральный* аналог теоремы Пифагора:

$$\cos \varphi_{13} = \cos \varphi_{12} \cdot \cos \varphi_{23} \quad (\varepsilon = \pm \pi/2). \quad (193A)$$

При движении по n-мерному гиперсфероиду количество последовательных независимых, условно ортогональных отрезков (углов) не может превышать число «n». Применяя также последовательно (193А), получаем общую мультипликативную косинусную формулу

$$\cos \varphi_{1t} = \prod_{\substack{i=1, \overline{1, t-1} \\ j=2, \overline{1}}} \cos \varphi_{ij} \quad (\varepsilon = \pm \pi/2), \quad \text{где } 3 \leq t \leq n.$$

Суммирование условно ортогональных движений в  $\langle Q^{n+1} \rangle$  в скалярном варианте коммутативно. Например, протяжённость суммы таких движений вычисляется в виде

$$a_{1t} = R \cdot \arccos \prod_{\substack{i=1, \overline{1, t-1} \\ j=2, \overline{1}}} \cos a_{ij}/R \quad (\varepsilon = \pm \pi/2), \quad \text{где } 3 \leq t \leq n.$$

Кроме того, многозвенные косинусные формулы для условно ортогональных движений в обеих геометриях представляются в аддитивной форме через логарифмические меры:

$$\ln \cos \varphi_{ij} \equiv \ln \cos a_{ij}/R \quad \text{и} \quad \ln \operatorname{ch} \gamma_{ij} \equiv \ln \operatorname{ch} a_{ij}/R \quad (\varepsilon = \pm \pi/2, \quad 3 \leq t \leq n).$$

Мультипликативные косинусные соотношения для скалярной суммы условно ортогональных движений продуцируют теорему Пифагора при  $\varphi \rightarrow 0$  ( $\gamma \rightarrow 0$ ) в неевклидовых геометриях ( $\alpha \rightarrow 0$ :  $\cos \alpha \rightarrow 1 + \alpha^2/2$ ).

Пусть в  $\langle Q^{3+1} \rangle$  с исходным  $\tilde{E}_1$ :  $\varphi_{12} = \varphi$ ,  $\varphi_{23} = d\varphi$ . По аналогии с (144А), с учётом формулы (499) и того, что  $\cos d\varphi = 1 + (d\varphi)^2/2$ , далее имеем:

$$d\theta = [\sin \varphi / (1 + \cos \varphi)] \otimes d\varphi = \operatorname{tg} \varphi / 2 \cdot r_N = + \operatorname{tg} \varphi / 2 \cdot \sin \varepsilon \cdot d\varphi \cdot e_N = \operatorname{tg} \varphi / 2 \overset{\perp}{d\varphi} \cdot e_N \quad (194A)$$

(в  $\langle Q^{2+1} \rangle$  знак «+» получается сразу из-за равной направленности  $\theta$  и  $\varepsilon$ .)

Это *дифференциально векторный вариант* ортосферической ротации  $\theta$  для возможных приложений в сферических геометриях. Например, из формулы (194А) для  $d\varphi_{12}$  и  $d\varphi_{23}$  с их внешним углом  $\varepsilon$  вытекает дифференциальная формула  $d\theta_{13} = + \sin \varepsilon \cdot d\varphi_{12} \cdot d\varphi_{23} / 2 = \pm ds_{\Delta} > 0$ .

Как и ранее (гл. 7А), особый случай отвечает ортогональной (*теперь не условно!*) сумме бесконечно малых частных углов движения:

$$\lim_{\varphi_{12} \rightarrow 0} \varphi_{13} = \sqrt{\varphi_{12}^2 + \varphi_{23}^2}; \quad \theta_{13} = \pm \varphi_{12} \cdot \varphi_{23} / 2 = \pm (a_{12} \cdot a_{23} / 2) / R^2 = s \cdot K_G \rightarrow 0.$$

$$\varphi_{23} \rightarrow 0 \quad \delta_{\Delta} = 2\pi - (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) = 2\pi - [3\pi - (\pi - \delta_{\Delta})] = \pm \theta_{13} > 0 \quad (\text{при } \varepsilon > 0 \text{ и } < 0)!$$

**Следствие:** геометрия гиперсфероида инфинитезимально евклидова.

$$\lim_{\varphi_0 \rightarrow 0} \varphi = \sqrt{\sum_{j=1}^k \varphi_{(j)}^2}, ds = d\varphi_{(1)} d\varphi_{(2)} \cdot R^2, dv = d\varphi_{(1)} \dots d\varphi_{(k)} \cdot R^k \quad (k \leq n, \varepsilon = \pm \pi/2).$$

Здесь имеет место коммутативность частных углов движения (дуг) в скалярной и векторной формах суммирования. Например, первый дифференциал общего угла движения представляется мерой Ламберта в двух вариантах – аналогах (144А) и (145А):

$$(d\varphi)^2 = \sum_{j=1}^n [d\varphi_{(j)}]^2, \{ (da)^2 = \sum_{j=1}^n [da_{(j)}]^2 \}, (\varepsilon = \pm \pi/2) \quad (195A)$$

$$\left. \begin{aligned} d\varphi &= \overline{d\varphi} \cdot \mathbf{e}_\alpha + \overset{\perp}{d\varphi} \cdot \mathbf{e}_\eta = d\varphi \cdot \mathbf{e}_\beta, \quad \{ \overline{da} = \overset{\perp}{da} \cdot \mathbf{e}_\alpha + da \cdot \mathbf{e}_\eta = da \cdot \mathbf{e}_\beta \}, \\ (d\varphi)^2 &= (\overline{d\varphi})^2 + (\overset{\perp}{d\varphi})^2 \quad \{ (da)^2 = (\overline{da})^2 + (\overset{\perp}{da})^2 \}. \end{aligned} \right\} \quad (196A)$$

Ввиду того, что при непрерывных движениях в  $\langle P^{n+1} \rangle$  или в  $\langle Q^{n+1} \rangle$ , отображаемых непосредственно траекториями на собственных гиперповерхностях, характеристический радиус постоянный ( $R = \text{const}$ ), то аналогичная инфинитезимальная теорема Пифагора имеет место для дифференциалов ортогональных приращений натуральной мерой длины (для  $\varphi$  и  $\theta$  евклидова, для  $\gamma$  псевдоевклидова) в этих же вариантах.

Например, это может быть разложение первого дифференциала дуги  $da = R^{(m)} dy$  или  $da = R^{(m)} d\varphi$  на тангенциальную и нормальную ортопроекции в соприкасающейся псевдо/квазиплоскости к криволинейному участку линии движения в окрестности точки  $M$  с мгновенным радиусом псевдо/квазикривизны  $R^{(m)}$ , как первый вариант.

Для условно ортогональных геодезических сферических движений (дуг вдоль больших окружностей) нетрудно получить аналоги формул суммирования прежде всего в синусном варианте (130А) и (133А).

Кроме того, во внешней тригонометрии гиперболоида в  $\langle Q^{n+1} \rangle$  действуют *векторные* формулы для синуса и тангенса суммы дуг  $\varphi_{13}$ :

$$\begin{aligned} \sin \varphi_{13} &= \sin \varphi_{13} \cdot \mathbf{e}_\sigma = (\sin \varphi_{12} \cdot \cos \varphi_{23} + \cos \varepsilon \cdot \sin \varphi_{23} \cdot \cos \varphi_{12}) \cdot \mathbf{e}_\alpha + \\ &+ \sin \varepsilon \cdot \sin \varphi_{23} \cdot \mathbf{e}_\eta, \end{aligned} \quad (197A)$$

$$\begin{aligned} \text{tg } \varphi_{13} &= \text{tg } \varphi_{13} \cdot \mathbf{e}_\sigma = [(\text{tg } \varphi_{12} + \cos \varepsilon \cdot \text{tg } \varphi_{23}) / (1 - \cos \varepsilon \cdot \text{tg } \varphi_{23} \cdot \text{tg } \varphi_{12})] \cdot \mathbf{e}_\alpha + \\ &+ [(\sin \varepsilon \cdot \text{tg } \varphi_{23} \cdot \sec \varphi_{12}) / (1 - \cos \varepsilon \cdot \text{tg } \varphi_{23} \cdot \text{tg } \varphi_{12})] \cdot \mathbf{e}_\eta \end{aligned} \quad (198A)$$

– аналоги формул (135А) и (138А) с той же геометрической интерпретацией, но в сферическом варианте.

Далее рассмотрим *внешнюю* векторную тригонометрию единичного гиперболоида ( $R = 1$ ).

\* \* \*

Гиперсфероид (см. рис. 4,  $R = 1$ )

$$\mathbf{e}_k = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} = \frac{\sin \varphi \cdot \mathbf{e}_\alpha}{\cos \varphi} \quad (\text{при } \Delta y > 0: \varphi > 0) \quad (199A)$$

–  $n \times 1$  единичный радиус-вектор точки гиперсфероида.

Метрический инвариант выражается в виде:

$$\mathbf{e}_k' \cdot \mathbf{e}_k = \sin' \varphi_{1k} \cdot \sin \varphi_{1k} + \cos^2 \varphi_{1k} = \sin^2 \varphi_{1k} \cdot \mathbf{e}_\alpha' \cdot \mathbf{e}_\alpha + \cos^2 \varphi_{1k} = 1 = 1^2. \quad (200A)$$

$\sin \varphi_{1k}$  – векторная  $3 \times 1$  ортопроекция  $\mathbf{e}_k$  на  $\langle \mathcal{E}^3 \rangle^{(1)}$  параллельно  $\vec{y}^{(1)}$ ,  
 $\cos \varphi_{1k}$  – скалярная  $1 \times 1$  ортопроекция  $\mathbf{e}_k$  на  $\vec{y}^{(1)}$  параллельно  $\langle \mathcal{E}^3 \rangle^{(1)}$ .

Остальные существенные здесь тригонометрические функции:

$\mathbf{tg} \varphi_{1k}$  – перекрёстная  $3 \times 1$  ортопроекция  $\mathbf{e}_k$  на  $\langle \mathcal{E}^3 \rangle^{(1)}$  параллельно  $\vec{y}^{(k)}$ ,  
 $\sec \varphi_{1k}$  – перекрёстная  $1 \times 1$  ортопроекция  $\mathbf{e}_k$  на  $\vec{y}^{(1)}$  параллельно  $\langle \mathcal{E}^3 \rangle^{(k)}$ .

Сферическое геодезическое движение (по большой окружност точечного элемента  $\mathbf{e}_2 \rightarrow \mathbf{e}_3$  единичного гиперсфероида в активной форме в  $\tilde{E}_1$  и  $\tilde{E}_2$  наглядно представлен в обратной последовательности - см. (181A):

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_3 & \qquad \qquad \mathbf{e}_1 & \qquad \qquad \mathbf{e}_1 \\ \frac{\sin \varphi_{13} \cdot \mathbf{e}_\sigma}{\cos \varphi_{13}} &= \text{rot } \Phi_{13} \cdot \frac{\mathbf{0}}{1} = \text{rot } \Phi_{13} \cdot \text{rot } \Theta_{13} \cdot \frac{\mathbf{0}}{1} = & (201A) \\ &= \text{rot } \Phi_{12} \cdot \text{rot } \Phi_{23} \cdot \frac{\mathbf{e}_1}{1} = \{ \text{rot } \Phi_{12} \cdot \text{rot } \Phi_{23} \cdot \text{rot}' \Phi_{12} \}_{\tilde{E}_2} \cdot \text{rot } \Phi_{12} \cdot \frac{\mathbf{e}_1}{1} = \\ &= \{ \text{rot } \Phi_{23} \}_{\tilde{E}_2} \cdot \frac{\sin \varphi_{12} \cdot \mathbf{e}_\sigma}{\cos \varphi_{12}} = \{ \text{rot } \Phi_{23} \}_{\tilde{E}_2} \cdot \text{rot } \Phi_{12} \cdot \frac{\mathbf{e}_1}{1}. \end{aligned}$$

Траектория сферического (геодезического) движения  $\mathbf{e}_2 \rightarrow \mathbf{e}_3$  принадлежит сечению инвариантного гиперсфероида плоскостью ротации матрицы  $\{ \text{rot } \Phi_{12} \cdot \text{rot } \Phi_{23} \cdot \text{rot}' \Phi_{12} \}_{\tilde{E}_2}$ . Аналитически она производится при непрерывном преобразовании  $\mathbf{e} \rightarrow (\mathbf{e} + d\mathbf{e})$  путём изменения в матрице  $\{ \text{rot } \Phi_{23} \}_{\tilde{E}_2}$  значения скалярного угла от 0 до  $\varphi_{23}$  при  $\mathbf{e}_\beta = \text{const}$ . Пересечение плоскости ротации с проективной гиперплоскостью отображает геодезическую траекторию прямолинейным отрезком на  $\langle \mathcal{E}^n \rangle$ .

На гиперсфероиде нетрудно реализовать сферический треугольник, например, из центрального элемента 3-мя геодезическими движениями:  $\text{rot } \Phi_{12} \cdot \mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2 \rightarrow \{ \text{rot } \Phi_{12} \cdot \text{rot } \Phi_{23} \cdot \text{rot}' \Phi_{12} \}_{\tilde{E}_2} \cdot \mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_3 \rightarrow \{ \text{rot } \Phi_{13} \}_{\tilde{E}_1} \cdot \mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_3$  – учтя полярное разложение (181A). Причём  $\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3 \rangle$  трансформируется в произвольный треугольник активным преобразованием координат в  $\tilde{E}_1$ . Отсюда: “Через две точки  $\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$  проводится геодезическая, причём одна!”



Это иллюстрирует хорошо известный факт (теорему) сферической геометрии: любые две точки полусферы или *две неполярные точки сферы* можно соединить на обеих кратчайшим евклидовым расстоянием по однозначной дуге некоторой большой окружности (геодезической). Это даёт указанный *матричный* способ решения задачи в исходном  $\tilde{E}_1$  и в любом ином квазидекартовом базисе. В  $\tilde{E}_2 = \text{rot } \Phi_{12} \cdot \tilde{E}_1$  движение  $\mathbf{u}_2 \rightarrow \mathbf{u}_3$  реализуется по кратчайшей дуге с длиной  $a_{23} = R \cdot \varphi_{23}$ . Как видно из (201A), для *точечного* элемента  $\mathbf{u}$  ортосферическая ротация  $\theta_{13}$  фактически аннигилирует. Однако она проявляется при двухступенчатом движении любого *неточечного* объекта, например, задаваемого линейором (§ 5.1). То есть третье (последнее) движение при формировании линейорного треугольника даёт результат  $\{\text{rot } \Phi_{31}\}_{\tilde{E}_3} \cdot A_3 = \{\text{rot } (-\Phi_{13})\}_{\tilde{E}_3} \cdot A_3 = \text{rot } \Theta_{13} \cdot A_1$ . Неточечный объект после цикла обхода геодезического треугольника с возвращением в исходную точку движения оказывается повернутым на угол  $\Theta_{13}$ . В двумерной сферической геометрии скалярный угол  $\theta_{13}$  есть *эксцесс* треугольника, а в двумерной гиперболической геометрии скалярный угол  $\theta$  есть *дефект* треугольника – или более сложной геометрической фигуры, например, многоугольника, окружности и т. д. *Особенность*: две полярные точки гиперсфероида дают двуугольники.

\* \* \*

Используя квазиполярное представление (177A), (178A), находим в общем виде закон и формулы для суммирования многоступенчатых движений или вообще самых общих однородных движений (ротаций) в сферической геометрии как внешней, так и внутренней в  $\langle Q^{n+1} \rangle$  – аналоги (153A)–(155A). Имеем **генеральный закон суммирования**:

$$T = \text{rot } \Phi \cdot \text{rot } \Theta = \text{rot } \Theta \cdot \text{rot } \tilde{\Phi} =$$

$(1 - \cos \varphi) \cdot \mathbf{e}_\sigma \mathbf{e}'_\sigma + \text{rot } \Theta_{n \times n}$	$-\sin \varphi \cdot \mathbf{e}_\sigma$
$+ \sin \varphi \cdot \mathbf{e}'_\sigma$	$\cos \varphi$

(202A)

При  $n = 2$  имеем:

$$\left. \begin{aligned} \cos \varphi &= t_{33}; \quad \sin \varphi = +\sqrt{(1 - \cos^2 \varphi)} = \|\sin \varphi \cdot \mathbf{e}_\sigma\| > 0, \quad (k = 1, 2) \\ \cos \sigma_k &= -t_{k3}/\sin \varphi, \quad \cos \tilde{\sigma}_k = +t_{3k}/\sin \varphi; \quad \sin \varphi_k = -t_{k3} = \cos \sigma_k \cdot \sin \varphi; \\ \mathbf{e}_\sigma &= \{\cos \sigma_k\}, \quad \mathbf{e}'_\sigma = \{\cos \tilde{\sigma}_k\}; \quad \cos \theta = \mathbf{e}'_\sigma \cdot \mathbf{e}_\sigma. \end{aligned} \right\} \quad (203A)$$

(При  $n = 3$ :  $\sin \theta$  – есть множитель в (499) при  $\mathbf{e}_N$ .)

Суммарная матрица (202A) наглядно показывает тоже как (154A), что в  $\tilde{E}_1$  в главном (первом) полярном представлении применение ротаций идёт в последовательности:  $\text{rot } \Phi$  (основная),  $\text{rot } \Theta$  (ортосферическая)!

Укажем структуру специфической матрицы в формуле (185А)  $T^* \neq T'$  (из-за  $\Phi \neq \Phi'$ ) для обратного порядка следования частных движений:  
 $T^* = \text{rot } \bar{\Phi} \cdot \text{rot } (-\Theta) = \text{rot } (-\Theta) \cdot \text{rot } \Phi = \{\text{rot } (-\Theta) \cdot T \cdot \text{rot } (-\Theta)\}$

$(1 - \cos \varphi) \cdot \mathbf{e}_\sigma \mathbf{e}_\sigma' + \text{rot}(-\Theta_{n \times n})$	$-\sin \varphi \cdot \mathbf{e}_\sigma$	(204А)
$+ \sin \varphi \cdot \mathbf{e}_\sigma'$	$\cos \varphi$	

Сами по себе, матричные и векторные характеристики ротаций для обратного порядка следования главных многоступенчатых и в том числе двухступенчатых частных движений особого интереса не представляют, поскольку повторяют собственные прототипы. Но в совокупности с ними весьма просто и наглядно изучаются сопутствующие основным движениям – ортосферические ротации. А они есть неотъемлемая часть тригонометрически несогласованных движений в обеих геометриях!

Как известно [21, 24], исторически изначально Ламберт и Тауринус сделали первые шаги в направлении создания неевклидовой геометрии гиперболического типа, выдвинув её аналогию с геометрией сферы. Они же определили таковую как геометрию на сфере мнимого радиуса. Впоследствии благодаря исследованиям Клейна [25] и Минковского [6] стало ясно, что этот ранее гипотетический геометрический объект есть гиперлоид II. В данной главе был сделан шаг в обратном направлении. А именно установленные ранее в гл. 5А и 7А закономерности движений в гиперболической геометрии на основе сферическо-гиперболической аналогии  $i \cdot \gamma \rightarrow \varphi$  трансформированы в свои закономерности движений в сферической геометрии, включая их *полярное представление*. Последнее в общей квазиевклидовой тензорной тригонометрии приводится к той же форме (177А) с применением аналогии в тензорной форме  $i \cdot \Gamma \rightarrow \Phi$ .

Кроме того, тензорная тригонометрия в общей и элементарной форме даёт достаточно отформализованный и эффективный инструментарий для изучения и описания в едином ключе движений как в пространствах постоянной кривизны, так и в псевдоевклидовых и квазиевклидовых пространствах. В частности, описанные в гл. 5А – 7А закономерности движений в самой общей форме являются существенной частью СТО.

На наш взгляд, представляет особый интерес предпринять когданибудь *полное совместное изложение* обеих неевклидовых геометрий постоянной кривизны с неискажаемой интерпретацией на собственных гиперповерхностях – гиперсфереоиде в  $\langle Q^{n+1} \rangle$  и гиперлоидах в  $\langle P^{n+1} \rangle$ . В рамках геометрий в малом их объединяют общие методы тензорной тригонометрии, в рамках геометрий в большом – тригонометрические модели, отображаемые на проективной двухсторонней гиперплоскости с топологией сферы (гл. 5, 6, 11, 12; рис. 3 и 4).

## Глава 9А. Необходимо ли искривление пространства-времени в поле тяготения? (\*)

*Специальная теория относительности* (СТО) формулирует законы движения материи при абстрактно предполагаемом отсутствии именно поля тяготения, причём как в инерциальных, так и в неинерциальных системах отсчёта [8, 32]. Тензорно-тригонометрические возможности для этого были продемонстрированы в гл. 2А – 7А. Исходя из преобразований Лоренца для координат пространства и времени Пуанкаре в 1905г. выдвинул революционную (но оставшуюся практически незамеченной современниками) идею единого комплексного пространства-времени с псевдоевклидовой метрической формой [39; 37, с. 107; 66]. Пуанкаре ввёл как мнимую 4-координату времени и для неё особый масштабный коэффициент однородности – константу «с». (Существенным было то, что реальная скорость света не всегда совпадает с этим коэффициентом, но не превышает его.) Впоследствии Минковский в 1907 – 1908 гг. предложил развёрнутую, но овеществлённую модель псевдоевклидова пространства-времени [36; 37, с. 41]. Минковский также ввёл в новую релятивистскую теорию понятия о времени и пространстве подобных интервалах, изотропном конусе и т. д. Изложенные им идеи быстро получили всеобщее признание, так как почва для этого уже созрела.

Значительно ранее в рамках динамики и теории тяготения Ньютона неизбежно встали вопросы о происхождении силы инерции и силы тяготения материи. Сам Ньютон для объяснения инерции постулировал некоторое абсолютное пространство наряду с абсолютным временем, и таким образом он придал инерции и ускорению абсолютный смысл.

Мах (1883 г.), хотя и подверг известной критике эти взгляды Ньютона, но по существу он конкретизировал абсолютное пространство, связав его со звёздной системой Вселенной [37, с. 249 – 250]. В теории Маха, имеющей качественный и более философский характер, инерция и ускорение определяются однозначно – по отношению к выделенной системе отсчёта  $\tilde{E}_0$ , связанной с неподвижной в ней массой Вселенной в целом (*принцип Маха*). При этом их абсолютный смысл сохраняется. Система отсчёта Маха, в свою очередь, задаёт бесконечное множество галилеевски инерциальных систем отсчёта  $\langle \tilde{E}_j \rangle$  (т. е. инерциальных базисов). По определению, в этих системах отображается равномерное

(\*) Глава 9А имеет дискуссионный характер.

поступательное и прямолинейное движение по отношению к  $\tilde{E}_0$ . Например, с довольно высокой точностью система отсчёта  $\tilde{E}_1$  связана с центром массы каких-либо звёздных объектов, в том числе Солнца.

В связи с разработкой *общей теории относительности* (ОТО) [49], Эйнштейн обратил особое внимание на известные эмпириокритические высказывания Маха по вопросам механики и философии познания. Причём Эйнштейн вначале явно применял именно закон о тождестве инерционной и гравитационной масс для любого материального объекта. Этот закон использовался в неявном виде уже изначально в классической динамике, теории тяготения и в объединяющей их небесной механике. Как фундаментальный закон Природы он действует и в классических и в релятивистских формах. Независимость гравитационного ускорения от природы вещества экспериментально установил Ньютон и с высокой точностью подтвердил Этвёш в 1909 г. [8]. Возникла идея об одной и той же – *гравитационной* природе сил инерции и тяготения. Ввиду этого факта, Эйнштейн выдвинул *принцип эквивалентности*, в котором он полностью математически и физически отождествил инерцию и тяготение как дублирующие друг друга *тензорные понятия* [49].

С другой стороны, исходя из принципа Маха, закон о тождестве масс можно объяснить также тем, что для данного материального тела сила тяготения вызывается *активным* гравитационным воздействием на него со стороны других материальных объектов, а сила инерции вызывается *пассивным* гравитационным воздействием на него со стороны материи Вселенной в целом. Активное гравитационное воздействие вызывает ньютонову силу притяжения, а пассивное вызывает силу сопротивления ускорению. В собственном базисе, связанном с центром массы тела (материальной точкой), обе силы точь-в-точь прямо пропорциональны его массе как некоторому вещественному “гравитационному заряду”. Поэтому в такой трактовке второй закон механики Ньютона становится естественным дополнением к его же закону всемирного тяготения. Для придания второму закону аналогичного *всемирного* характера, но в  $\langle P^{3+1} \rangle$ , необходимо с учётом СТО перейти от внутреннего ускорения к его же абсолютному, прямо пропорциональному геометрическому аналогу – гиперболической кривизне мировой линии:

$$-F_{(i)} = F = m_0 \cdot g_{(i)} = m_0 \cdot c^2 / R_{(i)} = E_0 / R_{(i)}, \quad (205A)$$

где  $F$  – активная собственная сила любого происхождения, вызывающая отклонение *абсолютного движения* материальной точки в  $\langle P^{3+1} \rangle$  от прямолинейности;

$F_{(i)}$  – противодействующая ей пассивная собственная сила инерции (именно она всегда прямо пропорциональна массе  $m_0$ );

$m_0$  и  $E_0$  – масса и эйнштейнова энергия покоя материальной точки как её имманентные инерциально-гравитационные характеристики в собственном мгновенном псевдодекартовом базисе  $\tilde{E}_m$ ;

$R_{(i)} = 1/K_{(i)} = E_0 / F$  – радиус мгновенной абсолютной гиперболической кривизны мировой линии  $K_{(i)}$ , вычисляемый в *соприкасающейся псевдоплоскости*  $\langle P^{1+1} \rangle \subset \langle P^{3+1} \rangle$  в мировой точке местоположения массы  $m_0$  (гл. 10А); в ином виде  $E_0 = F \cdot R_{(i)}$  выступает как модуль крутящего момента активной силы  $F$ , вызывающей эту гиперболическую ротацию;  $c$  – скалярная *псевдоскорость* абсолютного движения любого тела или материальной точки вдоль её мировой линии в  $\langle P^{3+1} \rangle$  (см. в гл. 10А) – понятие, введённое Пуанкаре [39], в т. ч. как масштабный коэффициент ко времени для придания изотропности и однородности пространству-времени. В векторной форме « $c$ » именуется, как 4-скорость.

В такой, как в формуле (205А), *небесной* гравитационной трактовке инерции  $F_{(i)}$  есть центростремительная сила, направленная всегда в  $\langle P^{3+1} \rangle$  к мгновенному центру касательной к мировой линии гиперболы (псевдоокружности). Как тут не вспомнить знаменитое изречение средневекового мыслителя Николая Кузанского: “Вселенная есть сфера, центр которой повсюду”.

Небесная форма (205А) для второго закона механики Ньютона, как и должно быть, согласуется с первым и третьим законами:

$$F = 0 \leftrightarrow g_{(i)} = 0 \leftrightarrow K_{(i)} = 0, \quad -F_{(i)} = F.$$

При действии на одну и ту же материальную точку  $M$  одновременно нескольких разнонаправленных и, возможно, разнородных активных *собственных* сил они и соответствующие им *внутренние* ускорения суммируются как 3-векторы в мгновенном собственном евклидовом подпространстве  $\langle \mathcal{E}^{3,(m)} \rangle$  в  $\langle P^{3+1} \rangle$ , как пространству подобные элементы:

$$-F_{(i)} = F = \sum_{q=1}^t F_q = \sum_{q=1}^t m_0 \cdot g_q = m_0 \cdot g, \quad (206A)$$

$$g = \sum_{q=1}^t g_q. \quad (207A)$$

Принципиально то, что какие-либо  $F_j$  могут являться силой тяготения (в собственном подпространстве  $\langle \mathcal{E}^{3,(m)} \rangle$ ).

Аналогичным *геометрическим* образом суммируются частные векторные абсолютные гиперболические кривизны, задаваемые также в одной и той же мировой точке:

$$k = \sum_{q=1}^t k_q. \quad (208A)$$

В любой точке мировой линии движения материального тела абсолютные кривизны суммируются ковариантно собственным силам и внутренним ускорениям. Как следствие этого, при тригонометрической согласованности частных кривизн, то есть при их тождественных собственных псевдоплоскостях, они как и углы (см. § 5.6 и § 6.2 – Правило №2) имеют свойство алгебраической аддитивности.

Заметим, что для *сферической* кривизны аналогия этому проявляется, например, в оптической формуле Ньютона, которую можно применять последовательно, но каждый раз в какой-то определённой точке линии хода луча света:

$$1/R_1 + 1/R_F = 1/R_2,$$

где  $R_F$  – фокусное расстояние линзы или зеркала, либо положительное, либо отрицательное. (При акте отражения светового потока плоским зеркалом, для которого  $R_F = \pm \infty$  ( $K_F = 0$ ), направление и знак кривизны меняются на противоположные, а её модуль не изменяется.)

Согласно (207А), *в конкретной точке мировой линии массы  $m_0$  коллинеарные внутренние ускорения (как и вызывающие их собственные силы) подлежат алгебраическому суммированию, а неколлинеарные – геометрическому евклидову суммированию как абсолютные понятия.* В этом состоит принципиальное отличие характера суммирования (нерелятивистского) внутренних ускорений от характера суммирования (релятивистского) физических скоростей.

В абсолютном пространстве-времени Минковского  $\langle P^{3+1} \rangle$  согласно его 4-х мерной структуре (гл. 1А), системе отсчёта Маха  $\tilde{E}_0$  формально соответствуют собственные подпространства  $\langle \mathcal{E}^3 \rangle^{(0)}$  и  $\vec{ct}^{(0)}$ . Последние теперь с вполне материальным объяснением могут в некотором смысле трактоваться как “абсолютное пространство” и как “абсолютное время” Ньютона. Хотя истинно *абсолютным пространством* даже в такой трактовке является только само  $\langle P^{3+1} \rangle$  *в целом*. Оно понимается как пространство, само по себе, с теми или иными свойствами и в отличие от своих 2-х относительных подпространств никуда не вложено.

Особо отметим то, что в СТО с точки зрения любого *галилеевски инерциального* наблюдателя  $N_i$  любая непрямолинейно (или ускоренно) абсолютно движущаяся в  $\langle P^{3+1} \rangle$  система отсчёта как *мгновенный базис*  $\tilde{E}_m = \{x^{(m)}, ct\}$  остаётся в инерциальном качестве  $\tilde{E}_m \subset \langle \tilde{E}_j \rangle$ . (Этот факт, в частности, использовался в гл. 5А, 6А и 7А.) Однако с точки зрения произвольно движущегося вместе с ней наблюдателя  $N_m$  эта система отсчёта  $\tilde{E}_m$  галилеевски неинерциальная. С математической точки зрения она есть гауссова криволинейная система координат в *объемлющем*  $\langle P^{3+1} \rangle$ . На этом факте основан *релятивистский дуализм* в двойном описании ускоренных движений в  $\langle P^{3+1} \rangle$  [8, с. 24 – 31].

Отображение  $\tilde{E}_m \leftrightarrow \tilde{E}_m$  – изоморфизм. В  $\tilde{E}_m = \{\tilde{x}, \tilde{ct}\}$  координатная сетка имеет криволинейный характер. Например, для гиперболического движения системы  $\tilde{E}_m$  с  $N_m$  в целом её собственную искривлённую двумерную координатную сетку составляют криволинейные оси типа  $\tilde{x}^{(m)}(\tilde{ct}^{(m)}) = \ln \cosh(ct/R)$  с мгновенными центрами в точках  $O^{(m)}$ , см. (106А). Ввиду гладкости функциональной связи между координатами в базисах  $\tilde{E}_m$  и  $\tilde{E}_m$  первые дифференциалы гауссовых криволинейных координат  $d\tilde{x}_k$  и  $d\tilde{ct}$  в  $\tilde{E}_m$  суть однородные линейные функции от первых дифференциалов  $dx_k^{(m)}$  и  $dct^{(m)}$  в  $\tilde{E}_m$ , или  $d\tilde{u} = V_{(i)}^{-1} du^{(m)}$ . Скалярный элемент дуги мировой линии в  $\langle P^{3+1} \rangle$  в какой-либо точке  $M'$  вычисляется через его квадратичную форму двояко – либо в  $\tilde{E}_m$ , либо в  $\tilde{E}_m$ :

$$dct^2 = du^{(m)'} \cdot I^{\oplus} \cdot du^{(m)} = d\tilde{u}' \cdot \{V_{(i)}' \cdot I^{\oplus} \cdot V_{(i)}\} \cdot d\tilde{u} = d\tilde{u}' \cdot G_{(i)}^{\oplus} \cdot d\tilde{u} \text{ – см. § 11.1.}$$

В обратном порядке матрица конгруэнтного преобразования  $V_{(i)}$  получается однозначно из метрического тензора путём его общего конгруэнтного представления:

$$G^{\oplus} = R' \cdot D^{\oplus} \cdot R = (\sqrt{D^{\oplus}} \cdot R)' \cdot I^{\oplus} \cdot (\sqrt{D^{\oplus}} \cdot R) = V' \cdot I^{\oplus} \cdot V.$$

Как видим, *при переходе в ускоренные базисы исконная метрика базового пространства событий  $\langle P^{3+1} \rangle$  сохраняется*. В базовом плоском пространстве-времени Минковского применение гауссовых криволинейных координат в базисе  $\tilde{E}_m$  с целью внутреннего анализа ускоренных движений ведёт к привлечению для его математического описания абсолютного тензорного исчисления Риччи, без изменения топологии.

В  $\tilde{E}_m$  и  $\tilde{E}_m$  дифференциалы криволинейных координат одной и той же дуги имеют аффинную связность, задаваемую переменным тензором  $G_{(i)}^{\oplus}$  в пространстве-времени Минковского (метрический тензор инерции). Последний действует как функция координат любой мировой точки  $M$ . Существенно то, что тензор кривизны Римана – Кристоффеля для  $G_{(i)}^{\oplus}$  необходимо нулевой потому, что базовое пространство-время плоское. Искривление координатной сетки в движущейся системе отсчёта  $\tilde{E}_m$  происходит строго *по отношению к наблюдателю  $N_m$ , находящемуся всегда в центре мгновенного базиса  $\tilde{E}_m$* . С его смещением в собственном базисе  $\tilde{E}_m$  указанное искривление координат смещается точно также. С точки зрения *галилеевски инерциального наблюдателя  $N_i$*  никакого искривления координат в мгновенной системе отсчёта  $\tilde{E}_m$  вообще не происходит; местоположение наблюдателя  $N_m$  в  $\tilde{E}_m$  тогда не имеет значения. Например, движущийся ускоренно вместе с  $N_m$  прямой стержень так и воспринимается наблюдателем  $N_i$  как прямолинейный. Для наблюдателя  $N_i$ : в любом месте  $N_m$  в  $\tilde{E}_m$  метрический тензор  $I^{\oplus}$ .

Но *неинерциальный наблюдатель*  $N_m$  видит такой же стержень в  $\tilde{E}_j$  как искривлённый объект. Описанный релятивистский эффект имеет чисто координатную природу. Каких-либо дополнительных механических напряжений от этого *кажущегося* искривления, например, для стержня в  $\tilde{E}_m$  не возникает. Ведь одни и те же активные *собственные силы* в любых системах отсчёта, по-прежнему, определяются тождественно как абсолютные характеристики в  $\langle P^{3+1} \rangle$ . Симметричный метрический тензор  $G^{\oplus}_{(i)}$  для представления квадратичной формы интервала в этом базовом пространстве как скалярного произведения первых дифференциалов определяется независимо через мгновенные первые дифференциалы линейного элемента, выраженные во взаимных координатах:

$$\begin{aligned} dl^2 &= du_{\text{con}}' \cdot du_{\text{cov}} \equiv du_{\text{cov}}' \cdot du_{\text{con}} = du_{\text{con}}' \frac{du_{\text{cov}}}{du_{\text{con}}} du_{\text{con}} = du_{\text{con}}' G du_{\text{con}} \equiv \\ &\equiv du_{\text{cov}}' \frac{du_{\text{con}}}{du_{\text{cov}}} du_{\text{cov}} = du_{\text{cov}}' \hat{G} du_{\text{cov}}, \quad \text{где } \hat{G} = G^{-1}. \end{aligned}$$

В ускоренной системе отсчёта  $\tilde{E}_m$  действует искажённая псевдо-евклидова геометрия Минковского с переменным метрическим тензором инерции  $G^{\oplus}_{(i)}$  в криволинейных координатах, причём с нулевым тензором кривизны Римана – Кристоффеля. Роль *тензорного* аналога абсолютного *векторного* ускорения в  $\tilde{E}_m$  выполняют символы Кристоффеля.

В процессе создания ОТО (с 1913г.) Эйнштейн пришёл к выводу [49], что локальная метрика реального пространства-времени в присутствии тяготения в произвольно движущейся системе отсчёта  $\tilde{E}$  задаётся тоже двухвалентным симметричным тензором  $G^{\oplus}$ , а тяготение и инерции на тензорном уровне локально неразличимы (*принцип эквивалентности*). Это содержало новое и существенное расширение закона о тождестве инерционной и гравитационной массы. По Эйнштейну в ОТО локальные метрический тензор пространства-времени  $\langle R^{3+1} \rangle$  и приведённый к нему тензорный потенциал гравитационного  $G$ -поля суть физические аналоги. Отсюда в ОТО неизбежно вытекало гравитационное искривление реального пространства-времени и его *псевдориманов* характер. Это привело к её *геометризации*. Гравитация стала *геометрическим* понятием.

Инерция и ускорение стали такими же относительными понятиями в ОТО как движение и скорость. В этом также проявился *общий принцип относительности Эйнштейна*. Свободно движущиеся в присутствии гравитации системы отсчёта в ОТО стали равноправными. Это вылилось маргинально в широко известное и по научному честное утверждение Эйнштейна о равноправии систем Коперника и Птолемея. А именно метрический тензор в них может иметь *локально* стандартную форму  $I^{\oplus}$  в силу указанной полной компенсации инерции и тяготения. Поэтому все физические законы сохраняют локально также стандартную форму.



Но, во-первых, здесь был явный отказ от *принципа* Маха, определившего инерцию однозначно – в галилеевски инерциальной системе отсчёта  $\tilde{E}_0$ . Во-вторых, здесь нарушался *принцип соответствия*, так как при отсутствии активного гравитационного воздействия невозможно сделать вывод: в какой же по характеру системе отсчёта оказывается движущаяся материальная точка – инерциальной или неинерциальной, как об этом судят в СТО по символам Кристоффеля. После как бы удаления источника гравитации нет соответствующего предельного перехода к ньютоновским уравнениям, а только как линеаризция (аппроксимация).

На возможность обобщения теории относительности, но с развитием *полевой* теории тяготения и силовых полей иного рода как *материальным явлениям* указывал Пуанкаре ещё в 1905г. [39]. Во второй половине XX века интерес к полевой концепции гравитации возрождается [53, 64].

Например, в 1976 г. полевую концепцию гравитации с сохранением априорного пространства-времени Минковского довольно обстоятельно изложил Боулер (профессор Оксфордского университета) в известной фундаментальной, хотя и учебной монографии [8]. В ней он вовсе не стремился опровергнуть ОТО, но в предисловии осторожно замечает: “Поскольку физика – наука экспериментальная, не исключено, что в один прекрасный день чисто геометрический подход окажется неадекватным.” В указанной монографии Боулер последовательно развивает обобщение закона тяготения Ньютона и общего уравнения Пуассона для гравитации с учётом релятивистских поправок. Аналогией этому для него послужило соответствующее обобщение закона Кулона и уравнения Пуассона для электростатики при построении классической теории релятивистской электродинамики, где источник электромагнитного поля – сохраняющийся вектор электромагнитного тока. Принципиальное отличие заключается лишь в том, что, применительно к гравитации, источник самого поля – сохраняющийся тензор энергии-импульса материи и поля в том же  $\langle P^{3+1} \rangle$ . По аналогии с 3-м законом Ньютона гравитационное поле в  $\langle P^{3+1} \rangle$  имеет противодействие ему – собственный тензор энергии-импульса поля. (В ОТО такое формулирует геометрический принцип эквивалентности.) В итоге Боулер рассматривает теорию тяготения как *классическое поле*, соответствующее безмассовым частицам – гравитонам со спином 2.

В такой полевой *релятивистской теории гравитации* пространство-время Минковского как базовое сохраняет координатно-описательное значение для выполнения трансляций в  $\langle P^{3+1} \rangle$  релятивистского абсолютного движения из криволинейных гауссовых координат, деформированных в нём в результате действия поля тяготения. Кроме того, при таком общем полевом подходе к силам природы, а их четыре, тут ни одна не выделяется тем, что почему-то влияет на геометрию мира, вызывая искривление. Иначе это надо как-то убедительно объяснить.

С 80-х годов XX века появляются более решительные по изложению (а именно с полным отрицанием ОТО) публикации Логунова с рядом соавторов. В 2001 г. они были подытожены в фундаментальной монографии Логунова [33]. В ней, наряду с обстоятельным критическим анализом ОТО (с *псевдоримановым* искривлением пространства-времени, изложена как биметрическая концепция – *Релятивистская теория гравитации* (РТГ), значительно более развитая по построению. Гравитация чётко отделена от инерции как противодействующее *материальное* понятие, определяемое именно в базовом пространстве-времени Минковского. Принцип эквивалентности не действует. Эта теория, вполне корректно обобщающая СТО в гравитационном поле, по сути – *релятивистская небесная механика* (если в терминологии строго следовать Лапласу).

Вернёмся к основам теории Эйнштейна. Вследствие натуральной геометризации ОТО возникла её логическая неувязка с исходной СТО. Почему активное гравитационное воздействие (тяготение) в ОТО должно обязательно искривлять метрическое пространство-время, но теоретически эквивалентное пассивное гравитационное воздействие (инерция) подобного искривления в СТО не вызывает? Ввиду такого явного несоответствия ОТО и СТО Эйнштейн принял концепцию, что инерция может также эквивалентным образом локально искривлять пространство-время, как и воздействие активной гравитации. Поэтому они на дифференциальном уровне неразличимы между собой. Отсюда следовала как бы неприменимость законов СТО к описанию движений в ускоренных системах отсчёта даже при полном отсутствии гравитации, что весьма странно!?! Такая концепция, кстати, в полной мере отвечала позитивистской философии Маха и его склонности к римановой геометрии Вселенной. Поэтому, согласно Эйнштейну, СТО действует в ОТО на инфинитезимальном уровне, а  $\langle P^{3+1} \rangle$  с преобразованиями Лоренца в нём всегда мгновенное и как бы *касательное* в каждой мировой точке искривлённого пространства-времени (подобно касательной к кривой, самой по себе). Следовательно, система Маха  $\vec{E}_0$  каждый раз какая-то новая, не привязанная к чему-либо материальному, то есть надобность в ней в ОТО попросту отпадает.

В связи с той же антитезой отметим, что при дальнейшем развитии ОТО на основе принципа эквивалентности и натуральной геометризации прежде всего Гильбертом [17] в 1915–1917 гг. в результате анализа им же впервые полученных общерелятивистских уравнений движения материи было установлено противоречие новой теории фундаментальным парным *интегральным* законам сохранения энергии-импульса и момента количества движения в замкнутой материальной системе. Эти законы сохранения в ОТО действуют только локально в касательном  $\langle P^{3+1} \rangle$ . Гильберт отметил это как “характерную черту ОТО” (цитата).

По существу такое отклонение с математической точки зрения вызвано отсутствием в базисах ОТО десяти-параметрической группы движений, свойственной плоскому пространству-времени Минковского, вследствие трансформации движений в гравитационном поле в искривлённое псевдориманово пространство-время [32, с.163]. Позже его знаменитая ученица Амали Эмми Нётер (1918г.) сформулировала фундаментальную теорему математической физики, связывающую интегральные законы сохранения движения материальных объектов с параметрами симметрии базового метрического пространства-времени. Ввиду того что псевдориманово пространство-время не изотропно, в нём такие законы не могут соблюдаться принципиально. Поэтому в ОТО нужно было либо отказаться от интегральных законов сохранения движения, либо найти какие-то модификации теории (калибровки, граничные условия и т. д.). Первый путь обосновывает в ином – космическом масштабе всё тот же *perpetuum mobile*. Второй путь уже десятки лет вызывает неустанную деятельность теоретиков по совершенствованию ОТО.

Принцип эквивалентности как основа ОТО, согласно Эйнштейну, постулирует неразличимость понятий инерция и тяготение материи на локальном уровне в силу их тождественной гравитационной природы. Однако характер обобщённого  $G$ -поля математически определяется значимостью тензора кривизны Римана – Кристоффеля [42, с. 9]. Так, нулевой тензор кривизны должен отвечать отсутствию поля тяготения. Ненулевой тензор кривизны должен отвечать наличию поля тяготения. В первом случае, при *любых* реальных проявлениях только инерции, степень свободы функционального изменения метрического тензора как совокупности скалярных элементов значительно меньше, чем таковая во втором случае, при *любых* реальных проявлениях только тяготения. Рассмотрим особенности на дифференциально-геометрическом уровне.

\* \* \*

Риманово пространство, как известно [21], имеет инфинитесимально евклидову метрику. Но в силу его кривизны уже для вторых дифференциалов протяжённости в нём проявляются отклонения от евклидовой метрики как искривление, что функционально выражают символы Кристоффеля. Кроме того, римановы пространства в целом могут иметь значительно более разнообразные топологические формы, нежели евклидово пространство. Конкретное вещественное риманово пространство размерности  $m$  может быть вложено без изменения его внутренней геометрии и топологических свойств в некоторое евклидово надпространство  $\langle \mathcal{E}^n \rangle$ , в том числе с изгибанием. Причём минимальный порядок вложения  $n_{\min}$  априори находится в интервале от  $m$  до  $\infty$ .

Особо отметим то, что характеристика  $n_{\min}$  определяется в совокупности внутренней геометрией и топологией риманова  $m$ -пространства. Например, двумерная псевдосфера Бельтрами (гл. 6А) есть риманово 2-пространство постоянной отрицательной кривизны, топологически эквивалентное цилиндру (без оснований). Она имеет значение  $n_{\min} = 3$ . С другой стороны, поверхность Лобачевского – Больяи есть риманово 2-пространство постоянной отрицательной кривизны, топологически эквивалентное евклидовой плоскости. Она имеет  $n_{\min} > 3$ . Чтобы её вложить и описать в каком-то  $\langle \mathcal{E}^n \rangle$  (*обобщённая задача Бельтрами*), значение  $n_{\min}$  должно быть не менее 4-х – см. гл. 12. Вполне возможно, что с этой целью её нужно представить как двумерную поверхность с главными радиусами кривизны «+ R» и «- R» и с закрученной главной нормалью. Задача Бельтрами обобщается аналогично и далее – при  $m > 2$ . Но она относилась только к евклидову надпространству.

В более подходящем тут псевдоевклидовом метрическом надпространстве  $\langle P^{m+1} \rangle$   $m$ -поверхность Лобачевского – Больяи отображается в целом изометрично на верхнюю часть гиперboloида II Минковского при  $n_{\min} = m + 1$ . В это же надпространство в целом изометрично отображается  $m$ -псевдосфера Бельтрами на гиперboloид I Минковского (см. гл. 6А). В свою очередь, “ $m$ -гофра” – риманово пространство нулевой кривизны и топологически эквивалентное евклидову  $m$ -пространству. Она в целом отображается изометрично на  $\langle \mathcal{E}^n \rangle$  или на  $\langle P^n \rangle$ , то есть при  $n_{\min} = m$ .

Но классическая *общая риманова геометрия* имеет чётко выраженный дифференциальный характер, определяемый изначально через метрический тензор  $G^{\oplus}$  (или  $G^{\otimes}$ ) как матричную функцию точечного элемента (псевдо)риманова пространства  $\langle R^{3+1} \rangle$ . Это есть по изначальной своей сути внутренняя геометрия в малом. В таком ракурсе общая риманова геометрия существенно отличается от *однородных геометрий в целом*, в которых особое значение имеют понятия: “группы движений”, “свобода движения фигур”, “топологические свойства”. К таковым целостным и однородным геометрическим системам относятся, например, евклидова и псевдоевклидова геометрии, эллиптическая геометрия Римана, гиперболическая геометрия Лобачевского – Больяи, в том числе изометричная ей геометрия гиперboloида II (гл. 12). Понятие “вложимость” по отношению к (псевдо)евклидову надпространству для (псевдо)риманова метрического пространства в целом с неопределённой топологией не имеет какого-либо смысла. Это сказывается на неопределённости для него значения  $n_{\min}$ . Но если ограничиться изучением какой-либо топологически аффинно-эквивалентной *области* (псевдо)риманова  $m$ -пространства, то значение  $n_{\min}$  в целом определится его локальными дифференциально-геометрическими свойствами.

Двухвалентный симметричный тензор содержит в себе максимально  $k = m \cdot (m + 1)/2$  независимых друг от друга функциональных скалярных элементов  $g_{ij}$ . Поэтому рассматриваемая область риманова  $m$ -пространства всегда вложима в  $\langle \mathcal{E}^k \rangle$  без изменения своей внутренней геометрии. Далее зададим аналитически внешним образом указанную область риманова  $m$ -пространства в  $\langle \mathcal{E}^n \rangle$ , где  $n \geq m$ , в каком-либо его декартовом базисе  $\tilde{E}_1$  через  $n \times 1$  радиус-вектор  $\mathbf{u}$  соответственно с  $m$  степенями свободы движений-трансляций. Пусть каждой степени свободы этого радиус-вектора отвечает гауссова криволинейная координата  $\tilde{\xi}_1$  риманова  $m$ -пространства. Тогда имеется функциональное отображение  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\tilde{\xi})$ .

В каждой точке указанной области риманова  $m$ -пространства существует непрерывно дифференцируемая в ней матрица Якоби  $d\mathbf{u}/d\tilde{\xi}$ . Согласно Гауссу и Риману, внутренняя геометрия этой области определяется непрерывно функционально через внутреннюю гомомultiпликацию – метрический тензор:

$$G^{\oplus} = \left( \frac{d\mathbf{u}}{d\tilde{\xi}} \right)' \cdot \frac{d\mathbf{u}}{d\tilde{\xi}} \quad (\det G^{\oplus} > 0),$$

$$\|d\mathbf{u}\|_E^2 = d\mathbf{u}' \cdot d\mathbf{u} = d\tilde{\xi}' \cdot G^{\oplus} \cdot d\tilde{\xi}.$$

В свою очередь, для псевдориманова  $m$ -пространства в  $\langle P^{n+q} \rangle$ , где  $n + q \geq m$ , имеется псевдоаналогия (гл. 4):

$$G^{\ominus} = \left( \frac{d\mathbf{u}}{d\tilde{\xi}} \right)' \cdot I^{\ominus} \cdot \frac{d\mathbf{u}}{d\tilde{\xi}} \quad (\text{причём при } q = 1 \det G^{\ominus} < 0),$$

$$\|d\mathbf{u}\|_P^2 = d\mathbf{u}' \cdot I^{\ominus} \cdot d\mathbf{u} = d\tilde{\xi}' \cdot G^{\ominus} \cdot d\tilde{\xi}.$$

Для полной функциональной независимости всех  $k$  элементов симметричного метрического тензора  $G^{\oplus}$  нужно, чтобы выполнялось неравенство  $n \geq k$ . При  $n < k$  риманово  $m$ -пространство частично уплощается, в том числе полностью при  $n = m$  в евклидово  $m$ -пространство. Наоборот, при  $n > k$  Theorem Egregium Гаусса иногда позволяет понизить порядок вложения ограниченной области риманова  $m$ -пространства, по крайней мере, до  $n_{\min} = k$ , используя операцию изгибания. Например, регулярный фрагмент любой кривой, самой по себе ( $m = 1$ ), изгибанием всегда можно трансформировать в отрезок евклидовой прямой ( $k = n_{\min} = 1$ ). Аналогично топологически аффинно-эквивалентную и регулярную область произвольной римановой поверхности ( $m = 2$ ) изгибанием всегда можно вложить в  $\langle \mathcal{E}^3 \rangle$  без изменения её внутренней геометрии ( $k = n_{\min} = 3$ ). Это относится и к области поверхности Лобачевского – Больяи, но не к ней в целом, что было доказано впервые Гильбертом.

Метрический тензор инерции  $G_{(i)}^{\oplus}$  как функция точечного элемента псевдориманова пространства ведёт к  $n_{\min} = m = 4$  степени свободы для скалярных элементов  $g_{ij}$ . В минимальном *плоском* пространстве вложения  $\langle P^{3+1} \rangle$  в гауссовых криволинейных координатах в  $\tilde{E}_m$  он задаёт искажённую псевдоевклидову геометрию Минковского. (Отметим, что в обычных – псевдоевклидовых координатах здесь же он постоянен – см. § 11.1.). С другой стороны, общий метрический тензор  $G^{\oplus}$  псевдориманова четырёхмерного пространства  $\langle R^{3+1} \rangle$  ведёт к  $n_{\min} = k = 4.5/2 = 10$  степеней свободы ( $> m = 4$ ) для скалярных элементов  $g_{ij}$ . В гауссовых криволинейных координатах он задаёт псевдориманову геометрию, например, в минимальном пространстве вложения  $\langle P^{c+d} \rangle$ , для которого  $c+d=10, c \geq 3$ . В *первом* случае, для которого  $n_{\min} = m = 4$ , тензор кривизны Римана – Кристоффеля обязательно нулевой. Во *втором* случае, для которого  $n_{\min} = k = 10 > m$ , он никак не может быть нулевым из-за кривизны псевдориманова пространства, вложенного в  $\langle P^{c+d} \rangle$ . Никаким выбором локального базиса нельзя изменить риманову кривизну [41], нельзя ненулевой тензор кривизны сделать нулевым и наоборот. Поэтому, если принимается как базовый принцип Маха, то принцип эквивалентности в *общем случае* не реализуется. (При свободном движении материальной точки в поле тяготения **собственные векторные силы тяготения и инерции** полностью компенсируют друг друга, согласно третьему закону механики Ньютона и закону о тождестве инерционной и тяготеющей масс. Но тензорные “поле тяготения” и “поле инерции” даже локально в общем случае не компенсируют друг друга.) Отметим здесь то обстоятельство, что так называемое *эффективное псевдориманово пространство-время*  $\langle R^{3+1} \rangle$ , используемое в РТГ для упрощённого координатного описания движения материи в силу его аффинно-эквивалентной топологии имеет тот же минимальный порядок вложения  $n_{\min} = k = 10$ .

\* \* \*

Однако для простейших, то есть не общих, форм поля тяготения и при этом весьма умозрачных (откуда, видимо, возникла идея принципа эквивалентности) нетрудно локально отождествить проявление активной гравитации (тяготения) и пассивной гравитации (инерции). Например, свободное *прямолинейное* физическое движение под действием стационарного однородного поля тяготения математически эквивалентно гиперболическому абсолютному движению в  $\langle P^{3+1} \rangle$ , под действием постоянной *тангенциальной* собственной силы (рис. 3А). Свободное *круговое* физическое движение под действием стационарного сферически симметричного поля тяготения математически эквивалентно псевдовинтовому абсолютному движению в  $\langle P^{3+1} \rangle$  под действием постоянной *нормальной* собственной силы – см. в гл. 10А).

Проиллюстрируем сказанное на ранее рассмотренном эффекте СТО замедления собственного времени равномерно ускоренного движения, отображённого косинусной формулой на рис. 3А (гл. 5А), в сравнении с таковым же для движения в стационарном поле гравитации. Применим дифференциальную форму гиперболического движения в (92А), как локально универсальную для *любых* ускоренных физических движений. С точки зрения покоящегося инерциального  $N_1$  в  $\tilde{E}_1$ , согласно СТО, имеем:

$$\left. \begin{aligned} d \operatorname{ch} \gamma &= d \frac{dct}{dct} = g_{(i)} d\chi/c^2 = F d\chi/(m_0 \cdot c^2) = dA/E_0, \\ \frac{dct}{dct} &= \frac{dt}{dt} = \operatorname{ch} \gamma = 1 + A/(m_0 \cdot c^2) = 1 + A/E_0. \end{aligned} \right\} \quad (209A)$$

(См. также аналогичные скалярные формулы для прямолинейных движений в гл. 5А и на рис. 3А – т.е. простейших ускоренных физических движений.) То же самое замедление собственного времени с точки зрения неинерциального наблюдателя  $N_m$  *внутри* космического корабля можно трактовать по Эйнштейну локально так, как будто бы наблюдатель находится в эквивалентном стационарном поле тяготения с напряжённостью  $g_{(f)} \equiv g_{(i)}$ :

$$\left. \begin{aligned} d \frac{dct}{dct} &= g_{(f)} d\chi/c^2 = F d\chi/(m_0 \cdot c^2) = dE_{(f)}/E_0 = d(-P)/c^2, \\ \frac{dct}{dct} &= \frac{dt}{dt} = 1 + E_{(f)}/(m_0 \cdot c^2) = 1 + E_{(f)}/E_0 = 1 + (-P)/c^2 > 1. \end{aligned} \right\} (P < 0) \quad (210A)$$

В РТГ поле тяготения определяется и действует именно в плоском  $\langle P^{3+1} \rangle$  как базовом пространстве-времени. Но при математическом описании в нём движения материи (в том числе света) поле тяготения как бы *деформирует* координатную сетку в  $\langle P^{3+1} \rangle$ , изменяя его метрику [8, с. 89 – 105]. Например, формула (210А) в случае простейшего эквивалентного поля тяготения даёт соответствующее ему изменение масштаба времени. Если координаты остаются (полу)геодезическими, то деформированное  $\langle P^{3+1} \rangle$  преобразуется вместе с осями координат в искривлённое *эффективное псевдориманово пространство-время* [33, с. 32 – 36]. Понятно, что топология этих пространств по сути одна и та же – топология аффинного пространства. Формально устранив деформирующее воздействие поля тяготения на координаты, мы также устраним и это *деформационное* искривление пространства-времени. В результате приходим к описанию движения в исконном  $\langle P^{3+1} \rangle$  под воздействием силы тяготения, как и любой иной собственной силы. В *относительной* трактовке такие движения рассматривались в гл. 7А. Все расчёты и оценки в сферически симметричном поле тяготения

значительно упрощаются, если при этом гравитационный потенциал  $P$  в порядке аппроксимации принимается *скалярной* характеристикой, как в вышеуказанном примере (210А). Пусть тот же скалярный потенциал отвечает именно относительно неподвижной в  $\tilde{E}_1$  некоторой астрономической массе  $M_0$ . Для реализации такого подхода примем два следующих условия.

1. Система отсчёта  $\tilde{E}_1$ , связанная с центром астрономической массы  $M_0$ , принадлежит множеству  $\langle \tilde{E}_j \rangle$  галилеевски инерциальных систем, задаваемых системой Маха  $\tilde{E}_0$ .
2. Движение материи в поле тяготения астрономической массы  $M_0$  описывается именно в  $\tilde{E}_1$  в базовом пространстве-времени Минковского.

Центр базиса  $\tilde{E}_1$  удобно расположить в центре астрономической массы  $M_0$ , где собственный гравитационный потенциал последней нулевой из-за отсутствия тяготения. (Последнее было доказано ещё в XVIII веке Кавендишем.) Например, система  $\tilde{E}_1$ , связанная с центром массы Солнца (*система Коперника*), с высокой степенью точности может считаться галилеевски инерциальной системой отсчёта и принадлежать множеству  $\langle \tilde{E}_j \rangle$ . Она как *приближение* связана с Землёй ( $v \ll c$ ).

В связи с этим покажем, что известные наблюдательные *общерелятивистские* эффекты, так или иначе вызываемые полем тяготения Солнца, объясняются *на элементарном уровне* на основе СТО и теории тяготения Ньютона. При этом в данных расчётах дополнительно учитывается пока формально вышеуказанный *зйнштейнов эффект замедления собственного времени в поле тяготения*. Обсуждаемые здесь общерелятивистские эффекты рассматриваются с точки зрения удалённого земного наблюдателя  $N_1$  в  $\tilde{E}_1$  как бы вне поля тяготения. Такая аппроксимация даёт первый порядок точности по гравитационной постоянной, что пока только и измеряемо при реальных наблюдениях.

Из (210А) следует приближённая формула, выражающая влияние *скалярного* гравитационного потенциала на течение собственного времени:

$$\frac{d\dot{\tau}_1}{d\dot{\tau}_2} = [1 + (-P_2)/c^2]/[1 + (-P_1)/c^2] \approx 1 + [(-P_2) - (-P_1)]/c^2. \quad (211A)$$

Из неё видно, что собственное время  $\dot{\tau}$  течёт медленнее в той точке, где отрицательный потенциал меньше. При  $P_1 = 0 = \max$  имеем, что  $\dot{\tau}_1 = \dot{\tau}$  – координатное время в  $\tilde{E}_1$ . Подставив в (210А) значение ньютонова гравитационного потенциала Солнца, получаем для околосолнечного пространства известную и довольно точную оценку:

$$d\dot{\tau} = d\dot{\tau} / (1 + f \cdot M_0 / r \cdot c^2) \approx d\dot{\tau} \cdot (1 - f \cdot M_0 / r \cdot c^2) = d\dot{\tau} \cdot (1 + P_g / c^2). \quad (212A)$$



В ОТО и в РТГ имеется аналогичная *тензорная* оценка замедления собственного времени в поле тяготения через угловой скалярный элемент метрического тензора псевдориманова пространства-времени (реального и эффективного):

$$\frac{d\dot{c}\tau}{dct} = \sqrt{-g_{44}} \approx 1 - (-P_s)/c^2 < 1,$$

$$-g_{11} = (1 + 2P_s)/c^2 + \dots < 1 \quad (\text{см. например [37, с. 212; 33, с. 88]}).$$

Простейшее и наглядное отображение *активной* гравитации таково, что поле тяготения в окрестности каждой мировой точки попросту деформирует координатную сетку в  $\langle P^{3+1} \rangle$  [8, с. 89 – 105]. Например, в стационарном поле тяготения координата  $\vec{c}\tau$  как бы растягивается. В свою очередь, локальные наклоны мировых линий по отношению к  $\vec{c}\tau$  как бы уменьшаются, в том числе и наклон изотропного конуса. Но геометрический и физический смысл последнего сохраняется. С учётом этого локальная скорость распространения света, как и других электромагнитных волн (частиц), в поле тяготения *с точки зрения удалённого наблюдателя*  $N_1$  как бы уменьшается следующим образом:

$$\dot{c}/c \approx 1 - (-P)/c^2 < 1. \quad (213A)$$

Другой известный и наблюдаемый на Земле общерелятивистский эффект – “красное смещение” спектра излучения Солнца объясняется по Эйнштейну замедлением частоты электромагнитных колебаний на поверхности Солнца, согласно её значительному отрицательному гравитационному потенциалу:

$$\dot{v}/v = \frac{d\dot{c}\tau}{dct} \approx 1 - f \cdot M_0/r \cdot c^2. \quad (214A)$$

На величину отклонения, конечно, оказывает влияние эффект Допплера (гл. 7А). Более точная оценка, приближающаяся к вышеуказанной, получается для полюсов вращения Солнца. (Земным потенциалом здесь, разумеется, пренебрегают как сравнительно небольшим.)

\* \* \*

В качестве заключительного примера рассмотрим в базисе  $\tilde{E}_1$  в  $\langle P^{3+1} \rangle$  элементарную трактовку самого известного наблюдательного общерелятивистского эффекта – искривления светового луча в поле тяготения Солнца. Данное искривление максимально и обнаружимо при наблюдениях на Земле, когда световой луч от какой-либо звезды (с известными координатами на небосводе) проходит при полном

солнечном затмении вблизи солнечного диска. Оно определяется по отклонению траектории светового луча и соответственно угловой координаты звезды. О влиянии *абберации* на наблюдение звёзд указано в гл. 7А. Свою лепту в искажение координат звезды (чем она ближе к нам) вносит *параллакс*. Но эти поправки малосущественны в сравнении с рассматриваемым гравитационным эффектом.

Для *элементарной оценки* данного эффекта можно принять, что земной наблюдатель  $N_1$  физически неподвижен в системе  $\tilde{E}_1$ , связанной с центром массы Солнца. Искривление светового луча при прохождении вблизи Солнца обусловлено гравитационным притяжением фотонов как световых материальных частиц с собственной массой  $m_L$  в  $\tilde{E}_1$ . Принципиальная особенность такого вида частиц, как известно, заключается в том, что они имеют нулевую массу покоя. Поэтому их собственная масса всегда определяется только в состоянии движения по изотропному конусу по формуле Планка – Эйнштейна. Здесь на изотропном конусе каким-то загадочным образом для массы фотона реализуется раскрытие неопределённости типа  $m_L = m_0 \cdot \text{ch } \gamma = 0 \cdot \infty$ .

Пусть материальная точка вообще массой  $m_0$  движется относительно астрономической массы  $M_0$  с мгновенной скоростью  $\mathbf{v}$  под углом  $\varepsilon$  к радиус-вектору  $\mathbf{r}$ , соединяющему центр массы  $M_0$  и точку  $m$ . Все эти характеристики выражаются в  $\tilde{E}_1$ , связанной с центром массы  $M_0$ . Собственная сила тяготения  $F$  массы  $m_0$  к массе  $M$  есть инвариант в любых галилеевски инерциальных системах отсчёта из множества  $\langle \tilde{E}_i \rangle$ , в том числе в  $\tilde{E}_1$  и в  $\tilde{E}_m$ . Если  $M_0 \gg m_0$ , то материальная точка  $m$  в каждый момент времени совершает локально псевдовинтовое движение в  $\langle P^{3+1} \rangle$  с абсолютным псевдоевклидовым радиусом  $R$ . Согласно закону тяготения Ньютона и динамике СТО, в  $\tilde{E}_m$  имеем:

$$\mathbf{F} = F \cdot \mathbf{e}_\beta = (f \cdot M \cdot m_0 / r^2) \cdot \mathbf{e}_\beta = (m_0 \cdot c^2 / R) \cdot \mathbf{e}_\beta = \overset{\perp}{F} \cdot \mathbf{e}_\eta + \bar{\bar{F}} \cdot \mathbf{e}_\alpha. \quad (215A)$$

Здесь используется разложение собственной силы и внутреннего угорения на две взаимно-ортогональные проекции – нормальную и тангенциальную (см. гл. 7А). В базисе  $\tilde{E}_1$  имеем евклидовы проекции:

$$\overset{\perp}{F} = \sin \varepsilon \cdot (f \cdot M_0 \cdot m_0 / r^2) = m_0 \cdot c^2 / \bar{R} = m \cdot v^2 / \rho, \text{ см. также в главе (10A),}$$

$$\bar{\bar{F}} = \cos \varepsilon \cdot (f \cdot M_0 \cdot m_0 / r^2) = m_0 \cdot c^2 / \bar{R} = \frac{d(mv)}{dt}, \text{ см. также в главе (5A).}$$

Тангенциальная проекция вызывает ускорение движения материальной точки  $m_0$  вдоль вектора скорости  $\mathbf{v}$ . Но для световой частицы (фотона) она только изменяет его массу  $m_L$  в процессе движения: либо увеличивает, либо уменьшает её в зависимости от направления этой проекции по отношению к вектору  $\mathbf{v}$ . Понятно, что на сферическое искривление траектории светового луча эта проекция никак не влияет.

Напротив, нормальная проекция вызывает искривление траектории светового луча локального радиуса  $\rho$  как центростремительная сила. Для фотонов формулы для проекций силы тяготения приобретают вид:

$$\overset{\perp}{F} = \sin \varepsilon \cdot (f \cdot M_0 \cdot m_L / r^2) = m_L \cdot c^2 / \rho = E_L / \rho \quad (\text{так как } \rho \approx R, \ v \approx c),$$

$$\overset{\parallel}{F} = \cos \varepsilon \cdot (f \cdot M_0 \cdot m_L / r^2) = c \cdot \frac{dm_L}{dt} = \frac{dE_L}{dct},$$

где  $m_L = hv/c^2$  – масса фотона в состоянии движения.

В теории гравитационного искривления луча света [49, с. 194–195] как вспомогательный параметр применяется расстояние «b» от центра массы  $M_0$  до точки пересечения его двух асимптот:  $b \approx r \cdot \sin \varepsilon$ . С учётом значения этого параметра оценка искривления луча света вычисляется в дифференциальной и интегральной формах в виде:

$$d\delta_1 \approx dl/\rho = d(-r \cdot \cos \varepsilon)/\rho = b d(-\text{ctg } \varepsilon)/\rho = [f \cdot M_0 / (b \cdot c^2)] \cdot \sin \varepsilon d\varepsilon = [-P(\varepsilon)/c^2] d\varepsilon,$$

$$\delta_1 \approx [f \cdot M_0 / (b \cdot c^2)] \cdot \int_0^{\pi} \sin \varepsilon d\varepsilon = 2f \cdot M_0 / (b \cdot c^2) = 2 \cdot (-P_{\max}) / c^2.$$

Именно такая первоначальная оценка была получена Эйнштейном в 1911г. [37, с. 202], а исторически впервые она была вычислена, как известно, Зольднером ещё в 1801г. [6, с. 7 – 34]. Фактически эта оценка следует из теории тяготения Ньютона. Впоследствии в 1915 г. в связи с разработкой ОТО Эйнштейн дал общерелятивистскую поправку к искривлению луча света как бы в сферически-симметричном стационарном поле тяготения. При этом теоретическое искривление луча оказалось в два раза больше [37, с. 204, 212, 236].

Оценку второго слагаемого для искривления светового луча осуществим, применяя аналогию с распространением света в оптической среде с переменным показателем преломления и соответственно с его переменной скоростью. Здесь мгновенный угол падения образуется вектором скорости света  $\mathbf{v}$  и радиус-вектором  $\mathbf{r}$ . До их ортогональности (в перигелии) этот угол равен  $\varepsilon$ , а затем он равен  $(\pi - \varepsilon)$ . В первой части траектории скорость света уменьшается, а во второй её части она увеличивается, согласно (212А) и (213А). По закону Снеллиуса это интерпретируется математически и физически как *дополнительное* искривление светового луча в сторону центра массы  $M_0$ :

$$\sin \varepsilon / \sin (\varepsilon - d\delta_{II}) = \dot{c} / (\dot{c} - d\dot{c}) \leftrightarrow \varepsilon < \pi/2,$$

$$d\delta_{II} = 0, \quad d\dot{c} = 0 \leftrightarrow \varepsilon = \pi/2,$$

$$\sin (\pi - \varepsilon) / \sin [(\pi - \varepsilon) + d\delta_{II}] = \dot{c} / (\dot{c} + d\dot{c}) \leftrightarrow \varepsilon > \pi/2;$$

$$d\delta_{II} = \operatorname{tg} \varepsilon d(\mp \dot{c})/\dot{c} \approx \operatorname{tg} \varepsilon d(\mp \dot{c})/c \approx$$

$$\approx \operatorname{tg} \varepsilon d(f \cdot M_0 \cdot \sin \varepsilon)/(b \cdot c^2) = [(f \cdot M_0)/(b \cdot c^2)] \cdot \sin \varepsilon d\varepsilon = [(-P)/c^2] d\varepsilon = d\delta_I.$$

Отсюда следует, что  $\delta = \delta_I + \delta_{II} = 4f \cdot M_0 / (b \cdot c^2) = 4 \cdot (-P_{\max}) / c^2$  – значение, впервые *через абсолютное тензорное исчисление* и ОТО теоретически предсказанное Эйнштейном в 1915г. и до сих пор принятое как лучшая оценка этого эффекта. Оно было экспериментально подтверждено уже в 1919 г Эддингтоном при наблюдении солнечного затмения в Бразилии. В рамках РТГ [33, с. 176 – 186] строго однозначно, нежели в рамках ОТО, объясняется известная небольшая общерелятивистская поправка Эйнштейна к нерелятивистскому смещению перигелия Меркурия.

\* \* \*

Как установил Фок, предсказания ОТО для общерелятивистских эффектов в Солнечной системе, строго говоря, неоднозначны [46]. А именно они зависят от задаваемых координатных условий. При изменении начального базиса эти эффекты изменяются нековариантно. Эйнштейн для однозначности такого рода оценок весьма искусственно рассмотрел эти эффекты как бы в слабом стационарном поле тяготения, фактически вложенном в пространство-время Минковского [33, с. 156–165]. В РТГ и в упрощённом скалярном варианте, изложенном выше, это делается вполне естественным и однозначным образом.

Как видно из приведённых выше аргументов, основная версия ОТО о математически произвольном – псевдоримановом искривлении метрического пространства-времени в некотором G-поле, объединяющем инерцию и тяготение на основе принципа эквивалентности, является весьма спорной и противоречивой. Дальнейшее развитие теории относительности и её приложений в космологии показало, что эта версия без существенной на то необходимости значительно усложнила теоретическую картину мироздания, придав к тому неопределённость в выводах и предсказаниях, а отсюда и вызвав жаркие дискуссии.

С учётом этих обстоятельств с середины XX века оживился интерес к концептуально иным принципам построения релятивистской небесной механики [см. например 53, 64, 9]. Выходят в свет фундаментальные публикации, например [33], где развивается *релятивистская теория гравитации* (РТГ) в базовом пространстве-времени Минковского  $\langle P^{3+1} \rangle$ . В этой теории источником поля тяготения является сохраняющийся тензор энергии-импульса материи и гравитационного поля). Формально в РТГ в связи с искажающим влиянием гравитационного поля в  $\langle P^{3+1} \rangle$  на его метрику вводится, но только для математического описания движения, *эффективное псевдориманово пространство-время* с той же аффинной топологией и своими геодезическими координатами).

Как же последнее можно трактовать реально *физически*? Ведь именно благодаря такому искажению в РТГ объясняются общерелятивистские эффекты, выходящие как бы за рамки СТО. Для этого, на наш взгляд, наиболее рационально вначале обратиться к остающемуся неизбывным и в общей теории закону сохранения энергии. Тогда простым логическим путём приходим к выводу, что обсуждаемые общерелятивистские эффекты в Солнечной системе имеют чисто координатно-описательную трактовку, с точки зрения галилеевски инерциального наблюдателя  $N_{(i)}$ , находящегося как бы *вне поля тяготения* (или в слабом поле).

Оценим, например, эффект “красного смещения” спектра излучения Солнца в его собственном поле тяготения с фундаментальной позиции закона сохранения энергии Гельмгольца в его квантово-механической трактовке (см. например [9, с. 116]):

$$h\nu + E_{(i)} = h\nu - (-P) \cdot m_L \dot{=} h\nu < h\nu, \quad (216A)$$

где  $m_L = h\nu/c^2$  – масса фотона в движении по формуле Планка – Эйнштейна. Откуда далее имеем:

$$h\nu \cdot [1 - (-P)/c^2] = h\nu \dot{,} \quad \text{или} \quad \nu \cdot [1 - (-P)/c^2] = \nu \dot{,}$$

Конечный результат такой же, какой даёт вышеизложенный упрощённый скалярный подход, но физическая картина явления вырисовывается совершенно иная. В такой непосредственной трактовке эффекта излучение на поверхности Солнца, то есть в сильном поле тяготения, имеет *исходную* частоту (как например на Земле или вообще вне поля тяготения). Но затем эта частота уменьшается по мере удаления фотонов от Солнца за счёт преодоления его отрицательного гравитационного потенциала. Если допустить, что наблюдатель и источник фиксируемого излучения в данном случае меняются местами, то, согласно принципу относительности, наблюдатель теоретически зафиксирует наоборот – “синее смещение” спектра излучения источника на Земле. Это вовсе не означало бы какой-то локальный эффект ускорения времени на Земле. *Аналогичную трактовку допускает исходная формула (209A), если для неё также принять замедление собственного времени материальной точки (в СТО) как прямое следствие относительного уменьшения её “энергетического потенциала” в состоянии относительного покоя (с точки зрения опять-таки инерциального наблюдателя  $N_{(i)}$  в  $\dot{E}_1$ ).*

Следовательно, начально сильное гравитационное поле Солнца, сквозь которое происходит восприятие общерелятивистских эффектов даже земным наблюдателем, находящимся в сравнительно слабом поле, можно уподобить весьма протяжённой *гравитационной линзе*. Вообще же оно может либо ускорять, либо замедлять фиксируемые события и, разумеется, исказить пространственные координаты в зависимости от

разности гравитационных потенциалов в мировых точках наблюдателя и фиксируемого события. (В специальной научной литературе понятие “гравитационная линза” стало использоваться довольно широко [6].) Реальное движение материи, совершаемое в гравитационном поле в  $\langle P^{3+1} \rangle$  по законам кинематики и динамики СТО под действием силы тяготения Ньютона, воспринимается наблюдателем  $N_1$  вне этого поля сквозь вышеуказанную гравитационную линзу с общерелятивистским искажением, причём без изменения топологии пространства-времени. В поле тяготения *по месту события* общерелятивистского искажения псевдодекартеских координат не происходит. Поэтому локальное математическое описание движения, реставрированное от искажающего влияния поля тяготения, не должно выходить за рамки СТО.

*Такая интерпретация отличается от принятой трактовки тем, что локальное замедление собственного времени в поле тяготения заменяется на его внешне воспринимаемое относительное замедление. Сам по себе гравитационный потенциал никак не влияет ни на течение локального собственного времени, ни на какие-либо процессы; на них влияет именно различие потенциалов в точках события и наблюдения. (Ситуация аналогична имеющейся в СТО, поэтому и здесь возможен “парадокс близнецов”, но в гравитационном варианте.)*

В теории искривления светового луча в поле тяготения Солнца составляющая  $\delta_I$  является ньютоновской. Напротив, составляющая  $\delta_{II}$  является неньютоновской, или эйнштейновской. Именно она вызывает дополнительное искривление светового луча в поле тяготения в  $\langle P^{3+1} \rangle$ . Их фиксирует *координатно* в  $\langle R^{3+1} \rangle$  земной наблюдатель  $N_1$ , находясь в ослабленном поле тяготения, сквозь гравитационную линзу. (Например, если смотреть на траекторию прямого луча света от обычного прожектора в атмосфере сквозь какую-нибудь оптическую линзу, то мы зафиксируем её координатное искривление, что здесь происходит от второй компоненты.)

Аналогично эйнштейново снижение скорости света в поле тяготения, согласно (213А), есть подобный релятивистский феномен, производный от наблюдаемого вне поля тяготения уменьшения частоты колебаний световых волн (фотонов). Пропорционально этому как бы уменьшается по отношению к оси  $ct^{(1)}$  наклон изотропного конуса и наклоны мировых линий движения материи, проходящих через одну и ту же мировую точку пространства-времени  $\langle P^{3+1} \rangle$ . Все материальные процессы в её окрестности замедляются как бы *кажущимся* образом (как, например, происходит лоренцево сокращение). С квантово-механической точки зрения пропорционально этому замедляется частота колебаний волн Де Бройля, связанных с движущейся материальной точкой:

$$\dot{v} = \dot{c}/\lambda = (\dot{c}/c) \cdot v.$$

В вышеизложенном подходе СТО, гравитация и квантовая механика по *энергетическому* (более универсальному) влиянию на течение времени и частоту колебаний удивительным образом согласуются между собой!

С другой стороны, свет распространяется в космическом вакууме независимо от потенциала поля тяготения с одной и той же локальной координатной скоростью «с», равной масштабному коэффициенту Пуанкаре (гл. 1А). Разумеется, она как *константа* выражается здесь в каком-либо псевдодекартовом (галилеевски инерциальном) базисе. Именно это обуславливает в РТГ псевдоевклидову метрику базового пространства-времени в поле тяготения. Принципиально невозможно по измеренному каким-либо образом значению локальной координатной скорости света в конкретной мировой точке выявить в ней абсолютный гравитационный потенциал, равно как и не обнаружимо в ней же её *абсолютное* свободное движение в пространстве-времени. (Это и есть *общий принцип относительности* в РТГ.) В свою очередь, эйнштейнова эффективная скорость света фиксируется сторонним наблюдателем  $N_1$ , находящимся как бы вне поля тяготения или в слабом поле.

В РТГ в отличие от ОТО имеется *принципиальная* возможность устранить гравитационную деформацию координат, или эффективное искривление пространства-времени [8, с. 89 – 105; 33, с. 57]. Тем самым реставрируются релятивистские законы движения материи в базовом пространстве-времени Минковского, но теперь и в поле тяготения.

РТГ и ОТО дают, как правило, тождественные оценки общерелятивистских эффектов со степенью точности первого порядка малости по гравитационной постоянной. Следовательно, обоснование любой концепции лежит глубже, а именно в соблюдении ею базовых научно-философских принципов. К одному из них следует отнести *принцип максимально возможной простоты и наглядности в теоретических построениях*, или *удобства* в смысле Пуанкаре. Говоря, что “выбор геометрии есть вопрос соглашения” (цитата), Пуанкаре, конечно, имел в виду соображения простоты интерпретации геометрии реального Мира и только в пределах наблюдаемой части Вселенной – МегаГалактики. Всё далее неё остаётся *практически непознаваемым* и относится по меткому выражению математика Бриллюэна к научной фантастике [9].

Первый великий опыт Гаусса (как руководителя астрономической обсерватории в Гёттингене) со своими учениками по измерению в земных условиях суммы углов макротреугольника и все последующие такого рода наблюдения, строго говоря, могли относиться только к экспериментальному познанию геометрии реального Мира в малом. Каких-либо достаточно серьёзных доказательств искривления базового пространства-времени со стороны именно практической астрономии и астрофизики представлено так и не было. До сих пор при составлении

звёздных и галактических карт окружающей Вселенной астрономы используют обычное евклидово пространство, или трёхмерный срез базового пространства-времени Минковского. Евклидово пространство применяется при расчётах траекторий небесных объектов и космических аппаратов в Солнечной системе. Однако при наблюдении этих объектов *во времени* как релятивистские, так и общерелятивистские эффекты в случае их значимости, разумеется, должны учитываться. Все известные общерелятивистские и космологические эффекты нашли убедительное объяснение в рамках той же РТГ [8, 33]. Окончательную точку в научном споре между сторонниками ОТО и РТГ можно будет поставить *апостериори*, например, по результатам эксперимента с поведением гироскопа на космической орбите при его свободном движении в поле тяготения. Согласно ОТО, гироскоп сохраняет ориентацию по закону параллельного переноса вектора в псевдоримановом пространстве-времени и в свободной системе не прецессирует. Согласно РТГ, гироскоп в галилеевски неинерциальной системе должен прецессировать относительно звёздной системы Вселенной (системы Маха) [33, с. 186 – 188]. В свою очередь, классическая гиперболическая неевклидова геометрия Лобачевского – Болья заняла своё достойное место в релятивистской кинематике и динамике, а также в ряде других областей физики.

Однако здесь нужно особо отметить, что в попытках применения релятивистской небесной механики в космологии нужно, разумеется, учитывать то обстоятельство, что «с», «f» и «h» (см. выше) чисто *гипотетически* приняты константами во Вселенной. По крайней мере, это можно предполагать лишь в масштабах поддающейся наблюдениям МегаГалактики, а если *иерархическая однородность* не соблюдается?! Абсолютно надёжными константами являются только сакраментальные математические числа, например:  $\pi$ ,  $\omega$ ,  $e$ . К настоящему времени имеется множество общерелятивистских теорий, базирующихся в их построении на две концепции: либо искривлённого, либо плоского пространства-времени. Как правило, такие теории вносят какие-либо уточнения или дополнения в основные прототипы. В этих теориях общерелятивистские эффекты в Солнечной системе в первом порядке приближения по гравитационной постоянной имеют те же или несколько уточнённые значения. Это лишний раз говорит о том, что теоретическое обоснование данных эффектов, само по себе, никак не может сводиться к экспериментальному доказательству ОТО, РТГ или какой-либо иной новейшей теории гравитации (в том числе с квантовым подходом).

Основная концепция ОТО, выдвинутая в 1916 г. Эйнштейном, сводится к постулату, что все физические законы в любых свободно движущихся инфинитезимальных системах отчёта имеют локальную форму, отвечающую метрическому тензору  $\Gamma^{\otimes}$ , то есть подобно в СТО.



Главное достоинство ОТО заключается, как известно, в том, что в ней нет необходимости вводить каким-либо образом галилеевски инерциальные системы отсчёта и исходную глобальную метрику, например, евклидову или псевдоевклидову. Однако указанный постулат был и остаётся чистой гипотезой до того, пока не получит убедительного экспериментального подтверждения. Некоторые противоречия, к которым приводит в ОТО его применение в виде принципа эквивалентности, обсуждались выше. Зато в ОТО имеется много возможностей для теоретических фантазий, что в РТГ отсутствует из-за её изначальной задетерминированности.

Основная концепция РТГ по диалектической спирали Гегеля восходит к исторически изначальным идеям великих мыслителей прошлого: Канта с постулатом об априорности евклидова пространства в реально окружающем мире и, разумеется, Ньютона с постулатом об абсолютных пространстве и времени. Последние, но уже совместно, реализуются как единое пространство-время Минковского логически безупречным образом. Главными достоинствами РТГ являются выполнение в пределе принципа соответствия и однозначность в результатах и предсказаниях. В РТГ всегда возможно, хотя бы сугубо теоретически, осуществлять однозначную непрерывную трансляцию геодезических криволинейных координат мировых точек из *наблюдательного* эффективного псевдориманова пространства-времени в их же координаты в каком-нибудь псевдодекартовом базисе (например в универсальном) пространства-времени Минковского, используя обе допускаемые метрики. При этом значение скалярного произведения и интервала в псевдодекартовых координатах будет гравитационно неискажённым  $dct^2 = \mathbf{u}' \cdot \mathbf{I}^{\oplus} \cdot \mathbf{u}$ , как и само абсолютное и относительное движение материи. Критики РТГ не принимают использование двух метрик, в том числе одной априорно, хотя метрики – не физика, а математические атрибуты интерпретаций. При удалении от масс в РТГ остаётся только метрика Минковского.

Важно то, что в  $\langle P^{3+1} \rangle$  отображают гравитационно неискажённые абсолютные инварианты ускоренных физических движений, например: внутреннее ускорение  $\mathbf{g}_{(i)}$ ; начальные значения массы  $m_0$ , импульса  $m_0 \mathbf{c}$ , энергии  $m_0 c^2$ . Прямолинейное *абсолютное движение* материальной точки в  $\langle P^{3+1} \rangle$  проецируется гиперболически ортогонально на какое-либо  $\langle \mathcal{E}^3 \rangle^{(i)}$  как равномерное прямолинейное *физическое движение*. При отклонении абсолютного движения от прямолинейности возникает инерция (согласно принципу Маха). Она же всегда противодействует какой-то активной собственной силе, в том числе реальной силе тяготения. В частности, при *свободном движении* материальной точки собственные силы инерции и тяготения (в силу равенства инерционной и гравитационной масс) всегда уравновешивают друг друга и поэтому они в таком случае никоим образом не фиксируются.

Отметим особо, что здесь вовсе не утверждается псевдоевклидовость или однородность априори пространства-времени *в целом*. Полное знание Мира и глобального устройства, по нашему мнению, принципиально не достижимо. В точной математике конец иллюзиям о возможности полного знания, хорошо известно, положила знаменитая теорема Гёделя о неполноте [56]. Независимо от того, сколько будут вычислять  $\pi$  или  $\omega$ , до конца не узнают. В теоретической физике по отношению к устройству трансцендентной в целом Природы и Вселенной аналогичное ещё далеко не осознано.

Все мыслимые движения материальных точек в  $\langle P^{3+1} \rangle$  в принятой здесь трактовке подразделяются на абсолютные (геометрические) – с абсолютными параметрами и относительные проекции (физические) – с относительными параметрами. Абсолютное движение материальной точки математически отображает мировая линия как кривая, сама по себе в  $\langle P^{3+1} \rangle$ , с допустимыми её наклонами внутри изотропного конуса (в реставрированной форме для псевдодекартовых координат). Мировая линия имеет одну существенную физическую особенность – её *динамический* характер. Это позволяет определить вдоль неё ряд абсолютных физических характеристик. В свою очередь, относительное физическое движение есть *гиперболическая ортопроекция* абсолютного движения на какое-либо  $\langle \mathcal{E}^3 \rangle^{(1)}$ .

Отвечая на изначальный вопрос данной главы, скажем следующее. *Релятивизация небесной механики вполне корректно и адекватно имеющимся данным наблюдений и экспериментов осуществима в базовом плоском пространстве-времени Минковского, где, в принципе, в псевдодекартовых координатах локально описывается абсолютное и как реальное отображение последнего – относительное движение материи, в том числе под воздействием физических сил, в силовых полях, а в поле тяготения – с исключением гравитационного искажения.* Примем данную общерелятивистскую концепцию, отвечающую РТГ, только как *рабочую гипотезу*.

Представляет интерес завершить исследование изучением природы абсолютного движения материи и внутренней геометрии мировых линий геометрически как времени подобных кривых, самих по себе, но с учётом известной размерности объемлющего их плоского пространства  $\langle P^{3+1} \rangle$ . Это даёт возможности развить в нём псевдоаналог классической теории Френе – Серре, но для мировых линий, увязав его с их динамическим характером. Причём в  $\langle P^{3+1} \rangle$  – независимо от выбора ОТО или РТГ.

Научный спор и дискуссия могут разрешаться только убедительными доказательствами и, ни в коем случае, другими аргументами. Поэтому завершим дискуссионную главу известным философским изречением Томаса Манна: “Великая истина – это такая истина, отрицание которой есть тоже великая истина!”.

## Глава 10А. Природа движения по мировым линиям в пространстве-времени Минковского и его внутренняя геометрия

Любая материальная точка, в том числе центр инерции массы любого материального объекта  $M$ , находится в  $\langle P^{3+1} \rangle$  в состоянии *перманентного абсолютного движения*. Его траектория, согласно Минковскому [36], геометрически есть ориентированная регулярная мировая линия  $\vec{ct}$ , выражаемая в данном базисе  $\langle P^{3+1} \rangle$ , и по физической сути интегральная стрела собственного времени материальной точки с  $4 \times 1$  радиус-вектором  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(ct)$ . По математической сути это есть кривая, сама по себе, но вложенная в  $4$ -х мерное пространство-время  $\langle P^{3+1} \rangle$  с наклоном внутри изотропного конуса (то есть с тангенсом угла наклона к стреле времени  $\text{th } \gamma < 1$ ).

В окрестности каждой своей мировой точки  $M$  мировая линия как некоторая кривая полностью характеризуется *четырьмя абсолютными* и  $4 \times 1$  *векторными дифференциально-геометрическими параметрами* – по числу измерений пространства событий  $\langle P^{3+1} \rangle$ . (Предпосылкой для такой картины является абсолютная теория кривых Френе – Серре [27, с. 522].) Они задают её ориентацию и конфигурацию в окрестности точки  $M$ . Эти  $4 \times 1$  векторные параметры здесь определяется через их координаты в исходном универсальном базисе  $\tilde{E}_1$ , а модульные характеристики – *инварианты* однородных преобразований Лоренца в  $\langle P^{3+1} \rangle$ . Ориентация мировой линии в точке  $M$  вычисляется в координатах  $\tilde{E}_1$  через скалярный угол движения  $\gamma = \gamma_1$  и его направляющие косинусы:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{u}^{(1)}(ct) &= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ ct \end{pmatrix}^{(1)} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}(ct) \\ ct(ct) \end{pmatrix}^{(1)}, \\ \text{th } \gamma^{(1)} &= \frac{d\mathbf{x}^{(1)}}{dct^{(1)}} = \text{th } \gamma \cdot \mathbf{e}_a = \frac{d\chi}{dct} \cdot \mathbf{e}_a = \frac{\mathbf{v}}{c} = \frac{\mathbf{v}}{c} \cdot \mathbf{e}_a; \\ \gamma &= \text{Arth } \frac{\sqrt{dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2}}{dct} = \text{Arth } \frac{\|d\mathbf{x}\|}{dct} = \text{Arth } \frac{|d\chi|}{dct}, \\ \cos \alpha_k &= \frac{dx_k}{\sqrt{dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2}}, \quad \mathbf{e}_a = \{\cos \alpha_k\}. \end{aligned} \right\} \quad (217A)$$

В частности, для равномерного и прямолинейного (поступательного) физического движения имеем:

$$\left. \begin{array}{l} \gamma = \text{const}, \\ \mathbf{e}_\alpha = \text{const}, \end{array} \right\} \leftrightarrow \gamma = \text{const};$$

для *простого* прямолинейного физического движения (гл. 5А) имеем:

$$\mathbf{e}_\alpha = \pm \text{const} \text{ (или } \mathbf{e}_\beta = \pm \mathbf{e}_\alpha); \text{ но для более общего: } \mathbf{e}_\beta = \pm \text{const};$$

для *равномерного* физического движения имеем  $\gamma = \text{const} > 0$ , но при  $\mathbf{e}_\alpha \neq \pm \text{const}$ ,  $d\hat{\gamma}$  сферически вращается на  $da$  перпендикулярно  $\mathbf{v}$ .

Мгновенный псевдодеккартов подвижный базис  $\hat{\mathbf{E}}_m$ , определяется пока частично касательной гиперболой в точке М мировой линии. Тензор движения задаёт мгновенный базис  $\hat{\mathbf{E}}_m = \text{roth } \Gamma^{(m)} \cdot \hat{\mathbf{E}}_1$ , повернутый относительно  $\hat{\mathbf{E}}_1$  на угол  $\Gamma^{(m)}$  вместе с касательной к мировой линии. Матрица  $\text{roth } \Gamma^{(m)}$  определяется в  $\hat{\mathbf{E}}_1$  канонической структурой (363).

Псевдоевклидова интегральная длина некоторой дуги мировой линии  $l = c\tau$ , отмеряемая от условно начальной точки О, есть её внутренний параметр-аргумент. Для векторного определения скорости абсолютного движения материальной точки М вдоль её мировой линии в теории относительности применяется так называемая *4-скорость* (это времени подобный  $4 \times 1$  радиус-вектор абсолютной скорости  $\mathbf{c}$  на гиперboloиде скоростей радиуса  $R = ic - \text{см. (146A)}$ ), введённая впервые Пуанкаре:

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{c}(\tau) = \mathbf{c} \cdot \frac{d\mathbf{u}}{d\tau} = \frac{d\mathbf{u}}{d\tau} = \frac{d\vec{c}\tau}{d\tau} = \mathbf{c} \cdot \mathbf{i}(\tau), \\ \mathbf{c}'(\tau) \cdot \mathbf{I}^{\oplus} \cdot \mathbf{c}(\tau) = \|\mathbf{c}(\tau)\|_p^2 = -c^2 = \text{const}. \end{array} \right\} \quad (218A)$$

Здесь скаляр «с» математически есть постоянный нормирующий масштабный множитель Пуанкаре, придающий, главное, изотропность и метрические свойства пространству-времени (гл. 1А). По физической сути «с» есть координатная скорость света в межзвёздном вакууме. В свою очередь,  $d\mathbf{u} = d\vec{c}\tau$  – мгновенная дифференциальная стрела собственного времени;  $\mathbf{i}(\tau)$  – в  $\langle P^{3+1} \rangle$  текущая  $4 \times 1$  орта касательной к мировой линии, определяющая геометрически её ориентацию.

$\mathbf{c}(\tau)$  и  $\mathbf{i}(\tau)$  – *первые* из 4-х групп дифференциально-геометрических внутренних параметров мировой линии, или  $4 \times 1$  параметры 1-го порядка по дифференциалу длины дуги. По метрике они *времени подобны*:

$$\mathbf{i}'(\tau) \cdot \mathbf{I}^{\oplus} \cdot \mathbf{i}(\tau) = -1.$$

Физическая скорость  $\mathbf{v}$  как 3-вектор есть *перекрёстная* тангенсная проекция  $4 \times 1$  вектора  $\mathbf{c}$  с гиперboloида П радиуса  $ic$  на  $\langle \mathcal{E}^3 \rangle^{(1)}$  (рис. 4); синусная проекция  $\mathbf{c}$  в  $\langle \mathcal{E}^3 \rangle^{(1)}$  – *собственная скорость*  $\mathbf{v}^*$  в координатах  $\{\chi, \vec{c}\tau\}$ , см. (76А) в гл. 5А; Скорости  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{v}^*$  как 3-векторы изменяются тогда и только тогда, когда изменяется ориентация мировой линии, то есть векторов  $\mathbf{c}$  и  $\mathbf{i}$ . Это происходит всегда и только при воздействии на материальную точку какой-либо собственной силы.

Одна из них может быть вызвана воздействием поля тяготения (гл. 9А). Модуль  $4 \times 1$  скорости абсолютного движения для любых материальных объектов есть константа «с» (что для электрона, что для звезды и т. д.).

Вышеизложенное позволяет сформулировать следующий постулат. “*Все материальные объекты перманентно движутся в абсолютном пространстве-времени Минковского, в том числе в поле тяготения, по своим мировым линиям с локально постоянной по модулю абсолютной координатной скоростью с, но с её направляющей ортой  $\mathbf{i}(ct)$ .*”

Такая трактовка абсолютного движения реализуется *относительной* трансляцией в любой псевдодекартов или галилеевски инерциальный базис (гл. 9А). Заметим, что в данном утверждении константа «с» и коэффициент однородности Пуанкаре совпадают. Особо отметим здесь то, что «с» принимается константой лишь на основе данных земных наблюдений ближнего космоса. Поэтому любые подобные утверждения, строго говоря, не могут распространяться на Вселенную в целом.

Данный постулат, *во-первых*, позволяет рассматривать мировые линии как абсолютные динамические времени подобные траектории в плоском метрическом пространстве событий и определять вдоль них дополнительные кинематические характеристики абсолютного движения материи – более высоких порядков, нежели «с». *Во-вторых*, он весьма просто и естественно объясняет природу перманентного движения материи по мировым линиям как течение собственного времени  $\tau$ ; и обратно. Следовательно, «с» – это и скорость абсолютного движения материи и скорость течения собственного времени по орте  $\mathbf{i}$ . Эта скорость абсолютная и, как скалярная величина, она постоянная. При этом по орте  $\mathbf{j}$  псевдоортогонально орте  $\mathbf{i}$  при любом преодолении силы инерции материи меняется только направление абсолютного движения точки М, что вызывается собственной силой  $\mathbf{F}$ . Вдоль мировой линии точка М имеет импульс  $\mathbf{P}_0 = m_0 \mathbf{c}$  и 2 проекции в  $\tilde{E}_1$  – на  $ct^{(1)}$ :  $\mathbf{P} = m\mathbf{c}^{(1)}$ , на  $\langle \mathcal{E}^3 \rangle^{(1)}$ :  $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$  – с теоремой Пифагора для них:  $(iP_0^2) = (iP^2) + p^2$ ; откуда  $m = m_0 \cdot \text{ch } \gamma$ . Энергия  $M$  на мировой линии составляет  $E_0 = m_0 c^2$ ; относительно стрелы времени  $ct^{(1)}$  имеем  $E = mc^2$ . *В-третьих*, он, с (205А), объясняет математически причину *гиперболического* искривления мировой линии в  $\langle P^{3+1} \rangle$  при  $\mathbf{e}_\alpha = \text{const}$ ,  $\gamma \neq \text{const}$ .

Причина отклонения кривой от прямолинейности здесь та, что  $4 \times 1$  вектор абсолютного внутреннего ускорения  $\mathbf{g}(\tau) = \frac{d\mathbf{c}(\tau)}{d\tau}$ , как и вызывающая

его некоторая собственная сила  $\mathbf{F}$ , всегда направлены псевдоевклидово ортогонально  $\mathbf{c}(\tau)$ , ввиду постоянства модуля  $4 \times 1$  вектора абсолютной скорости. Тогда его дифференцирование вдоль мировой линии даёт строго псевдоортогональную ему  $4 \times 1$ -векторную производную:

$$\mathbf{c}'(\tau) \cdot \mathbf{I}^{\oplus} \cdot \mathbf{c}(\tau) = \text{const} \rightarrow \mathbf{c}'(\tau) \cdot \mathbf{I}^{\oplus} \cdot \frac{d\mathbf{c}(\tau)}{d\tau} = 0. \quad (219A)$$

В результате имеем гиперболическое искривление мировой линии !

В данном случае мы используем обнуление скалярного произведения  $\mathbf{c}(\tau)$  только с его первым  $4 \times 1$  векторным дифференциалом, хотя аналогичное имеет место и для его дифференциалов более высоких порядков. Если мировая линия плоская (гл. 5А), то она в любой точке М имеет гиперболическую псевдокривизну (99А). Если же она не плоская, то в любой её точке М имеется касательная гипербола и *соприкасающаяся псевдоплоскость*, в которой вычисляются *мгновенные гиперболическая псевдокривизна*  $K(\mathbf{c}\tau)$ , *внутреннее 4-ускорение*  $\mathbf{a}(\mathbf{c}\tau)$  и их  $4 \times 1$  векторы:

$$K^{(m)} = 1/R_K^{(m)} = K(\mathbf{c}\tau) = \mathbf{a}(\mathbf{c}\tau)/c^2. \quad (220A)$$

$$\mathbf{k}(\mathbf{c}\tau) = K(\mathbf{c}\tau) \cdot \mathbf{p}(\mathbf{c}\tau) = [\mathbf{a}(\mathbf{c}\tau)/c^2] \cdot \mathbf{p}(\mathbf{c}\tau). \quad (221A)$$

При  $\mathbf{e}_\alpha = \mathbf{const}$   $4 \times 1$  кривизна, как пространству подобный параметр 2-го порядка по дифференциалу дуги, с радиусом направлены по *главной псевдонормали*  $\mathbf{p}_\alpha(\mathbf{c}\tau)$  от центра касательной гипербола с гиперboloида I; если  $R_K = \mathbf{const}$ , то имеется псевдоаналогия с движением по окружности. ( $\mathbf{e}_\alpha = \mathbf{const}$  отвечает в  $\langle \mathcal{E}^{3,1} \rangle$  прямолинейному физическому движению. При естественном – не скачкообразном изменении скорости физического движения мировые линии суть регулярные непрерывные кривые в  $\langle P^{3+1} \rangle$  и времени подобные и имеют ограничение коси  $\mathbf{c}\tau^{(1)}$  по наклону  $|\varphi_R(\gamma)| < \pi/4$  или по углу параллельности  $P_\varphi(\mathbf{a}) = |\varphi(\gamma)| < \pi/2$  – в базисе  $\tilde{E}_1$  – гл. 1А.

*Порядок линейного вложения*  $\lambda$  конкретной мировой линии (участка) есть минимальная размерность объемлющего в целом данную кривую плоского подпространства-времени в  $\langle P^{3+1} \rangle$ . Для мировых линий в нём порядок  $\lambda$  находится в пределах от 1 до 4-х. Прямой мировой линии соответствует  $\lambda = 1$  – постоянная стрела времени; плоской кривой отвечает  $\lambda = 2$  (например, при гиперболическом движении); закрученной кривой отвечает  $\lambda$  от 3 до 4-х, в зависимости от порядка её кривизны – 2 или 3.

Из теории регулярных кривых в *изотропном плоском метрическом пространстве* [например, 27, с. 521 – 524] следует, что для произвольной точки М на любом криволинейном участке мировой траектории при  $\lambda \geq 2$  в ней однозначно определяется *мгновенная соприкасающаяся псевдоплоскость кривизны*  $\langle P^{1+1} \rangle_K^{(m)} \equiv \langle \mathbf{p}(\mathbf{c}\tau), \mathbf{i}(\mathbf{c}\tau) \rangle$  с  $4 \times 1$  векторами – ортами  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{i}$ , при  $\lambda = 2$  локально объемлющая мировую линию псевдоплоскость. В универсальном базисе  $\tilde{E}_1$  мгновенный единичный времени подобный  $4 \times 1$  вектор касательной  $\mathbf{i}(\mathbf{c}\tau)$  из формулы (218А), выражается в тригонометрической форме в результате 1-го дифференцирования по  $\mathbf{c}\tau$  вдоль мировой линии, где  $\mathbf{i}(\mathbf{c}\tau) = \mathbf{i}(\gamma_i)$  – с гиперboloида II, согласно (146А):

$$\frac{d\mathbf{u}(\mathbf{c}\tau)}{d\mathbf{c}\tau} = \mathbf{i}(\mathbf{c}\tau) = \frac{\text{sh } \gamma_i}{\text{ch } \gamma_i} = \frac{\text{sh } \gamma_i \cdot \mathbf{e}_\alpha}{\text{ch } \gamma_i}, \quad \mathbf{e}_\alpha = \begin{pmatrix} \cos \alpha_1 \\ \cos \alpha_2 \\ \cos \alpha_3 \end{pmatrix}. \quad (222A)$$

Вектор  $\mathbf{i}(\sigma\tau)$  есть орт мгновенной стрелы собственного времени  $\vec{\sigma\tau}$  – четвёртый вектор-столбец мгновенного тензора движения  $\text{goth } \Gamma$  (31A). В свою очередь, характеристики  $\mathbf{p}(\sigma\tau)$  и  $\mathbf{K}(\sigma\tau)$  вычисляются в результате 2-го дифференцирования вдоль мировой линии после (222A) при  $\lambda > 2$ :

$$\frac{d\mathbf{i}(\sigma\tau)}{d\sigma\tau} = \frac{d^2\mathbf{u}(\sigma\tau)}{d\sigma\tau^2} = K_\beta(\sigma\tau) \mathbf{p}_\beta(\sigma\tau) = \mathbf{k}_\beta(\sigma\tau) = K_\beta(\sigma\tau) \cdot \frac{\text{ch } \gamma_p \cdot \mathbf{e}_\beta}{\text{sh } \gamma_p}, \quad \frac{\|\mathbf{d}\mathbf{i}\|_p}{d\sigma\tau} = K \geq 0. \quad (223A)$$

Этот  $4 \times 1$  вектор-производная вдоль  $\vec{\sigma\tau}$  функционально выражается как псевдоаналог первой формулы Френе – Серре [27, с. 522] и пространству подобен. Дифференциалы от  $\mathbf{u}(\sigma\tau)$  имеют, вообще, псевдоевклидову меру. Из псевдоортогональности векторов  $\mathbf{i}(\sigma\tau)$  и  $\mathbf{p}(\sigma\tau)$  следует нормировка:  $\cos \varepsilon = \text{th } \gamma_p / \text{th } \gamma_i \rightarrow \gamma_p \leq \gamma_i$ ; для коллинерного движения:  $\mathbf{e}_\beta = \pm \mathbf{e}_\alpha$ ,  $\varepsilon = 0!$  В результате дифференцирования в (223A) не трудно видеть, что псевдоортогональность  $\mathbf{i}$  и  $\mathbf{p}$  соблюдается автоматически, как и ранее в (219A). Здесь  $4 \times 1$  векторы  $\mathbf{p}(\sigma\tau)$ ,  $\mathbf{k}(\sigma\tau)$ , как и 4-ускорение  $\mathbf{a}(\tau)$ , приложены в  $\mathbf{M}$  вместе с касательной  $\mathbf{i}(\sigma\tau)$  и направлены в *соприкасающейся псевдоплоскости*  $\langle P^{1+1} \rangle_{\mathbf{K}}^{(m)}$  из центра гиперболы внутри вогнутости мировой линии вдоль или против  $x^{(m)}$ , рис. 2A(3). Поскольку характеристики  $\mathbf{K}$ ,  $\mathbf{R}$  и  $\mathbf{g}$  суть модули пространству подобных векторов, то все они суть инварианты в разных базисах  $\mathbf{E}$ . Но их реальный знак определяется характером  $\mathbf{g}(\tau)$  – то есть в итоге это есть *ускорение или замедление*, что в любом псевдодекартовом базисе определяет *знак* скалярного произведения  $\cos \varepsilon = \mathbf{e}_\beta \cdot \mathbf{e}_\alpha$  (знак – инвариант). Если  $\cos \varepsilon > 0$ , то  $\mathbf{g}$  и  $\mathbf{v}$  однонаправлены (ускорение); если  $\cos \varepsilon < 0$ , то  $\mathbf{g}$  и  $\mathbf{v}$  разнонаправлены (замедление); если  $\cos \varepsilon = 0$ , то  $\mathbf{g}$  не даёт приращения  $\|\mathbf{v}\|$ , а вызывает только евклидову ротацию  $\zeta_{\mathbf{K}}$  в точке  $\mathbf{M}$  в направлении  $\mathbf{e}_\alpha$ . В любой плоскости  $\langle \mathcal{E}^2 \rangle^{(m)}$  имеем формулы:

$$\mathbf{e}_\beta = \cos \varepsilon \cdot \mathbf{e}_\alpha + \sin \varepsilon \cdot \mathbf{e}_{\eta \perp \alpha} \leftrightarrow \mathbf{e}_\alpha = \cos \varepsilon \cdot \mathbf{e}_\beta + \sin \varepsilon \cdot \mathbf{e}_{\eta \perp \beta}. \quad (224A)$$

Единичный 3-вектор ортогонального приращения движения  $\mathbf{e}_\eta$  выражен в (136A); величина угла  $\varepsilon$  между  $\mathbf{e}_\beta$  и  $\mathbf{e}_\alpha$  может заключаться в пределах  $0 \div \pi$ .

Как видно из формулы (223A), первой в конструируемой тут серии, гиперболическая кривизна  $\mathbf{k}$  отличается от внутреннего 4-ускорения  $\mathbf{a}$  множителем  $c^2$ . Когда ускорение, как пространству подобная величина, применяется в евклидовом подпространстве, например в  $\langle \mathcal{E}^2 \rangle^{(m)} \equiv \langle \mathbf{v}, \mathbf{g} \rangle^{(m)} \equiv \langle \mathbf{e}_\alpha, \mathbf{e}_\beta \rangle^{(m)} \subset \langle \mathcal{E}^3 \rangle^{(m)}$ , тогда это в нём евклидов 2- или 3-вектор. Когда оно рассматривается в  $\langle P^{3+1} \rangle$  в целом, тогда это 4-вектор! Касательная  $\mathbf{i}(\sigma\tau)$  в процессе её дифференцирования вдоль мировой линии при движении точки  $\mathbf{M}$  вращается синхронно с  $\mathbf{p}(\sigma\tau)$  вокруг  $\mathbf{M}$  в пределах мгновенной соприкасающейся псевдоплоскости с *суммарной* угловой скоростью

$$\pm w_{\mathbf{K}}^{(m)} = \frac{\|\mathbf{d}\mathbf{i}\|_p}{d\tau} = \frac{\|\mathbf{d}\gamma\|}{d\tau} = c/R_{\mathbf{K}}^{(m)} = c \cdot K_\beta^{(m)} = \mathbf{a}^{(m)}/c, \quad (225A)$$

где знак скорости выбирается для ускоренного и замедленного движений (по *тангенциальному*  $d\gamma$  или  $\mathbf{g}$ , выпуклость или вогнутость – гл. 7A).

Обратим внимание на то, что  $dy$  выражается в *подвижном* абсолютном и пока 2-х ортовом базисе  $\hat{E}_m = \{\mathbf{p}(\sigma\tau), \mathbf{i}(\sigma\tau)\}$  в  $\langle P^{1+1} \rangle_K^{(m)}$  *двойко* как в (222А) и (223А): а именно вдоль касательной  $\mathbf{i}(\sigma\tau)$  к мировой линии  $\sigma\tau$ , так и по псевдонормали  $\mathbf{p}(\sigma\tau)$  в  $M$ , как исходно в коллинеарной формуле (79А).

\* \* \*

Далее рассмотрим подробнее, нежели в гл. 7А – см. (145А), ортопроекционное тригонометрическое представление *внутренних* скалярных и  $4 \times 1$  векторных характеристик движения *2-го порядка* в базисах  $\hat{E}_1$  и  $\hat{E}_m$ . Ноевклидова плоскость  $\langle \mathcal{E}^2 \rangle^{(m)} \equiv \langle \mathbf{v}, \mathbf{g} \rangle^{(m)} \equiv \langle \mathbf{e}_\alpha, \mathbf{e}_\beta \rangle^{(m)}$  для реализации ортопроецирования – *вне*  $\langle P^{1+1} \rangle_K^{(m)}$ , но привязана к мировой линии в точке  $M$ !

Разложим  $4 \times 1$  вектор кривизны, с учётом (222А), (223А) и (224А), на 2 ортогональные друг другу проекции – тангенциальную и нормальную (*двумя способами*) относительно вектора скорости  $\mathbf{v} = v \cdot \mathbf{e}_\alpha$ , а именно как дифференцирование в (223А) и как подстановку  $\mathbf{e}_\beta$  из (224А) в (223А). При этом орг мгновенной псевдонормали  $\mathbf{p}(\sigma\tau)$  в (223А) расщепляется на 2 орта – тангенциальный и нормальный. В *классической кинематике* в пространстве-времени Лагранжа вместо 1-го орта применяется вектор касательной, а 2-й орт есть главная нормаль (см. далее) – из-за того, что псевдонормали нет, а пространство инвариант (гл. 1А). В ОТО это не так:

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_\beta(\sigma\tau) &= \frac{d\mathbf{i}(\sigma\tau)}{d\sigma\tau} = K_\beta^{(m)}(\sigma\tau) \cdot \frac{\text{ch } \gamma_p \cdot \mathbf{e}_\beta}{\text{sh } \gamma_p} = \frac{d\gamma_i}{d\sigma\tau} \cdot \frac{\text{ch } \gamma_i \cdot \mathbf{e}_\alpha}{\text{sh } \gamma_i} + \frac{\text{sh } \gamma_i \cdot \frac{d\mathbf{e}_\alpha}{d\sigma\tau}}{0} = \frac{d\gamma_p}{d\sigma\tau} \\ &= \bar{K}_\beta^{(m)}(\sigma\tau) \frac{\text{ch } \gamma_i \cdot \mathbf{e}_\alpha}{\text{sh } \gamma_i}^{(1)} + \frac{1}{K_\beta^{(m)}(\sigma\tau)} \frac{\mathbf{e}_\eta}{0}^{(1)} = \bar{K}_\beta^{(m)}(\sigma\tau) \bar{\mathbf{p}}(\sigma\tau) + \frac{1}{K_\beta^{(m)}(\sigma\tau)} \perp \bar{\mathbf{p}}(\sigma\tau) = (226А) \\ &= \bar{K}_\beta^{(m)}(\sigma\tau) + \frac{1}{K_\beta^{(m)}(\sigma\tau)} = K_\beta^{(m)} \cdot \mathbf{p}(\sigma\tau) = K_\beta^{(m)} \cdot \left\{ \frac{\cos \varepsilon \cdot \text{ch } \gamma_p \cdot \mathbf{e}_\alpha}{\text{sh } \gamma_p} + \frac{\sin \varepsilon \cdot \text{ch } \gamma_p \cdot \mathbf{e}_\eta}{0} \right\}. \end{aligned}$$

Обратим внимание на то, что в данном представлении  $\lambda \geq 2$ . (То есть оно формально может применяться и для плоской кривой  $\mathbf{e}_\alpha = \mathbf{const}$ ,  $\mathbf{e}_\eta = \mathbf{0}$ .)

$$\bar{K}^{(m)}(\sigma\tau) = \frac{d\bar{\gamma}_i^{(m)}}{d\sigma\tau} = \pm \bar{\eta}_K^{(m)}/c, \quad \frac{1}{K}^{(m)}(\sigma\tau) = \frac{d\perp \gamma_i^{(m)}}{d\sigma\tau} = \text{sh } \gamma_i^{(1)} \frac{\|d\mathbf{e}_\alpha\|^{(m)}}{d\sigma\tau} = \pm \zeta_K^{(m)} \cdot \text{sh } \gamma_i^{(1)}/c$$

– тангенциальная и нормальная проекции *общей* кривизны  $K_\beta^{(m)}$ ;

$$\bar{\mathbf{p}}^{(1)}(\sigma\tau) = \frac{\text{ch } \gamma_i \cdot \mathbf{e}_\alpha}{\text{sh } \gamma_i}^{(1)} \quad \text{– единичный } 4 \times 1 \text{ вектор главной псевдонормали,}$$

$$\perp^{(1)}(\sigma\tau) = \frac{\mathbf{e}_\eta}{0}^{(1)} \quad \text{– единичный } 4 \times 1 \text{ вектор нормальной кривизны и } \frac{1}{\zeta_K}^{(m)} \text{ –}$$

мгновенная угловая скорость вектора  $\mathbf{e}_\alpha$  (он же суть *бинормаль*  $\mathbf{b}(\sigma\tau)$ ),

$$\mathbf{e}_\eta^{(1)} = \frac{d\mathbf{e}_\alpha^{(1)}}{\|d\mathbf{e}_\alpha\|^{(1)}} \quad \text{– единичный 3-вектор, ортогональный к } \mathbf{e}_\alpha \text{ в } \langle \mathcal{E}^2 \rangle \equiv \langle \mathbf{e}_\alpha, \mathbf{e}_\beta \rangle,$$

который применялся ранее в (136А), (145А) и (161А); где  $d\mathbf{e}_\alpha = d\alpha \cdot \mathbf{e}_\eta$ .



Из формул (226А) следует ряд соотношений. Для  $4 \times 1$  вектора псевдокривизны – главная теорема Пифагора в  $\langle \mathcal{E}^2 \rangle^{(m)} \equiv \langle \mathbf{v}, \mathbf{g} \rangle^{(m)} \equiv \langle \mathbf{e}_\alpha, \mathbf{e}_\beta \rangle^{(m)} \subset \langle \mathcal{E}^3 \rangle^{(m)}$ :

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{k} &= \bar{\mathbf{k}} + \overset{\perp}{\mathbf{k}} = K \cdot \mathbf{j}(\gamma_p) = \bar{K} \cdot \bar{\mathbf{p}}(\gamma_i) + \overset{\perp}{K} \cdot \overset{\perp}{\mathbf{p}}(\gamma_i) \\ K^2 &= \bar{K}^2 + \overset{\perp}{K}^2. \quad [\bar{\mathbf{p}} = \mathbf{j}(\gamma_i)] \end{aligned} \right\} \rightarrow \left. \begin{aligned} \mathbf{g} &= \bar{\mathbf{g}}(\text{ct}) + \overset{\perp}{\mathbf{g}}(\text{ct}) \\ g^2 &= \bar{g}^2 + \overset{\perp}{g}^2 \end{aligned} \right\} (\gamma_i = 0) \quad (227A)$$

где в  $\langle P^{3+1} \rangle$  орта  $\mathbf{j}$  взята с единичного гиперboloида  $I$ , см. (149А), для *тригонометрического обозначения*  $\mathbf{p}_\beta(\text{ct})$  и параллельной проекции в (226А); смысл этих обозначений будет далее более понятен. Отсюда связь 4-псевдокривизны  $\mathbf{k}_\beta$ , внутреннего 3-ускорения  $\mathbf{g}$  (145А) в  $\hat{E}_m$  и 4-ускорения  $\mathbf{a}(\text{ct})$  в  $\hat{E}_1$ ; все подчиняются *абсолютной теореме Пифагора*.

Из первых трёх вектор строк и 4-й вектор-строки в (226А) следует:

$$\left. \begin{aligned} (K \cdot \text{ch } \gamma_p) \cdot \mathbf{e}_\beta &= (\bar{K} \cdot \text{ch } \gamma_i) \cdot \mathbf{e}_\alpha + \overset{\perp}{K} \cdot \mathbf{e}_\eta \rightarrow \text{sh } \gamma_p = (\bar{K}/K) \cdot \text{sh } \gamma_i \leq \text{sh } \gamma_i, \text{ctg } \varepsilon \overset{\perp}{c}_K = \text{cth } \gamma_i \cdot \bar{\eta}_K \\ (K \cdot \text{ch } \gamma_p)^2 &= (\bar{K} \cdot \text{ch } \gamma_i)^2 + \overset{\perp}{K}^2, \quad \left\{ \begin{aligned} (\bar{K} \cdot \text{ch } \gamma_i / K \cdot \text{ch } \gamma_p) &= \cos \varepsilon, \quad \overset{\perp}{K} / K \cdot \text{ch } \gamma_p = \sin \varepsilon. \end{aligned} \right. \quad (228A) \\ K \cdot \text{sh } \gamma_p &= \bar{K} \cdot \text{sh } \gamma_i \quad \rightarrow \quad \mathbf{g}^* = \bar{\mathbf{g}}^* + \overset{\perp}{\mathbf{g}} \quad (\overset{\perp}{\mathbf{g}}^* = \overset{\perp}{\mathbf{g}}), \quad (229A) \end{aligned} \right\}$$

Формула (228А) даёт в  $\hat{E}_1$  проекционную *относительную теорему Пифагора* (229А) на  $\langle \mathcal{E}^2 \rangle^{(m)} \equiv \langle \mathbf{v}, \mathbf{g} \rangle^{(m)} \equiv \langle \mathbf{e}_\alpha, \mathbf{e}_\beta \rangle^{(m)} \subset \langle \mathcal{E}^3 \rangle^{(1)}$  с 3-мя сторонами ускорения  $\mathbf{g}^*(\text{ct})$ : гипотенуза  $\mathbf{g}^*$  и 2 катета-проекции (параллельная и нормальная). Отсюда общая связь *внутреннего и собственного ускорения* (79А), в (165А) и (82А), т. е.  $\mathbf{g}^*(\text{ct})$  разлагается по относительной теореме Пифагора:

$$g^{*2} = \bar{g}^{*2} + \overset{\perp}{g}^2; \quad \mathbf{g}^* = K \cdot \text{ch } \gamma_p \cdot c^2, \quad \bar{\mathbf{g}}^* = \mathbf{g}^* \cdot \cos \varepsilon = \bar{K} \cdot \text{ch } \gamma_i \cdot c^2, \quad \overset{\perp}{\mathbf{g}} = \overset{\perp}{\mathbf{g}}^* = \mathbf{g}^* \cdot \sin \varepsilon = \overset{\perp}{K} \cdot c^2.$$

Ортогональные разложения 4-кривизны  $\mathbf{k}(\text{ct})$  по теоремам (227А) – абсолютное и (228А) – относительное (к вектору скорости  $\mathbf{v} = v \cdot \mathbf{e}_\alpha$  в  $\hat{E}_1$ ) приводят в 1-ом случае к нерелятивистским в  $\hat{E}_m$  (внутренним) проекциям, а во 2-ом случае к релятивистским (внешним) проекциям. Но в обоих случаях нормальная проекция остаётся не релятивистской, согласно *принципу Герглотца*, – см. о нём в гл. 2А и 4А). причём оси  $\mathbf{x}^{(m)}$  и  $\mathbf{x}^{(1)}$  образуют угол  $\gamma^{(m)}$ . В соотношениях (145А) и (161А)  $\mathbf{e}_\beta$  берётся из (223А); но  $\mathbf{e}_\alpha$  и  $\mathbf{e}_\beta$  исходно выражены в  $\hat{E}_1$  и в  $\hat{E}_m$ .

Проекции (228А) ускорения в  $\hat{E}_1$  отображаются *локально* независимо в окрестности  $M$  в базисах  $\hat{E}_1$  и  $\hat{E}_m$ , сообразно разложению ускорения  $\mathbf{g}(\text{ct})$ .

Тангенциальная проекция (на  $\pm \mathbf{e}_\alpha$ ) описывается локально в  $\hat{E}_1$  как гиперболическое движение в  $\langle P^{1+1} \rangle^{(1)} \equiv \langle \mathbf{v}, \overset{\rightarrow}{\text{ct}}^{(1)} \rangle$ , радиуса  $\bar{R} = c^2/\bar{g}$ . Его локальная проекция на пространство  $\langle \mathcal{E}^3 \rangle^{(1)}$  в  $\hat{E}_1$  – прямолинейное физическое движение по вектору  $\mathbf{v}$  с коллинеарным ускорением в  $M$ :

$$\bar{\mathbf{g}}^{(1)}_M = \text{sech}^3 \gamma \cdot \bar{\mathbf{g}} = \frac{d\mathbf{v}}{d\bar{t}} = \frac{d^2 \mathbf{x}^{(1)}}{d\bar{t}^2} \quad \text{– см. формулу (167А), где } \bar{\mathbf{g}} = \cos \varepsilon \cdot \mathbf{g}.$$

Это координатное 3-ускорение без нормальной проекции  $\mathbf{g}(\text{ct})$ .

Нормальная проекция описывается локально в  $\tilde{E}_1$  как псевдовинтовое движение в 3-х мерном  $\langle P^{2+1} \rangle^{(1)} \equiv \langle \mathbf{v}, \mathbf{g}, \vec{\mathbf{c}}^{(1)} \rangle$  радиуса  $\overset{\perp}{R} = c^2/\overset{\perp}{g}$  (на  $\pm \mathbf{e}_\eta$ ). Его локальная проекция на пространство  $\langle \mathcal{E}^3 \rangle^{(1)}$  в  $\tilde{E}_1$  – физическое движение по окружности вещественного радиуса  $r$  со скоростью  $\mathbf{v}^{(m)}$  и нормальным ускорением в  $M$ :

$$\overset{\perp}{g}^{(1)}_M = \operatorname{sech} \gamma \cdot \overset{\perp}{g} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2 x^{(1)}}{dt d\tau} \quad \text{– см. формулу (168А), где } \overset{\perp}{g} = \sin \varepsilon \cdot g.$$

Это координатное 3-ускорение без нулевой параллельной проекции  $\mathbf{g}(\sigma\tau)$ .

Соответственно их сумма не подчиняется теореме Пифагора.

Ниже даны *простые движения* в абсолютном  $\hat{E}_m$  в форме  $4 \times 1$  векторов.

*Простое тангенциально ускоренное движение*, где  $\bar{\mathbf{g}} \neq \mathbf{0}$ ,  $\overset{\perp}{\mathbf{g}} = \mathbf{0}$  ( $\lambda = 2$ ):

$$\begin{aligned} \left[ \frac{d\mathbf{c}}{d\tau} \right]_{\mathbf{e}_\alpha = \text{const}} &= \frac{d^2 \mathbf{u}}{d\tau^2} = \frac{d^2 c\tau}{d\tau^2} = c^2 \cdot \frac{d\mathbf{i}}{d\sigma\tau} = c \cdot \frac{d\bar{\gamma}}{d\tau} \cdot \bar{\mathbf{p}}(\sigma\tau) = \bar{K} \cdot c^2 \cdot \bar{\mathbf{p}}(\sigma\tau) = \\ &= c^2/\bar{R} \cdot \bar{\mathbf{p}}(\sigma\tau) = \bar{g}(\tau) \cdot \bar{\mathbf{p}}(\sigma\tau), \text{ что следует из (226А).} \end{aligned}$$

Когда  $\overset{\perp}{\mathbf{k}} = \mathbf{0}$ , вектор  $\overset{\perp}{\mathbf{p}} = \mathbf{b}$  не исчезает, но  $\overset{\perp}{k} = 0$ . (Только в  $\langle P^{2+1} \rangle$  !)

(В частности, при  $\frac{d\bar{\gamma}}{d\sigma\tau} = \text{const}$  имеется интегрально гиперболическое движение, а его проекция на  $\langle \mathcal{E}^3 \rangle^{(1)}$  – равноускоренное *прямолинейное* физическое движение – гл. 5.)

*Простое нормально ускоренное движение*, где  $\overset{\perp}{\mathbf{g}} \neq \mathbf{0}$ ,  $\bar{\mathbf{g}} = \mathbf{0}$  ( $\lambda = 3$ ):

$$\begin{aligned} \left[ \frac{d\mathbf{c}}{d\tau} \right]_{\gamma = \text{const}} &= \frac{d^2 \mathbf{u}}{d\tau^2} = \frac{d^2 c\tau}{d\tau^2} = c^2 \cdot \frac{d\mathbf{i}}{d\sigma\tau} = \frac{d\overset{\perp}{\gamma}}{d\tau} \cdot \overset{\perp}{\mathbf{p}}(\sigma\tau) = \overset{\perp}{K} \cdot c^2 \cdot \overset{\perp}{\mathbf{p}}(\sigma\tau) = \overset{\perp}{\mathbf{k}}(\sigma\tau) \cdot c^2 = \\ &= c^2/\overset{\perp}{R} \cdot \overset{\perp}{\mathbf{p}}(\sigma\tau) = \overset{\perp}{g}(\tau) \cdot \overset{\perp}{\mathbf{p}}(\sigma\tau), \text{ что следует из (226А).} \end{aligned}$$

Когда  $\bar{\mathbf{k}} = \mathbf{0}$ , вектор  $\bar{\mathbf{p}} = \mathbf{p}_\alpha$  не исчезает, но  $\bar{k} = 0$ . (Только в  $\langle P^{2+1} \rangle$  !)

(В частности, при  $\frac{\|d\mathbf{e}_\alpha\|}{d\sigma\tau} = \frac{d\alpha}{d\sigma\tau} = \text{const}$  имеется интегрально псевдовинтовое движение, а его проекция на  $\langle \mathcal{E}^3 \rangle^{(1)}$  есть равномерное *планетарное* физическое движение, которое будет рассмотрено далее подробнее.)

Имеем:

$$r = v^2/\overset{\perp}{g}^{(1)} = \operatorname{ch}^2 \gamma \cdot v^2/\overset{\perp}{g} = \operatorname{ch}^2 \gamma \cdot v^2/c^2 \cdot \overset{\perp}{R} = \operatorname{ch}^2 \gamma \cdot \operatorname{th}^2 \gamma \cdot \overset{\perp}{R} = \operatorname{sh}^2 \gamma \cdot \overset{\perp}{R}.$$

Эта формула связывает тригонометрически радиусы *нормальных* сферической кривизны и гиперболической псевдокривизны.

При  $\gamma = 0$  ( $v = 0$ ):  $\overset{\perp}{R}/r = \infty$ ; при  $\gamma = \omega$ :  $\overset{\perp}{R} = r$ ; при  $\gamma = \infty$  ( $v = c$ ):  $\overset{\perp}{R}/r = 0$  (то есть касательная  $\mathbf{i}(\sigma\tau)$  стремится к изотропному конусу).

Угловая скорость нормального ускоренного движения в  $\langle \mathcal{E}^2 \rangle^{(1)}$  отсюда выражается логично нерелятивистским образом в виде:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\eta_K}^{(1)} &= \frac{\|d\mathbf{e}_\alpha\|}{dt} = \operatorname{sech} \gamma \cdot \frac{\|d\mathbf{e}_\alpha\|}{d\tau} = \operatorname{sech} \gamma \cdot c \cdot \frac{1}{K}^{(m)} / \operatorname{sh} \gamma = \operatorname{sech} \gamma \cdot c / (\dot{R}^{(m)} \cdot \operatorname{sh} \gamma) = \\ &= \operatorname{sech} \gamma \cdot \operatorname{sh} \gamma \cdot c / r = \operatorname{th} \gamma \cdot c / r = v / r. \end{aligned}$$

Осуществляя эти ортогонализации, мы вышли из соприкасающейся псевдоплоскости  $\langle P^{1+1} \rangle_K^{(m)} \equiv \langle \mathbf{p}(\sigma\tau), \mathbf{i}(\sigma\tau) \rangle$  в  $\langle \mathcal{E}^2 \rangle^{(m)} \equiv \langle \mathbf{v}, \mathbf{g} \rangle^{(m)} \equiv \langle \mathbf{e}_\alpha, \mathbf{e}_\beta \rangle^{(m)}$ !

Для сравнения приведём аналогичное ортогональное разложение в  $\tilde{E}_1$  ускорения в нерелятивистской механике, то есть в соприкасающейся плоскости к мировой линии в пространстве-времени Лагранжа ( $\lambda \geq 3$ ):

$$\mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ t \end{bmatrix}, \quad \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_\alpha \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\frac{d^2\mathbf{u}}{dt^2} = \begin{bmatrix} \mathbf{g} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{g} \cdot \mathbf{e}_\beta \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \mathbf{e}_\alpha \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{e}_\alpha}{dt} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{g}} \cdot \mathbf{e}_\alpha \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{\bar{\mathbf{g}}} \cdot \mathbf{e}_\eta \\ 0 \end{bmatrix},$$

где  $\bar{\mathbf{g}} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = g \cdot \cos \varepsilon$ ,  $\frac{1}{\bar{\mathbf{g}}} = v \cdot \frac{\|d\mathbf{e}_\alpha\|}{dt} = v \cdot \eta = v^2 / r = g \cdot \sin \varepsilon$ ;

$$g^2 = \bar{g}^2 + \frac{1}{\bar{g}}^2, \quad \mathbf{g} = \bar{\mathbf{g}} + \frac{1}{\bar{\mathbf{g}}} \quad (\bar{\mathbf{g}} \parallel \mathbf{v}, \frac{1}{\bar{\mathbf{g}}} \perp \mathbf{v}).$$

Здесь ортогональное разложение  $\mathbf{g}(t)$  идёт по касательной и нормали, то есть за пределы соприкасающейся плоскости оно не выходит!

Отметим, что псевдоаналог (223А) первой формулы Френе – Серре можно вывести тригонометрическим способом, используя как аргумент общий гиперболический угол движения  $d\gamma$  при дифференцировании в базисе  $\hat{E}_m$  в псевдоплоскости  $\langle P^{1+1} \rangle$ :

$$d\mathbf{i} = \mathbf{p} d\gamma \leftrightarrow \frac{d\mathbf{i}}{d\gamma} = \mathbf{p} \leftrightarrow \frac{d\mathbf{i}}{R d\gamma} = \frac{d\mathbf{i}}{d\sigma\tau} = \frac{\mathbf{p}}{R} = K \cdot \mathbf{p}. \quad (230A)$$

Соответственно для кривых в квазиплоскости  $\langle Q^{1+1} \rangle$  (см. в гл. 5А) в базисе  $\hat{E}_m$  имеет место тригонометрический квазианалог первой формулы Френе – Серре:

$$d\mathbf{e} = \mathbf{n} d\varphi \leftrightarrow \frac{d\mathbf{e}}{d\varphi} = \mathbf{n} \leftrightarrow \frac{d\mathbf{e}}{R d\varphi} = \frac{d\mathbf{e}}{dl} = \frac{\mathbf{n}}{R} = K \cdot \mathbf{n}. \quad (231A)$$

Очевидно, что мировая линия, необъемлемая какой-либо псевдоплоскостью, имеет значение  $4 > \lambda \geq 3$ . В таком случае отдельный её фрагмент или она в целом как регулярная кривая в каждой собственной точке  $M$ , наряду с 4-скоростью  $\mathbf{c}$  и псевдокривизной  $\mathbf{k}$ , имеет следующий  $4 \times 1$  вектор-параметр –  $\mathbf{t}(\sigma\tau)$ , причём и в абсолютной скалярной форме  $T$ . Продолжая дифференцирование вдоль мировой линии по  $\sigma\tau$ , должны выявить всего 4 абсолютных параметров (1 времени и 3 пространству подобных) по размерности  $\langle P^{3+1} \rangle$ , определяющих её конфигурацию.

Выделяя ортосферическую часть производной от  $\mathbf{p}$ , имеем *кручение*  $\mathbf{t}$ :

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{t}(\sigma\tau) &= T(\sigma\tau) \cdot \mathbf{b}(\sigma\tau), \\ \mathbf{t}' \cdot \mathbf{I}^{\oplus} \cdot \mathbf{t} &= T^2, \\ \mathbf{b}' \cdot \mathbf{I}^{\oplus} \cdot \mathbf{b} &= \mathbf{p}' \cdot \mathbf{I}^{\oplus} \cdot \mathbf{p} = 1. \end{aligned} \right\} (\lambda \geq 3) \quad (232A)$$

Кручение  $T^{(m)}$  вызывает ортосферическую ротацию соприкасающейся псевдоплоскости кривизны  $\langle P^{1+1} \rangle_K^{(m)} \equiv \langle \mathbf{p}(\sigma\tau), \mathbf{i}(\sigma\tau) \rangle$  вокруг мгновенной  $\vec{\sigma\tau}$ , или  $\mathbf{i}(\sigma\tau)$ . При этом псевдонормаль  $\mathbf{p}(\sigma\tau)$  вместе с ней претерпевает *сферическую часть* своей общей ротации (как сферической, так и гиперболической). Сферическая часть ротации  $\mathbf{p}(\sigma\tau)$  как единичного вектора имеет кривизну  $T^{(m)}$  (радиус кривизны  $R_T^{(m)} = 1/T$ ) и направляющий орт  $\mathbf{b}(\sigma\tau)$  от  $4 \times 1$  вектора кручения  $\mathbf{t}(\sigma\tau)$ . Поэтому кручение  $T$  можно также определить как кривизну кривизны, или как *кривизну второго порядка*. Бинормаль вращается вокруг  $\vec{\sigma\tau}$  (с  $\mathbf{p}(\sigma\tau)$ ) с *положительной* сферической угловой скоростью  $\zeta_T^{(m)} = c \cdot T^{(m)}$ , смотря на положительное направление времени, – то *против часовой стрелки*. При этом правая тройка векторов  $\{\mathbf{p}(\sigma\tau), \mathbf{b}(\sigma\tau), \mathbf{i}(\sigma\tau)\}$  есть *подвижный трёхгранник Френе* в  $\langle P^{2+1} \rangle$  ( $\lambda = 3$ ). Этот вариант ( $\lambda = 3$ ) отвечает криволинейному *физическому* движению на плоскости, например, планетарному с псевдовинтовой мировой линией, когда  $\langle \mathcal{E}^2 \rangle^{(m)} \equiv \langle \mathbf{v}, \mathbf{g} \rangle^{(m)} \equiv \langle \mathbf{e}_\alpha, \mathbf{e}_\beta \rangle^{(m)}$  тождественна плоскости ротации  $\mathbf{p}!$  Поэтому в (227А) было взято обозначения  $\mathbf{b}(\gamma_i)$  для его нормальной орты.

Математически кручение и бинормаль вычисляются в результате 3-го дифференцирования вдоль мировой линии после (222А) и (223А):

$$\frac{d\mathbf{p}(\sigma\tau)}{d\sigma\tau} = K(\sigma\tau) \cdot \mathbf{i}(\sigma\tau) + T(\sigma\tau) \cdot \mathbf{b}(\sigma\tau). \quad (233A)$$

$4 \times 1$  бинормаль  $\mathbf{b}(\sigma\tau)$  сферически ортогональна  $\mathbf{p}(\sigma\tau)$  в мгновенной *плоскости кручения кривой*  $\langle \mathcal{E}^2 \rangle_T^{(m)} \equiv \langle \mathbf{p}(\sigma\tau), \mathbf{b}(\sigma\tau) \rangle$  (*нормальная плоскость*) и псевдоортогональна  $\mathbf{i}(\sigma\tau)$  в мгновенной *спрямляющей псевдоплоскости*  $\langle P^{1+1} \rangle_p^{(m)} \equiv \langle \mathbf{b}(\sigma\tau), \mathbf{i}(\sigma\tau) \rangle$ . В *правой ориентации орты*  $\hat{\mathbf{E}}_{(m)} = \{\mathbf{p}(\sigma\tau), \mathbf{b}(\sigma\tau), \mathbf{i}(\sigma\tau)\}$  есть абсолютный и пока 3-х ортовый мгновенный подвижный псевдодекартон базис в  $\langle P^{2+1} \rangle^{(m)}$ . Последнее (теперь здесь и далее за пределами аналогии с теорией Френе – Серре) есть мгновенное абсолютное *соприкасающееся плоское трёхмерное подпространство-время*. Кручение  $T^{(m)}$  в окрестности точки  $M$  есть положительная величина для *правого винта вращения*  $\alpha > 0$  (см. выше).

Производная (233А) выражается функционально как *псевдоаналог второй формулы Френе – Серре*. В силу единичности вектора  $\mathbf{p}(\sigma\tau)$ , его дифференцирование вдоль кривой, как и вектора  $\mathbf{i}(\sigma\tau)$  в (223А), сводится к некоторой ротации. Эта общая ротация в (233А) разложена на две псевдоортогональные компоненты: гиперболическую и сферическую.

Гиперболическая ротация  $\mathbf{p}(\sigma\tau)$  происходит синхронно с  $\mathbf{i}(\sigma\tau)$  в одной и той же соприкасающейся псевдоплоскости псевдокривизны  $\langle P^{1+1} \rangle_K^{(m)}$  вокруг мгновенной бинормали  $\mathbf{b}(\sigma\tau)$  с гиперболической угловой скоростью  $\langle \eta_K^{(m)} \rangle$  (что отвечает  $g_K$ ):

$$\left. \begin{aligned} \eta_K^{(m)} &= c \cdot K^{(m)} = c/R_K^{(m)} = g_K^{(m)}/c, \\ g_K(\sigma\tau) &= c^2 \cdot K^{(m)} \cdot \mathbf{i}^{(m)} = g_K(\sigma\tau) \cdot \mathbf{i}^{(m)}. \end{aligned} \right\} \quad (234A)$$

Сферическая ротация  $\mathbf{p}(\sigma\tau)$  происходит синхронно с  $\mathbf{b}(\sigma\tau)$  в нормальной плоскости  $\langle \mathcal{E}^2 \rangle_T^{(m)}$  вокруг  $\mathbf{i}(\sigma\tau)$  со сферической угловой скоростью:

$$\left. \begin{aligned} \zeta_T^{(m)} &= c \cdot T^{(m)} = c/R_T^{(m)} = g_T^{(m)}/c, \\ g_T(\sigma\tau) &= c^2 \cdot T^{(m)} \cdot \mathbf{b}^{(m)} = g_T(\sigma\tau) \cdot \mathbf{b}^{(m)}. \end{aligned} \right\} \quad (235A)$$

где  $g_T^{(m)} = g_T(\sigma\tau)$  – мгновенное внутреннее ускорение кручения псевдонормали  $\mathbf{p}$ . Как  $4 \times 1$  винт оно направлено по касательной  $\mathbf{i}(\sigma\tau)$ .

Абсолютная полная кривизна для общей ротации псевдонормали  $\mathbf{p}(\sigma\tau)$  в векторной и скалярной формах определяются из (233A) как

$$\begin{aligned} \mathbf{q}(\sigma\tau) &= [T(\sigma\tau) \cdot \mathbf{b}(\sigma\tau)] + [K(\sigma\tau)^{(m)} \cdot \mathbf{i}(\sigma\tau)], \\ Q(\sigma\tau) &= \sqrt{T^2(\sigma\tau) - K^2(\sigma\tau)} = 1/R_Q^{(m)}. \end{aligned} \quad (236A)$$

Она времени подобна при  $K > T$ , в том числе при  $T = 0$ , и пространству подобна при  $T > K$ . Но как модуль кривизны:  $Q > 0$ . В зависимости от соотношения между  $T$  и  $K$  определяется либо гиперболическая, либо вырожденная, либо сферическая угловая скорость общей ротации псевдонормали:

$$w_Q^{(m)} = \frac{\|d\mathbf{p}\|_P}{d\tau} = c \cdot Q^{(m)} = c/R_Q^{(m)} = g_Q^{(m)}/c, \quad (237A)$$

где  $g_Q^{(m)} = g_Q(\sigma\tau)$  – мгновенное внутреннее ускорение общей ротации псевдонормали (брутто-параметр). Как  $4 \times 1$  винт оно направлено по соответствующему суммарному вектору полной кривизны ротации псевдонормали  $\mathbf{q}(\sigma\tau)$ . При  $T = K$  имеем:  $Q, w_Q, g_Q = 0$  (это эффект гиперкомпенсации полной кривизны в общей ротации псевдонормали вследствие её вырождения на изотропном конусе).

Отметим также, что в известной монографии Синга, посвящённой ОТО, псевдоаналог теории Френе – Серре почему-то утверждается в абсолютных ковариантных производных для искривлённого псевдориманова пространства-времени [42, с. 17–20]. Хотя в силу его неизотропности тензорные формулы не могут быть однозначными.

При порядке вложения мировой линии  $\lambda = 3$ , но пока не больше этого, имеет место *псевдоаналог третьей формулы Френе – Серре*:

$$\frac{d\mathbf{b}(\sigma\tau)}{d\sigma\tau} = -T(\sigma\tau) \cdot \mathbf{p}(\sigma\tau) = -1/R_T^{(m)} \cdot \mathbf{p}(\sigma\tau). \quad (238A)$$

В этом случае при 4-ом дифференцировании вдоль мировой линии после (222A), (223A) и (233A) ротация бинормали осуществляется синхронно со сферической частью ротации псевдонормали – кручением. Она же при  $\lambda = 3$  есть нормальная проекция на  $\langle \mathcal{E}^2 \rangle_T^{(m)} \equiv \langle \mathbf{v}, \mathbf{g} \rangle_T^{(m)} \equiv \langle \mathbf{e}_\alpha, \mathbf{e}_\beta \rangle_T^{(m)}$  в разложении (226A) сферической ротации касательной! Эти синхронные ротации происходят в одной и той же мгновенной плоскости кручения  $\langle \mathcal{E}^2 \rangle_T^{(m)}$ , отчего происходит тождественная связь параметров кручения с параметрами нормальной проекции кривизны. От того же при  $\lambda = 3$

$$\{ \langle P^{1+1} \rangle_K^{(m)} \oplus \mathbf{b}^{(m)} \} \equiv \{ \langle \mathcal{E}^2 \rangle_T^{(m)} \oplus \mathbf{i}^{(m)} \} \equiv \langle P^{2+1} \rangle^{(m)} \equiv \text{CONST} \quad (239A)$$

есть плоское подпространство-время событий. Такого рода абсолютное движение проецируется гиперболически на какую-либо евклидову плоскость  $\langle \mathcal{E}^2 \rangle \subset \langle P^{2+1} \rangle$  как криволинейное неравномерное *физическое* движение в ней в общем случае, а в частном случае как планетарное.

Планетарное движение в  $\langle P^{2+1} \rangle \subset \langle P^{3+1} \rangle$  есть псевдовинтовое движение вокруг некоторой его стрелы времени  $\vec{\sigma\tau}$ . Оно характеризуется постоянством собственных абсолютных параметров (в скалярной форме) и их определённой взаимосвязью. В пространстве  $\langle P^{3+1} \rangle$  псевдовинтовое движение реализуется тогда и только тогда, когда действует условие:

$$K(\sigma\tau) = \text{const}, \quad T(\sigma\tau) = \text{const}. \quad (240A)$$

При этом нормальная проекция кривизны (главная кривизна) нулевая:

$$\overset{=}{\mathbf{k}} = \mathbf{0}, \text{ но её орт } \overset{=}{\mathbf{p}} \text{ остаётся прежним (только } \overset{=}{\mathbf{k}} = \mathbf{0}!) \text{ с тем же } \mathbf{e}_\alpha, \text{ как } \mathbf{i} !$$

С учётом (222A), (226A),  $\mathbf{p}(\sigma\tau) \parallel \mathbf{i}(\sigma\tau)$ ,  $\mathbf{b}(\sigma\tau) \perp \mathbf{i}(\sigma\tau)$ . К гиперболической ортогональности векторов  $\mathbf{b}$  и  $\mathbf{i}$  добавлено свойство евклидовой ортогональности ( $\mathbf{b} = \mathbf{n}$ ) в  $\langle P^{2+1} \rangle$ . Следовательно, они все входят в абсолютный *мобильный* 3-х ортовый базис  $\vec{E}_1$ . Наиболее просто и наглядно такое равномерное псевдовинтовое движение задаётся и описывается в цилиндрических координатах  $\vec{E}$ :

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= r \cdot \cos \nu, \\ x_2 &= r \cdot \sin \nu, \\ \vec{\sigma\tau} &= a \cdot \nu, \end{aligned} \right\} \quad (241A)$$

$\nu$  – параметрический угол сферической ротации в базовом  $\langle \mathcal{E}^2 \rangle$ ;  
 $r$  – вещественный радиус проекции винта на базовое  $\langle \mathcal{E}^2 \rangle$ , или радиус планетарного физического движения (параметр кривизны);  
 $a$  – времени подобная высота винта для  $\nu$  в 1 рад (параметр кручения).

Осуществляя ортогональное дифференцирование (223А) и (233А) в указанных цилиндрических координатах по  $dv$ , получаем формулы для кривизны и кручения, а также их тригонометрическую взаимосвязь. Исходные параметры « $\gamma$ » и « $a$ » однозначно задают постоянный гиперболический угол движения  $\gamma = \operatorname{arsh} r/\rho = \operatorname{arch} a/\rho$  ( $\operatorname{sh} \gamma = r/\rho$ ,  $\operatorname{ch} \gamma = a/\rho$ ), где  $\rho$  – гипотенуза,  $\gamma$  и  $a$  – противолежащий и прилежащий катеты углу  $\gamma$ . Следовательно,  $\gamma$ ,  $r$  и  $a$  постоянны и однозначно связаны между собой указанными формулами для мировой псевдовинтовой линии в базовом псевдоевклидовом прямоугольном треугольнике со сторонами: гипотенуза  $\rho$ , пространству подобный катет  $\gamma$  и времени подобный катет  $a$ ;  $\rho^2 = a^2 - r^2$ . Математически он получается из ротации в (233А). Этот характеристический псевдоевклидов *внутренний* (см. (§ 6.4)) прямоугольный треугольник реализуется тождественно в 2-х вариантах (при значении угла винта  $\nu = 1$  рад.):

- на боковой цилиндрической (псевдоевклидовой) поверхности касательного к псевдовинтовой линии цилиндра с осью  $\vec{ct}$ ;
- на секущей данный цилиндр по той же оси псевдоплоскости.

Дополнительно этой же мировой линии отвечают два псевдоевклидовых *прямоугольных треугольника* псевдокривизны и ортосферического кручения. Они имеют гипотенузы  $R_K$  и  $R_T$  и острый угол  $\gamma$ . В треугольнике псевдокривизны в соприкасающейся псевдоплоскости  $\langle \mathbf{p}(ct), \mathbf{i}(ct) \rangle$  имеем:  $\rho/R_K = \operatorname{sh} \gamma$ ; в треугольнике кручения в нормальной плоскости  $\langle \mathbf{p}(ct), \mathbf{b}(ct) \rangle$  имеем:  $\rho/R_T = \operatorname{ch} \gamma$ . В итоге имеем:  $\rho/R_K \cdot r/\rho = \operatorname{sh}^2 \gamma$ ,  $\rho/R_T \cdot a/\rho = \operatorname{ch}^2 \gamma$ .

Отсюда следуют все формулы псевдовинтового движения в  $\langle P^{3+1} \rangle$ :

$$\left. \begin{aligned} r/R_K &= r^2/(a^2 - r^2) = (r/\rho)^2 = \operatorname{sh}^2 \gamma, \\ a/R_T &= a^2/(a^2 - r^2) = (a/\rho)^2 = \operatorname{ch}^2 \gamma. \end{aligned} \right\} \quad (242A)$$

С учётом того, что  $a = \operatorname{cth} \gamma \cdot r > r$ , откуда вытекают соотношения:

$$\left. \begin{aligned} r/R_T &= a/R_K = \operatorname{sh} \gamma \cdot \operatorname{ch} \gamma = \operatorname{sh} 2\gamma/2; \\ K &= T \cdot \operatorname{th} \gamma \quad (T > K), \quad R_T = R_K \cdot \operatorname{th} \gamma. \end{aligned} \right\} \quad (243A)$$

Ротация псевдонормали направлена в нормальной плоскости  $\langle \mathcal{E}^2 \rangle_T^{(1)}$  тангенциально вектору касательной от оси винта  $\vec{ct}$ . Бинормаль вращается синхронно и направлена перпендикулярно к ней к проекции винта на  $\langle \mathcal{E}^2 \rangle_T^{(1)}$ . Угловые скорости и внутренние ускорения выражаются как:

$$\begin{aligned} w_Q &= \frac{|d\mathbf{p}|_p}{d\tau} = c \cdot Q = c \cdot \sqrt{T^2 - K^2} = 1/\rho = \frac{c \cdot \operatorname{sh} \gamma}{r} = \frac{v^*}{r}, \\ g &= c^2/R_K = c^2 \cdot \operatorname{sh}^2 \gamma/r = v^{*2}/r = v^* \cdot \zeta^* = g^\perp \quad (g^\perp \perp v, \bar{g} = \mathbf{o}), \\ g^{(1)} &= g \cdot \operatorname{sch} \gamma = v \cdot \zeta^* = v^2/\rho = \frac{1}{g}^{(1)} \quad \left( \frac{1}{g}^{(1)} \parallel \frac{1}{g} \right). \end{aligned}$$

В каждой точке  $M$  псевдовинта спрямляющая псевдоплоскость  $\langle P^{1+1} \rangle_p^{(m)} \equiv \langle \mathbf{b}(\sigma\tau), \mathbf{i}(\sigma\tau) \rangle$  пересекает объемлющий цилиндр по мгновенному касательному эллипсу. В его перигее (точке  $M$ ) радиусы касательных окружности и гиперболы совпадают из-за того, что бинормаль и нормаль к псевдовинтовой мировой линии одинаковы ( $\mathbf{n} = \mathbf{b}$ ).

В подвижном трёхграннике Френе  $\{\langle \mathbf{p}(\sigma\tau), \mathbf{b}(\sigma\tau), \mathbf{i}(\sigma\tau) \rangle\}$  4-векторы  $\mathbf{p}(\sigma\tau)$  и  $\mathbf{b}(\sigma\tau)$  перпендикулярны друг другу в нормальной плоскости  $\mathcal{E}^2_{\tau}^{(1)} \equiv \langle \mathbf{p}(\sigma\tau), \mathbf{b}(\sigma\tau) \rangle$  с направляющими ортами  $\mathbf{e}_\alpha$  и  $\mathbf{e}_\eta$ , т. е. евклидово параллельно и ортогонально к мгновенной дуге проекции кривой, окружности радиуса  $\Gamma$  планетарного физического движения в базовом  $\mathcal{E}^2_{\tau}^{(1)}$  – против направления  $\mathbf{v}$  для левой и по направлению  $\mathbf{v}$  для правой псевдовинтовой линии;  $4 \times 1$  вектор единичной касательной  $\mathbf{i}(\sigma\tau)$ , как и  $\mathbf{c}(\sigma\tau)$ , направлен по мировой линии, то есть по стреле  $\vec{\sigma\tau}$ . В силу этого  $\mathbf{b}(\sigma\tau)$  и  $\mathbf{i}(\sigma\tau)$  совместно сферически и гиперболически ортогональны.

Изложенная абсолютная трактовка, в принципе, обобщается для псевдовинтового движения, проекцией которого является обычное эллиптическое планетарное физическое движение.

\* \* \*

В самом общем случае для мировой линии в  $\langle P^{3+1} \rangle$  имеем  $\lambda = 4 = \max$ . Тогда бинормаль  $\mathbf{b}(\sigma\tau)$  как единичный вектор подвергается общей сферической ротации в  $\langle \mathcal{E}^3 \rangle^{(m)}$  – псевдоортогонально и дополнительной к  $\mathbf{i}(\sigma\tau)$ , но всего с двумя степенями свободы в силу её перманентной сферической ортогональности к псевдонормали. Формально вторая степень свободы вызвана ротацией плоскости кручения  $\mathcal{E}^2_{\tau}^{(m)} \equiv \langle \mathbf{p}(\sigma\tau), \mathbf{b}(\sigma\tau) \rangle$  в  $\langle \mathcal{E}^3 \rangle^{(m)}$ , или её *отопрецессией*  $Y(\sigma\tau)$ . При 4-ом дифференцировании вдоль мировой линии после (222А), (223А) и (233А) общая сферическая ротация бинормали разлагается на 2 сферические составляющие, ортогональные друг другу. В результате имеем *полную третью формулу*:

$$\frac{d\mathbf{b}(\sigma\tau)}{d\sigma\tau} = -T(\sigma\tau) \cdot \mathbf{p}(\sigma\tau) + Y(\sigma\tau) \cdot \mathbf{h}(\sigma\tau). \quad (244A)$$

Здесь первая часть сферической ротации бинормали синхронна со сферической частью общей ротации псевдонормали в формуле (233А). Обе ротации происходят в плоскости  $\mathcal{E}^2_{\tau}^{(m)}$ . Вторая часть сферической ротации бинормали осуществляется в *мгновенной плоскости отопрецессии бинормали*  $\mathcal{E}^2_{\gamma}^{(m)} \equiv \langle \mathbf{b}(\sigma\tau), \mathbf{h}(\sigma\tau) \rangle$  вокруг мгновенной псевдонормали  $\mathbf{p}(\sigma\tau)$ . (Как и ранее, здесь используется взаимная ортогональность единичного вектора-функции и его вектора-дифференциала любого порядка.) Единичный 4-вектор *тринормали*  $\mathbf{h}(\sigma\tau)$  является при  $\lambda = 4 = \max$  взаимно однозначным ортогональным дополнением в  $\mathcal{E}^3_{\tau}^{(m)}$  к  $\mathcal{E}^2_{\tau}^{(m)}$  и он тоже пространству подобный.



Наиболее общо он определяется также однозначно как псевдоортогональное дополнение в базовом псевдоевклидовом пространстве-времени  $\langle P^{3+1} \rangle$  к тройке единичных орт-векторов – псевдонормали, бинормали и касательной:

$$\left. \begin{aligned} \{ \langle \mathcal{E}^2 \rangle_Y^{(m)} \oplus \mathbf{p}(\mathbf{ct}) \} &\equiv \langle \mathcal{E}^3 \rangle^{(m)} \equiv \{ \langle \mathcal{E}^2 \rangle_T^{(m)} \oplus \mathbf{h}(\mathbf{ct}) \}, \\ \{ \langle \mathcal{E}^3 \rangle^{(m)} \oplus \mathbf{i}(\mathbf{ct}) \} &\equiv \langle P^{3+1} \rangle. \end{aligned} \right\} \quad (245A)$$

Тринормаль  $\mathbf{h}(\mathbf{ct})$  в плоскости ортопрецессии бинормали  $\mathbf{b}(\mathbf{ct})$  перманентно сферически ортогональна ей. При заключительном 5-ом дифференцировании вдоль мировой линии после (222A), (223A), (233A) и (244A) имеем последнюю дифференциальную *четвёртую формулу*:

$$\frac{d\mathbf{h}(\mathbf{ct})}{d\mathbf{ct}} = -Y(\mathbf{ct}) \cdot \mathbf{b}(\mathbf{ct}) = -1/R_Y^{(m)} \cdot \mathbf{b}(\mathbf{ct}). \quad (246A)$$

Это соотношение вытекает из очевидного условия, что формально последующий в указанном ряду и отсутствующий в (246A) абсолютный дифференциально-геометрический параметр пятого порядка при  $\lambda = 4$  является обязательно нулевым (то есть их цепь на этом этапе обрывается). Ряд, разумеется, тоже имеет свой вещественный аналог для регулярных кривых, вложенных в (квази) евклидово пространство размерности 4.

В последовательности  $\hat{E}_{(m)} = \{ \mathbf{p}(\mathbf{ct}), \mathbf{b}(\mathbf{ct}), \mathbf{h}(\mathbf{ct}), \mathbf{i}(\mathbf{ct}) \}$  эти единичные векторы задают теперь *полный абсолютный 4-х ортовый мгновенный псевдодекартов базис* в  $\langle P^{3+1} \rangle$ . Они в своих тройках задают правую ориентацию базисных векторов, в целом *мгновенный псевдоортогональный репер*. (Ортопрецессия бинормали в окрестности точки М мировой линии совершается в  $\langle \mathcal{E}^3 \rangle^{(m)}$  как для правого винта в мгновенном 3-х ортовом суббазисе  $\hat{E}_{(m)}^{(3)} = \{ \mathbf{p}(\mathbf{ct}), \mathbf{b}(\mathbf{ct}), \mathbf{h}(\mathbf{ct}) \}$  при положительном значении величины  $Y$ .) В приведённой форме подобная четвёрка базисных векторов  $\{ \mathbf{p}(\mathbf{ct}), \mathbf{b}(\mathbf{ct}), \mathbf{h}(\mathbf{ct}), \mathbf{i}(\mathbf{ct}) \}$  задаёт *характеристический подвижный четырёхгранник* в  $\langle P^{3+1} \rangle$ .

Абсолютная мгновенная угловая скорость ортосферической ортопрецессии бинормали и вместе с тем сферической ротации тринормали в плоскости  $\langle \mathcal{E}^2 \rangle_Y^{(m)}$  выражается в виде:

$$\zeta_Y^{(m)} = \frac{\|d\mathbf{h}\|_P}{d\mathbf{ct}} = c \cdot Y^{(m)} = c/R_Y^{(m)} = a_Y^{(m)}/c, \quad (247A)$$

где  $a_Y^{(m)} = a_Y(\mathbf{ct})$  – мгновенное *внутреннее ускорение ортопрецессии бинормали и ротации тринормали*. Как 4-вектор она направлена по мгновенному вектору тринормали:

$$\mathbf{a}_Y(\mathbf{ct}) = c^2 \cdot Y^{(m)} \cdot \mathbf{h}^{(m)} = c \cdot \zeta_Y^{(m)} \cdot \mathbf{h}^{(m)}. \quad (248A)$$

Абсолютная полная сферическая кривизна для общей сферической ротации бинормали  $\mathbf{h}(\sigma\tau)$  в векторной и скалярной формах определяется из (244А) в виде:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{l}(\sigma\tau) &= [-T(\sigma\tau) \cdot \mathbf{p}(\sigma\tau)] + [Y(\sigma\tau) \cdot \mathbf{h}(\sigma\tau)], \\ L(\sigma\tau) &= \sqrt{T^2(\sigma\tau) + Y^2(\sigma\tau)} = 1/R_L^{(m)}; \end{aligned} \right\} \quad (249A)$$

$$\zeta_L^{(m)} = \frac{\|\mathbf{d}\mathbf{b}\|_P}{d\tau} = c \cdot L^{(m)} = c/R_L^{(m)} = a_L^{(m)}/c. \quad (250A)$$

Здесь  $a_L^{(m)} = a_L(\sigma\tau)$  – мгновенное внутреннее ускорение общей сферической ротации бинормали (брутто-параметр). Как 4-вектор оно направлено по соответствующему суммарному вектору полной кривизны ротации бинормали  $\mathbf{l}(\sigma\tau)$ .

В свою очередь, тринормаль  $\mathbf{h}(\sigma\tau)$ , согласно (246А), подвергается сферической ротации  $Y$  в плоскости  $\langle \mathcal{E}^2 \rangle_Y^{(m)}$  синхронно со второй частью сферической ротации бинормали. Эта часть ротации  $\mathbf{h}(\sigma\tau)$  как единичного вектора имеет сферическую кривизну  $Y$  (радиус кривизны  $R_Y = 1/Y$ ) и направляющий орт  $\mathbf{h}(\sigma\tau)$  – вектор тринормали. Поэтому ортопрецессию  $Y$  можно определить как кривизну *третьего* порядка.

В РТГ в базовом пространстве-времени Минковского  $\lambda_{\max} - 1 = 3$  есть *максимальный порядок абсолютной кривизны мировой линии*. В псевдоримановом пространстве-времени ОТО он может быть тем же, однако ввиду неизотропности и неоднородности базового пространства результаты по формулам – аналогам не могут быть однозначными, то есть независимыми от выбранного исходного базиса.

Таким образом, в этой заключительной главе с применением средств тензорной тригонометрии была изложена геометрическая трактовка абсолютного движения материальной точки под действием активных сил любой природы, как если бы оно происходило в пространстве-времени Минковского и отображалось в универсальном базисе без искажения пространственно-временной гравитационной линзой (при её наличии), разделяющей эту материальную точку и конкретного наблюдателя.

## Список литературы

В данный список включены как цитируемые источники, так и литература учебного и информационного характера, содержащая необходимый фундаментальный материал. В ряде случаев для переводных изданий дополнительно указаны оригинальные первоисточники.

1. Александров П. С. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. – М.: Наука, 1979.
2. Архангельский А. В. Конечномерные векторные пространства. – М.: Физматгиз, 1982.
3. Беккенбах Э., Беллман Р. Неравенства: Пер. с англ. – М.: Мир, 1965.
4. Беклемишев Д. В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. – М.: Физматгиз, 2003.
5. Беллони Л., Рейна Ч. Прецессия Томаса. Подход Зоммерфельда: Пер. с англ. // Эйнштейновский сборник 1984 – 85. – М.: Наука, 1988, с. 201 – 214.  
В оригинале: Belloni L., Reina C. Sommerfeld's way to the Thomas precession // *Eur. J. Phys.* – 1986, v. 7, p. 55 – 61.
6. Блох П. В., Минаков А. А. Гравитационные линзы. – Киев: Наукова Думка, 1989.
7. Больяи Я. Приложение, содержащее науку о пространстве абсолютно истинную, не зависящую от истинности или ложности XI аксиомы Евклида...: Пер. с лат. – М. - Л., 1950.  
В оригинале: Bolyai J. Appendix scientiam spatii absolute veram exhibens: a veritate ant falsitate Axiomatis XI Euclidei... – Maros-Vásárhely, 1832.
8. Боулер М. Гравитация и относительность: Пер. с англ. – М.: Мир, 1979.  
В оригинале: Bowler M. Gravitation and relativity. – Oxford - New York - Toronto - Sydney - Paris - Frankfurt: Pergamon Press, 1976.
9. Бриллюэн Л. Новый взгляд на теорию относительности: Пер. с франц. – М.: Мир, 1972.  
В оригинале: Brillouin L. Relativity reexamined. – New York - London: Acad. Press, 1970.
10. Буддырев В. С., Павлов Б. С. Линейная алгебра и функции многих переменных. – Л.: Издательство ЛГУ, 1985.

11. Вейль Г. Пространство - Время - Материя: Пер. с нем. – М.: Янус, 1996.
12. Владимиров В. С. Методы теории функций многих комплексных переменных. – М.: Наука, 1964, с. 48 – 49.
13. Вольф Дж. Пространства постоянной кривизны: Пер. с англ. – М.: Наука, 1982.
14. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. – М.: Наука, 1988.
15. Гельфанд И. М. Лекции по линейной алгебре. – М.: Добросвет, МЦНМО, 1998.
16. Гилл Ф., Мюррей У. Численные методы условной оптимизации: Пер. с англ. – М.: Мир, 1977, с. 196 – 206.
17. Гильберт Д. Основания физики: Пер. с нем. // В сборнике: Альберт Эйнштейн и теория гравитации. – М.: Мир, 1979.  
В оригинале: Hilbert D. Die Grundlagen der Physik // Gesellschaft Wiss. Göttingen / Math.-phys. Klasse. – 1915, Heft 3, S. 395.
18. Грегори Р., Кришнамурти Е. Безошибочные вычисления. Методы и приложения. // Гл. III. Точное вычисление обобщённых обратных матриц: Пер. с англ. – М.: Мир, 1988, с. 124 – 147.
19. Дикке Р. Гравитация и Вселенная: Пер. с англ. – М.: Мир, 1972.  
В оригинале: Dicke R. Gravitation and the Universe. – Philadelphia: Amer. Philosoph. Soc., 1970.
20. Ефимов Н. В., Розендорн Э. Р. Линейная алгебра и многомерная геометрия. – М.: Наука, 1974.
21. Ефимов Н. В. Высшая геометрия. – М.: Наука, 1978.
22. Зоммерфельд А. Строение атома и спектры. Том 1: Пер. с нем. – М.: Гостехиздат, 1956.  
В оригинале: Sommerfeld A. Atombau und Spectrallinien. – Braunschweig, 1931, Bd. 1, S. 707 – 711.
23. Ильин В. А., Позняк Э.Г. Линейная алгебра. – М.: Наука, 1984.
24. Каган В. Ф. Лобачевский и его геометрия. – М.: ГИТТЛ, 1955.
25. Клейн Ф. Неевклидова геометрия: Пер. с нем. – М.- Л.: ГОНТИ, 1936.  
В оригинале: Klein F. Vorlesungen über Nicht-Euklidische Geometrie. – Berlin: Julius Springer, 1928.
26. Клейн Ф. Сравнительное обозрение новейших геометрических исследований (Эрлангенская программа): Пер. с нем. // В сборнике: Об основаниях геометрии. – М.: Гостехиздат, 1950.
27. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике: Пер. с англ. – М.: Наука, 1978.
28. Кострикин А. И. Введение в алгебру. //Часть 1. Основы алгебры./ Часть 2. Линейная алгебра.– М.: Физматлит, 2002.
29. Кострикин А. И., Манин Ю. И. Линейная алгебра и геометрия. – М.: Наука, 1986.

30. Ланкастер П. Теория матриц: Пер. с англ. – М.: Наука, 1982.
31. Лобачевский Н. И. О началах геометрии. – Казань: Казанский вестник, 1829 – 1830.
32. Логунов А. А. Лекции по теории относительности. – М.: Наука, 2002.
33. Логунов А. А. Теория гравитационного поля. – М.: Наука, 2001.
34. Лоренц Г. Электромагнитные явления в системе, движущейся с любой скоростью, меньшей скорости света: Пер. с англ. // В сборнике: Принцип относительности. – М.: Атомиздат, 1973.  
В оригинале: Lorentz H. Electromagnetic phenomena in a system moving with any velocity smaller than that of light // *Amster. Proc.*, 1904, v. 6, p. 809. / 1904, v. 12, p. 986.
35. Маркус М., Минк Х. Обзор по теории матриц и матричных неравенств: Пер. с англ. – М.: Наука, 1972.
36. Минковский Г. Пространство и время: Пер. с нем. // В сборнике: Принцип относительности. – М.: Атомиздат, 1973.  
В оригинале: Minkowski H. Raum und Zeit // *Phys. Ztschr.* – 1909, Bd. 10, S. 104.
37. Паули В. Теория относительности: Пер. нем. – М.: Наука, 1983.
38. Постников М. М. Лекции по геометрии. // Семестр 1. Аналитическая геометрия. / Семестр 2. Линейная алгебра. – М.: Наука, 1986.
39. Пуанкаре А. К динамике электрона: Пер. с франц. // В сборнике: Принцип относительности. – М.: Атомиздат, 1973.  
В оригинале: Poincaré H. Sur la dynamique de l'electron // *C. R. Acad. Sci., Paris* – 1905, v. 140, p. 1504. / *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo* – 1906, v. XXI, p. 129.
40. Радымов А. Г. Развитие формулы К. Э. Циолковского // В сборнике: Идеи Циолковского и проблемы космонавтики. – М.: Издательство Машиностроение, 1974, с. 80 – 90.
41. Рашевский П. К. Риманова геометрия и тензорный анализ. – М.: Гостехиздат, 1953.
42. Синг Дж. Общая теория относительности: Пер. с англ. – М.: Издательство ИЛ, 1963.
43. Смородинский Я. А. Геометрия Лобачевского и кинематика Эйнштейна. // Эйнштейновский сборник 1971. – М.: Наука, 1972, с. 272 – 301.
44. Тихонов А. Н. О некорректных задачах линейной алгебры и устойчивом методе их решения // *ДАН СССР* – 1965, т. 163, №3, с. 591 – 594.
45. Фаддеев Д. К., Фаддеева В. Н. Вычислительные методы линейной алгебры. – М.: Физматгиз, 1963, с. 312 – 313.
46. Фок В. А. Теория пространства, времени и тяготения. – М.: Гостехиздат, 1961.

47. Харди Г., Литлвуд Д., Поля Г. Неравенства: Пер. с англ. – М.: ИЛ, 1948.  
В оригинале: Hardy G., Littlewood J., Pólya G. Inequalities. – London: Cambridge University, 1934.
48. Эйнштейн А. К электродинамике движущихся тел: Пер. с нем. // В сборнике: Принцип относительности. – М.: Атомиздат, 1973.  
В оригинале: Einstein A. Zur Elektrodynamik bewegter Körper // Ann. der Phys. – 1905, Bd. 17, S. 891.
49. Эйнштейн А. Основы общей теории относительности: Пер. с нем. // В сборнике: Альберт Эйнштейн и теория гравитации. – М.: Мир, 1979.  
В оригинале: Einstein A. Die Grundlagen der allgemeinen Relativitätstheorie // Ann. der Phys. – 1916, Bd. 49, S. 769.
50. Яглом И. М. Принцип относительности Галилея и неевклидова геометрия. – М.: Наука, 1969.
51. Born M. // Ann. der Phys. – 1909, Bd. 30, S. 1.
52. Decell H. An application of the Cayley – Hamilton theorem to generalized matrix inversion // SIAM Rev. – 1965, v. 7, p. 526 – 528.
53. Dicke R. Gravitation without a Principle of Equivalence // Rev. Mod. Physics – New York: Amer. Phys. Soc., 1957, v. 29, № 3, p. 363 – 376.
54. Grassmann H. Die lineale Ausdehnungslehre. – Leipzig, 1844.
55. Gillies A. On the classification of matrix generalized inverses // SIAM Rev. – 1970, v. 12, p. 573 – 576.
56. Gödel K. Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme // Monatsch. Math. Phys. – 1931, Bd. 38, S. 173 – 198.
57. Herglotz G. // Ann. der Phys. – 1911, Bd. 36, S. 497.
58. Langevin P. // Scientia. – 1911, v. 10, p. 31.
59. Moore E. On the reciprocal of the general algebraic matrix // Abstract. Bull. Amer. Math. Soc. – 1920, № 26, p. 394 – 395.
60. Penrose R. A generalized inverse for matrices // Proc. Cambridge Philos. Soc. – 1955, v. 51, № 3, p. 406 – 413.
61. Souriau J.-M. Une méthode pour la décomposition spectrale et l'inversion des matrices // C. R. Acad. Sci., Paris – 1948, v. 227, p. 1010 – 1011.
62. Sommerfeld A. Über die Zusammensetzung der Geschwindigkeiten in der Relativtheorie // Phys. Ztschr. – 1909, Bd. 10, S. 826 – 829.
63. Thomas L. // Nature. – 1926, v. 117, p. 514.
64. Thirring W. An Alternative Approach to the Theory of Gravitation // Ann. of Phys. – New York and London: Acad. Press, 1961, v. 16, p. 96 – 117.
65. Varičák V. Die Relativtheorie und die Lobatschewskische Geometrie // Phys. Ztschr. – 1910, Bd. 11, S. 93 – 96.
66. Whittaker E. A history of the theories of aether and electricity. // Vol. 2 The modern theories 1900 – 1926. – London: Nelson, 1953.

## Именной указатель

- Адамар (Hadamard J.) 6, 7, 56, 57, 67, 139, 219  
Александров П. С. 322  
Архангельский А. В. 322
- Беккенбах** (Beckenbach E.) 322  
Беклемишев Д. В. 322  
Беллман (Bellman R.) 322  
Беллони (Belloni L.) 322  
Бельтрами (Beltrami E.) 170, 173, 176, 177, 188, 239, 240, 242, 243, 257, 261, 291  
Бине (Binet J.) 54  
Блох П. В. 322  
Большая (Bolyai J.) 8, 170, 172, 174, 176, 201, 243, 249, 251, 257, 262, 291, 292, 303, 322  
Бонне (Bonnet O.) 188, 256  
Борн (Born M.) 226, 325  
Боулер (Bowler M.) 189, 288, 322  
Бриллюэн (Brillouin L.) 189, 302, 322  
Брэдли (Bradley J.) 254  
Булдырев В. С. 322
- Варинг** (Waring E.) 16, 23, 33, 142  
Варичак (Varičak V.) 243, 325  
Вейль (Weil H.) 6, 70, 323  
Виет (Viète F.) 16, 17, 23, 39, 56  
Владимиров В. С. 323  
Вольф (Wolf J.) 323
- Галилей (Galilei G.) 184, 192, 194–196, 204
- Гамильтон (Hamilton W.) 6, 27, 28, 33, 39, 63  
Гантмахер Ф. Р. 323  
Гаусс (Gauss C.) 176, 188, 242, 243, 251, 256, 257, 278, 292, 302  
Гегель (Hegel G.) 304  
Гельфанд И. М. 323  
Гельмгольц (Helmholtz H.) 300  
Герглотц (Herglotz G.) 205, 216, 312, 325  
Гессе (Hesse L.) 20–22, 61, 66  
Гёдель (Gödel K.) 305, 325  
Гёльдер (Hölder L.) 19  
Гилл (Gill Ph.) 323  
Гиллис (Gillies A.) 325  
Гильберт (Hilbert D.) 176, 289, 292, 323  
Грам (Gram J.) 49, 55, 57, 136, 219  
Грассман (Grassmann H.) 6, 325  
Грегори (Gregory R.) 323  
Греффе (Grefe K.) 24
- Д’Аламбер (D’Alembert J.) 65, 66  
Де Бройль (De Broglie L.) 301  
Дедекин (Dedekind R.) 6, 70  
Декарт (Descartes R.) 7, 26  
Дикке (Dicke R.) 189, 323, 325  
Диссел (Dessell H.) 51, 325  
Дирак (Dirac P.) 198  
Допплер (Doppler Ch.) 258, 296
- Евклид (Euclid) 5, 19, 23, 142, 172, 173, 175  
Ефимов Н. В. 323
- Жордан** (Jordan C.) 6, 28, 36–38, 46

- Зольднер (Soldner J.) 228  
Зоммерфельд (Sommerfeld A.)  
188, 221, 226, 243, 247, 256, 325
- Ильин В. А.** 323
- Кавендиш (Cavendish H.)** 295  
Каган В. Ф. 323  
Кант (Kant E.) 304  
Кантор (Cantor G.) 6, 70  
Капелли (Capelli A.) 6, 55, 59, 68  
Клейн (Klein F.) 170–176, 178,  
188, 196, 243, 257, 260, 261,  
263–265, 276, 279, 281, 323  
Коперник (Copernik N.) 287, 295  
Корн (Korn G., Korn T.) 323  
Кострикин А. И. 323  
Коши (Cauchy A.) 6, 7, 19, 54, 60,  
67, 135, 136, 138, 145, 151, 153  
Крамер (Cramer G.) 6, 53  
Кристоффель (Cristoffel E.)  
286–288, 290, 293  
Кришнамурти (Krishnamurthy E.)  
323  
Кронекер (Kronecker L.) 6, 55, 59,  
68  
Кулон (Coulomb Ch.) 288  
Курант (Courant R.) 60, 61  
Кэли (Cayley A.) 6, 27, 28, 33, 39,  
63, 170–172, 175, 281
- Лагранж (Lagrange J.)** 61, 184,  
192–196, 222, 266, 314  
**Ламберт (Lambert J.)** 5, 170–173,  
175, 176, 178, 240, 243, 249, 273,  
274, 276, 278, 281  
**Ланжевэн (Langevin P.)** 234, 325  
**Ланкастер (Lankaster P.)** 324  
**Лаплас (Laplace P.)** 66, 289  
**Леверье (Le Verrier U.)** 6, 16, 23,  
27, 33, 142  
**Литлвуд (Littlewood J.)** 325
- Лобачевский Н. И.** 8, 24, 170, 172,  
174, 176, 187, 201, 202, 242, 243,  
249, 251, 257, 262, 291, 292, 303,  
324  
**Логунов А. А.** 189, 288, 324  
**Лоренц (Lorentz H.)** 7, 8, 164,  
166–168, 174, 175, 178–180,  
182–185, 195, 196, 198, 203, 204,  
206, 209, 210, 243, 247, 282, 289,  
306, 324
- Маклорен (Maclaurin C.)** 14, 19, 95  
**Максвелл (Maxwell J.)** 195, 198  
**Манин Ю. И.** 323  
**Манн (Mann Th.)** 305  
**Маркус (Marcus M.)** 324  
**Мах (Mach E.)** 189, 282, 283, 285,  
288, 289, 293, 295, 303  
**Менье (Meusnier J.)** 242  
**Минаков А. А.** 322  
**Миндинг Ф.Г.** 173, 176  
**Минк (Minc H.)** 324  
**Минковский (Minkowski H.)** 6,  
69, 159, 160, 163, 167, 169, 171,  
174, 176, 177, 179–185, 188,  
189, 195–197, 202, 203, 206, 211,  
212, 214, 221, 222, 225, 226,  
228, 230, 242–245, 249, 256–  
259, 262, 267, 273, 281, 282,  
285–289, 291, 293, 295, 299,  
301–306, 308, 320, 321, 324  
**Муавр (Moivre A.)** 5, 98, 118, 150,  
151  
**Мур (Moore E.)** 6, 9, 51, 61, 68, 325  
**Мюррей (Murrey W.)** 323
- Нётер (Noether A.)** 290  
**Николай Кузанский (Nicolaus  
Cusanus)** 284  
**Ньютон (Newton I.)** 12, 17, 23,  
142, 225, 231, 232, 282–285, 288,  
293, 295, 297, 298, 301, 304



- Павлов Б. С.** 322  
**Паули (Pauli W.)** 324  
**Пенроуз (Penrose R.)** 6, 9, 51, 61, 68, 325  
**Пифагор (Pythagoras)** 56, 146, 204, 216, 253, 256, 257, 263, 264, 266, 267, 269, 277, 278, 312, 318  
**Планк (Planck M.)** 297, 300  
**Позняк Э. Г.** 323  
**Полиа (Pólya G.)** 325  
**Постников М. М.** 8, 324  
**Птолемей (Πτολεμαῖος)** 288  
**Пуанкаре (Poincaré H.)** 6, 8, 111, 154, 183–185, 195–198, 202, 203, 206, 221, 231, 243, 244, 249, 253, 257, 282, 284, 288, 302, 307, 324  
**Пуассон (Poisson S.)** 288  
  
**Радымов А. Г.** 324  
**Рашевский П. К.** 324  
**Рейна (Reina C.)** 322  
**Риман (Riemann G.)** 176, 275, 276, 280, 281, 286, 287, 290–293  
**Риччи (Ricci-Curbastro G.)** 286  
**Розендорн Э. Р.** 323  
  
**Саккери (Saccheri G.)** 175  
**Серре (Serre J.)** 189, 305, 306, 310, 314–317  
**Синг (Synge J.)** 316  
**Сильвестр (Silvester J.)** 6, 26, 35, 328  
**Смородинский Я. А.** 324  
**Снеллиус (Snellius W.)** 298  
**Сурьё (Souriau J.-M.)** 6, 27, 28, 30, 33, 34, 39, 51, 325  
  
**Тауринус (Taurinus F.)** 5, 176, 243, 281  
**Тирринг (Thirring W.)** 189, 325  
**Тихонов А. Н.** 6, 60, 324  
  
**Томас (Thomas L.)** 188, 247, 256, 271, 325  
  
**Уиттекер (Whittaker E.)** 325  
**Уоллингфорд (Wallingford R.)** 5  
  
**Фаддеев Д. К.** 6, 15, 27, 30, 33, 39, 51, 324  
**Фаддеева В. Н.** 324  
**Фитцджеральд (Fitzgerald G.)** 217  
**Фойгт (Voigt V.)** 195, 210  
**Фок В. А.** 299, 324  
**Френе (Frenet J.)** 189, 305, 306, 310, 314–317, 319, 320  
**Фробениус (Frobenius F.)** 6, 7, 12, 19, 51, 142, 144, 146  
  
**Харди (Hardy G.)** 325  
  
**Циолковский К. Э.** 188, 234  
  
**Чайковский П. И.** 5  
  
**Швейкарт (Schweikart F.)** 243  
**Шмидт (Schmidt E.)** 49, 57  
**Шрёдингер (Schrödinger E.)** 198  
**Штурм (Sturm J.-Ch.)** 23, 25, 26  
  
**Эддингтон (Eddington A. S.)** 299  
**Эйлер (Euler L.)** 5, 65, 66, 98, 118  
**Эйнштейн (Einstein A.)** 8, 184, 185, 188, 196, 197, 202, 207, 218, 221, 249, 251, 253, 254, 270, 282, 283, 287–290, 294, 296–300, 304, 325  
**Эрмит (Hermite Ch.)** 6, 62–64, 67, 68, 151–153  
**Этвёш (Eötvös L.)** 283  
  
**Яглом И.М.** 325  
**Якоби (Jacobi K.)** 61, 66, 292

## Предметный указатель<sup>(\*)</sup>

### Основная часть монографии

- Аннулирующий минимальный многочлен 34  
Антикоммутативность 126
- Базисы координатные**  
кваздекартовы 116  
псевдодекартовы 117  
тригонометрический 85, 109  
универсальный 117
- Внешние геометрии постоянной кривизны**  
гиперболические 116  
сферическая 91
- Генеральные неравенства**  
косинусное 131, 133  
общее 145, 146  
синусное 138  
средних величин 18
- Гиперболоиды I и II Минковского 169  
Гиперсфероид 91
- Деформация (бинарная)**  
гиперболическая 110  
сферическая 99  
элементарная 122, 123
- Дианаль 59
- Жорданова форма** 36–38
- Квазиевклидово пространство** 116
- Квазиобратная матрица**  
аффинная 43  
гиперболическая (ортогональная) 117  
сферическая (ортогональная) Мура–Пенроуза 51
- Коммутативность 124
- Комплексификация** 62  
адекватная 65, 150  
эрмитова 67, 151
- Косинусное отношение 59
- Линеоры** 70, 147
- Матрицы сингулярные**  
нуль-дефектные 37  
нуль-нормальные 48  
нуль-простые 36
- Минорант 54
- Монобинарная форма**  
простой матрицы 63, 87  
тензорных тригонометрических функций 84, 85
- Моторные тензорные углы и функции** 88, 94
- Нормы матриц (квадратичные)**  
генеральные 141–143  
частные 145, 146  
порядка 1 Фробениуса 142, 143
- Параметры сингулярности**  
ранг 15  
1-й рок 17  
2-й рок 33
- Планары 70
- Предельный метод вычисления условного экстремума** 61
- Принцип бинарности 87
- Принцип монарности 87
- Проективные модели Клейна**  
вне абсолюта (котангенсная) 172  
внутри абсолюта (тангенсная) 170

(\*) Для удобства пользования указатель разбит на две части.

- Проективные тензорные углы и функции 72, 77  
 Проекторы собственные  
   аффинные 42  
   гиперболические (орто) 118  
   сферические (орто) 48, 50  
 Псевдоевклидово пространство 117  
  
**Рефлекторы собственные**  
   аффинные 78  
   гиперболические 110  
   срединный 89, 115  
   сферические 74  
 Ротация  
   гиперболическая 110  
   ортосферическая 91, 115, 116  
   сферическая 88  
   элементарная 105, 123  
  
 Синусное отношение 58  
 Специальный принцип относительности  
   математический 183  
   физический 183, 184  
 Средние величины  
   алгебраические 17  
   арифметическое 17  
   геометрическое 18  
   реверсивные формы 18  
   степенные 17  
 Суммирование движений  
   полярное представление 161  
   правило суммирования 166  
  
**Сферическо-гиперболическая аналогия**  
   абстрактная 109  
   конкретная 112  
**Тензорная тригонометрия (плоская)**  
   евклидова 89  
   квазиевклидова 91  
   псевдоевклидова 116  
**Тригонометрический спектр**  
   нуль-простой матрицы 129  
   мультипликативной 130  
  
**Уравнение алгебраическое (вековое)**  
   16, 23  
   с положительными корнями 23  
   предельный глобальный метод решения 24  
   признаки положительности корней 26, 27  
  
**Фундаментальный метрический тензор псевдоевклидова пространства** 156  
**Фундаментальный метрический тензор псевдориманова пространства** 292  
**Фундаментальный рефлектор-тензор бинарного пространства** 116, 155  
   неориентированного 157  
   ориентированного 156  
  
**Характеристические коэффициенты матричные** 1-го и 2-го рода 16, 28  
   структура 31, 32  
   редуцированные формы 39, 40  
   скалярные 16

## Приложение

- Аберрация 254, 258  
  
**Геометрии постоянной кривизны**  
   гиперболические 244  
   геометрия Бельтрами (гиперboloида I) 242  
   геометрия Лобачевского–Большая (гиперboloида II) 243  
   сферическая (гиперсфероида) 273  
   сферическая Римана 275, 276, 280  
 Гиперболическая псевдокривизна 228  
 Гиперболическое движение 228  
  
 Деформированные координаты в РТГ 294  
  
**Закон равенства инерционной и гравитационной масс** 283  
**Закон сохранения энергии-импульса** 271, 289, 290  
  
**Инфинитезимальная теорема Пифагора**  
   на гиперboloидах I и II 257  
   на гиперсфероиде 278

- Квазиевклидово пространство** индекса 1 273  
 бинарное комплексное 195  
 сжатое 240  
 специальное в СТО 229, 236
- Лоренцево сокращение**  
 протяжённости 217  
 линейных объектов 214
- Мировая линия** 306
- Общерелятивистские эффекты** (элементарная трактовка) 295
- Общие законы суммирования движений** (скоростей)  
 гиперболических 262  
 сферических 280
- ОТО** (общая теория относительности) 287–290
- Прецессия Томаса** 247, 256, 271
- Принцип Маха** 282
- Принцип относительности**  
 Галилея 190  
 общий в ОТО 287  
 общий в РТГ 302  
 Пуанкаре 195, 206
- Принцип эквивалентности** 287
- Пространство-время Лагранжа** 192
- Псевдоаналог теории Френе – Серре**  
 1-я формула 310  
 2-я формула 315  
 3-я формула 319  
 4-я формула 320  
 подвижный четырёхгранник 320
- Псевдовинтовое движение** 313, 317
- Псевдоевклидово пространство** индекса 1 (пространство-время)  
 Минковского 196, 286, 300
- Псевдориманово пространство** индекса 1 (пространство-время) 292  
 Эйнштейна 287  
 эффективное в РТГ 294
- Псевдоскорость** (4-скорость) 307
- Релятивистский дуализм** 285
- РТГ** (релятивистская теория гравитации) 288, 294, 299
- Скорость физического движения**  
 координатная 201  
 собственная 224
- Собственное время** 207
- Собственное расстояние** 228
- СТО** (специальная теория относительности) 282
- Суммирование движений**  
 интегральных 227, 267  
 коллинеарных 221  
 неколлинеарных 245, 273
- Суммирование двух движений**  
 гиперболических 246, 249, 264  
 сферических 275, 276
- Тензор сферической ротации** (движения) 274
- Тензор энергии-импульса** 233
- Тензорные тригонометрические модели кинематики движения**  
 абсолютного 306–310, 315–321  
 коллинеарного 221–226  
 относительного 269–272, 311–314  
 простого 237, 313
- Тензоры гиперболических преобразований**  
 деформации 206, 233  
 ротации (движения) 206, 232
- Теорема о приведении суммы одноимённых движений к биортогональной форме** 253, 276
- Трактриса** 240  
 гиперболическое уравнение 241
- Угол параллельности**  
 сферический Лобачевского 202  
 гиперболический 202
- Ускорение физического движения**  
 внутреннее 225, 267  
 координатное 226, 269  
 собственное 226
- Формулы для элементарной ортосферической ротации** (буста) 256, 271  
 косинусная 255, 262, 280  
 синусная (орто) 255, 256  
 тензорная 246, 275
- Эффект Доплера** 258

## Оглавление

<b>К читателям</b> .....	3
<b>Resume</b> .....	4
<b>Предисловие</b> .....	5
<b>Используемые обозначения</b> .....	9
<b>Раздел I. Ряд общих вопросов теории точных матриц</b> .....	14
<b>Глава 1. Коэффициенты характеристических многочленов</b>	
§ 1.1. Совместное определение скалярных и матричных коэффициентов.....	15
§ 1.2. Генеральное неравенство средних величин.....	17
§ 1.3. Предельный метод решения векового уравнения с вещественными корнями.....	23
§ 1.4. Структура и свойства скалярных и матричных коэффициентов.....	27
§ 1.5. Минимальный аннулирующий многочлен от матрицы.....	33
§ 1.6. Нуль-простые и нуль-дефектные сингулярные матрицы.....	36
§ 1.7. Характеристические коэффициенты в редуцированной форме.....	38
<b>Глава 2. Собственные аффинные и ортогональные проекторы</b>	
§ 2.1. Аффинные проекторы и квазиобратная матрица во взаимосвязи с коэффициентами высшего порядка.....	42
§ 2.2. Применение результатов в спектральном представлении матрицы .....	44
§ 2.3. Приведение нуль-простой матрицы к нуль-клеточной форме	47
§ 2.4. Нуль-нормальные сингулярные матрицы.....	48
§ 2.5. Сферически ортогональные проекторы и квазиобратная матрица.....	50
<b>Глава 3. Основные скалярные инварианты сингулярных матриц</b>	
§ 3.1. Минорант матрицы и его применение.....	54
§ 3.2. Синусные характеристики матриц.....	57
§ 3.3. Косинусные характеристики матриц.....	59
§ 3.4. Предельные методы вычисления проекторов и квазиобратных матриц.....	60

**Глава 4. Два альтернативных варианта комплексификации**

- § 4.1. Сопоставление основных вариантов..... 62
- § 4.2. Примеры адекватной комплексификации ..... 65
- § 4.3. Примеры эрмитовой комплексификации ..... 67

**Раздел II. Фундаментальное содержание тензорной тригонометрии..... 69****Глава 5. Тензорная евклидова и квазиевклидова тригонометрия**

- § 5.1. Объекты тензорной тригонометрии и их пространственные взаимоотношения..... 70
- § 5.2. Проективные тензорные синус, косинус и сферически ортогональные рефлекторы..... 72
- § 5.3. Проективные тензорные секанс, тангенс и аффинные рефлекторы..... 77
- § 5.4. Сопоставление двух способов задания тензорных углов – через прямоугольные и через сингулярные квадратные матрицы..... 79
- § 5.5. Канонические монобинарные клеточные формы сферических тензорных тригонометрических функций и рефлекторов..... 82
- § 5.6. Ротационные тензорные тригонометрические функции от сферических углов моторного типа..... 87
- § 5.7. Тригонометрическая теория простых корней  $\sqrt{I}$  ..... 92
- § 5.8. Моторные тензорные синус, косинус, секанс и тангенс..... 94
- § 5.9. Взаимосвязь между проективными и моторными тригонометрическими функциями и углами..... 96
- § 5.10. Деформационные тензорные тригонометрические функции от сферических углов моторного типа..... 98
- § 5.11. Специальные модальные преобразования собственных ортогональных и косогональных проекторов и рефлекторов 102
- § 5.12. Элементарные тензорные сферические тригонометрические функции..... 105

**Глава 6. Тензорная псевдоевклидова тригонометрия**

- § 6.1. Гиперболические тензорные тригонометрические функции и рефлекторы..... 109
- § 6.2. Сферическо-гиперболическая аналогия конкретного типа... 111
- § 6.3. Фундаментальный рефлектор-тензор в квазиевклидовой и псевдоевклидовой интерпретации..... 116
- § 6.4. Скалярная тригонометрия на псевдоплоскости..... 119
- § 6.5. Элементарные тензорные гиперболические тригонометрические функции..... 122

## **Глава 7. Тригонометрическая природа коммутативности и антикоммутативности**

- § 7.1. Коммутативность простых матриц..... 124  
 § 7.2. Антикоммутативность пары простых матриц..... 125

## **Глава 8. Тригонометрические спектры и неравенства**

- § 8.1. Тригонометрический спектр нуль-простой матрицы..... 129  
 § 8.2. Генеральное косинусное неравенство..... 131  
 § 8.3. Спектрально-клеточное представление тензорных тригонометрических функций..... 134  
 § 8.4. Генеральное синусное неравенство..... 135

## **Глава 9. Геометрические нормы матричных объектов**

- § 9.1. Квадратичные нормы матричных объектов евклидова (квазиевклидова) пространства..... 140  
 § 9.2. Определение абсолютных и относительных геометрических норм..... 144  
 § 9.3. Геометрический смысл общих квадратичных норм..... 145  
 § 9.4. Линеоры специальных видов и простейшие линеорные фигуры..... 147

## **Глава 10. Варианты комплексификации тензорной тригонометрии**

- § 10.1. Адекватный вариант..... 150  
 § 10.2. Эрмитов вариант..... 151  
 § 10.3. Псевдоизация в бинарных комплексных пространствах.... 153

## **Глава 11. Тригонометрия общих псевдоевклидовых пространств**

- § 11.1. Овеществление бинарного евклидова пространства..... 155  
 § 11.2. Группа псевдоевклидовых ротаций..... 156  
 § 11.3. Полярное представление псевдоевклидовых ротаций..... 159  
 § 11.4. Многоступенчатые гиперболические ротации..... 165

## **Глава 12. Тригонометрия псевдоевклидова пространства Минковского**

- § 12.1. Проективные тригонометрические модели сопутствующих гиперболических геометрий..... 169  
 § 12.2. Ротации и деформации в псевдоевклидовом пространстве Минковского..... 179  
 § 12.3. Специальный математический принцип относительности 183

<b>Приложение. Тригонометрические модели движений в неевклидовых геометриях и в теории относительности</b>	
Введение.....	187
Дополнительные обозначения.....	190
Глава 1А. Пространство-время Лагранжа и пространство время Минковского как математические абстракции и физическая реальность.....	192
Глава 2А. Тензорная тригонометрическая модель однородных преобразований Лоренца.....	203
Глава 3А. Эйнштейново замедление времени как следствие ротационного гиперболического преобразования.....	207
Глава 4А. Лоренцево сокращение протяжённости как следствие деформационного гиперболического преобразования.....	212
Глава 5А. Тригонометрические модели коллинеарных двух-, многоступенчатых и интегральных движений в СТО и в гиперболической геометрии.....	221
Глава 6А. Изоморфное отображение псевдоевклидова пространства в сжатое квазиевклидово пространство.....	238
Глава 7А. Тригонометрические модели неколлинеарных двух-, многоступенчатых и интегральных движений в СТО и в гиперболической геометрии.....	245
Глава 8А. Тригонометрические модели движений в сферической геометрии.....	273
Глава 9А. Необходимо ли искривление пространства-времени в поле тяготения?.....	282
Глава 10А. Природа движения по мировым линиям в пространстве-времени Минковского и его внутренняя геометрия.....	306
Список литературы.....	322
Именной указатель.....	326
Предметный указатель.....	329



*Научное издание*

Анатолий Сергеевич Нинул

## **ТЕНЗОРНАЯ ТРИГОНОМЕТРИЯ**

*Теория и приложения*

Технический редактор *Е. В. Денюкова*

Художник *М. М. Иванов*

Корректор *А. С. Попов*

Оригинал-макет подготовил *Е. А. Игошин*

Подписано к печати 13.09.2004 г. Формат 60 x 90<sup>1/16</sup>.  
Бумага офсетная. Печать офсетная. Объем 10,5 бум. л.  
Усл. печ. л. 21. Изд. № 1/10114. Тираж 1000 экз.

Издательство “Мир”

Министерства культуры

и средств массовых коммуникаций РФ

107996, ГСП-6, Москва, 1-й Рижский пер., 2.

Internet: [www.mir-publishers.net](http://www.mir-publishers.net)

Отпечатано с готовых диапозитивов  
в ГУП “Брянское областное полиграфическое объединение”  
241019, г. Брянск, пр-т Ст. Димитрова, 40.